I. DUMITRESCU
D. CĂLUEANU
A. HELER
R. MORAR
V. NITU
N. RACOVEANU

ELECTROTEHNICĂ ȘI MAȘINI ELECTRICE

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI – 1983

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. dr. ing. **I. DUMITRESCU**
Prof. dr. ing. **D. CĂLUEANU**
Prof. dr. ing. **A. HELER**
Conf. dr. ing. **R. MORAR**
Prof. docent dr. ing. **V. NIȚU**
Prof. dr. ing. **N. RĂCOVEANU**

ELECTROTEHNICĂ și MAȘINI ELECTRICE

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI — 1983

Prefață

Prezenta lucrare — concepută ca manual unic — a fost în așa fel întocmită încît să fie utilizată la pregătirea operativă (prin studiul individual ritmic) de studenții din anii III și IV, cursuri de zi și serale, specializarea „Utilaj tehnologic" de la facultățile cu profil mecanic ale institutelor politehnice din Cluj-Napoca și Timișoara, Universitatea din Galați și Institutul de petrol și gaze Ploiești, la disciplina „Electrotehnică și mașini electrice".

Pentru sporirea eficienței studiului, prezenta carte trebuie folosită împreună cu manualele, îndrumarele de laborator și culegerile de probleme deja multiplicate pe plan local și care sînt legate de direcțiile de aprofundare ale fiecărei facultăți. Aceste lucrări, care fac și o corelație între partea de teorie (curs) și partea aplicativă (laborator și seminar), caută să mărească eficiența studiului individual prin stimularea cititorului în efortul său de pregătire prin gîndire și exercițiu practic-experimental.

De aceea, în acest manual au fost incluse elementele de bază ale disciplinei, fără „incursiuni" în domeniul altor materii (ca „Fizica" și „Matematica") — invitînd studentul să-și reîmprospăteze singur noțiunile asimilate la alte cursuri. De asemenea, s-a renunțat la detaliile și amănuntele nesemnificative, dar care pot „împovăra" memoria studentului, precum și la descrierea unor aparate, dispozitive sau instalații electrice care reprezintă numai variante constructive sau de „firmă", lăsînd pe seama predării (la orele de curs) sarcina de a da exemplificări care să țină la zi pregătirea cu realizările momentului, cu situațiile din producție și cu direcțiile de modernizare. S-a ținut seama, în acest fel, de faptul dovedit practic că partea pur aplicativă se „reînnoiește" ciclic, cu perioade de 5—6 ani, în scopul îmbunătățirii performanțelor și lărgirii resurselor. Viitorul inginer trebuie învățat să „facă față" acestei situații ce se va repeta atît de des în practica sa profesională. Au fost dezvoltate aici mai ales acele părți (ca: scheme, demonstrații matematice, grafice etc.) care nu pot fi prezentate eficient prin expunerile de la curs pentru că necesită timp, nu pot fi redate inteligibil „cu creta pe tablă" sau nu pot fi

preluate (cu înțelegere în „timp real") de către studentul ce urmărește prelegerea, dar care necesită parcurgerea lor atentă (eventual repetată), cu meditație în timpul efectuării studiului individual.

*Am acordat aspectelor electroenergetice și de randament locul important pe care îl au pentru formarea unui inginer neelectrician capabil să aplice politica energetică a partidului în domeniul său (aici cel al utilajului tehnologic), să contribuie activ la înfăptuirea sarcinii puse de secretarul general al partidului, tovarășul Nicolae Ceaușescu, la Conferința Națională a P.C.R. din decembrie 1982, privind asigurarea deplinei independențe energetice *.*

Cuprins

Introducere 11

Cap. 1. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU 13

1.1. **Circuite electrice** 13
1.1.1. Elemente introductive 13
1.1.2. Parametrii de circuit electric 15
1.1.3. Regimurile de funcționare ale circuitelor electrice 30

1.2. **Analiza regimurilor de curent continuu** 32
1.2.1. Mărimi electrice de circuit.. 32
1.2.2. Legile electrocineticii 39

1.3. **Calculul circuitelor electrice liniare de curent continuu** 43
1.3.1. Rețelele electrice de curent continuu 43
1.3.2. Teoremele rețelelor electrice liniare de curent continu 46
1.3.3. Metode de calcul al rețelelor liniare de curent continuu 54
1.3.4. Rezolvarea asistată de calculatoare a circuitelor liniare de curent continuu 57

Cap. 2. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE DE CURENT ALTERNATIV.. 67

2.1. **Regimul variabil al circuitelor electrice** 67
2.1.1. Tensiunea la borne 68
2.1.2 Teoremele energiei 70
2.2. **Regimul sinusoidal al circuitelor electrice** 74
2.2.1. Caracteristicile mărimilor alternative sinusoidale 75
2.2.2. Reprezentarea mărimilor sinusoidale prin fazori 76
2.2.3. Reprezentarea mărimilor sinusoidale, de timp, în complex (reprezentarea simbolică) 78
2.2.4. Elemente de circuit în regim sinusoidal 79
2.2.5. Circuite simple de curent alternativ sinusoidal 83
2.2.6. Puteri în curent alternativ sinusoidal 87
2.2.7. Îmbunătățirea factorului de putere 89

2.3. **Metode de calcul al rețelelor liniare de curent alternativ sinusoidal....** 89
2.3.1. Forma complexă a legii lui Ohm generalizate 90
2.3.2. Teoremele lui Kirchhoff în formă complexă 90
2.3.3. Metode de rezolvare a rețelelelor liniare de curent alternativ sinusoidal 91
2.3.4. Conservarea puterilor în curent alternativ sinusoidal 99

2.4. **Circuite de curent alternativ în regim sinusoidal cu cuplaje magnetice** 100
2.4.1. Inductivități mutuale 100
2.4.2. Ecuațiile circuitelor cuplate magnetic 101

2.5. **Circuite trifazate de curent alternativ în regim sinusoidal** 102
2.5.1. Elemente introductive.... 102
2.5.2. Sisteme trifazate simterice.. 102
2.5.3. Producerea t.e.m. trifazate simetrice 104
2.5.4. Conexiuni în sistemele trifazate 105
2.5.5. Rezolvarea rețelelor de curent alternativ trifazat 107
2.5.6. Metoda componentelor simetrice 111

Cap. 3. CHESTIUNI SPECIALE ÎN STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE 115

3.1. Regimul tranzitoriu al circuitelor electrice 115

3.1.1. Elemente introductive 115

3.1.2. Noţiuni de bază din teoria distribuţiilor 117

3.1.3. Ecuaţii diferenţiale pentru studiul regimului tranzitoriu al circuitelor electrice 127

3.1.4. Alte aplicaţii specifice regimului tranzitoriu 131

3.2. **Calculul circuitelor electrice neliniare** 133

3.3. **Cuadripoli** 135

Cap. 4. CIRCUITE MAGNETICE 145

4.1. Noţiuni de bază 145

4.1.1. Structura circuitelor magnetice 145

4.1.2. Tipuri de circuite magnetice 146

4.1.3. Mărimi, legi şi teoreme specifice circuitelor magnetice 147

4.1.4. Forţe în cîmpul magnetic.. 151

4.2. **Materiale magnetice** 156

4.1.2. Comportarea materialelor în cîmp magnetic 156

4.2.2. Proprietăţile materialelor feromagnetice 158

4.2.3. Pierderi în fier 162

4.3. **Calculul circuitelor magnetice** .. 164

4.3.1. Teoremele circuitelor magnetice 165

4.3.2. Exemple de calcul 167

4.4. **Cîteva aplicaţii** 170

4.4.1. Forma de undă a curentului de magnetizare la bobinele de inducţie 170

4.4.2. Cîmpul magnetic în întrefierul maşinilor electrice rotative.. 175

4.4.3. Încălzirea prin inducţie 179

Cap. 5. MĂSURAREA MĂRIMILOR ELECTRICE ŞI MAGNETICE .. 184

5.1. **Elemente introductive** 184

5.1.1. Erori de măsurare 187

5.1.2. Caracteristici metrologice.. 187

5.1.3. Elemente componente comune ale aparatelor electrice de măsurat 190

5.2. **Aparate magnetoelectrice** 193

5.2.1. Aparate magnetoelectrice cu magnet fix şi bobină mobilă.. 193

5.2.2. Logometre magnetoelectrice 195

5.2.3. Aparate magnetoelectrice cu redresoare 196

5.2.4. Aparate magnetoelectrice cu termocupluri 197

5.3. **Aparate electromagnetice** 197

5.3.1. Aparate electromagnetice cu bobină plată 198

5.3.2. Aparate electromagnetice cu bobină cilindrică 198

5.3.3. Logometre electromagnetice 199

5.3.4. Frecvenţmetre cu lamele vibrante 200

5.4. **Aparate electrodinamice** 201

5.4.1. Eldectrodinamometre 201

5.4.2. Aparate ferodinamice.... 202

5.4.3. Logometre electrodinamice (ferodinamice) 203

5.4.4. Moduri de conectare în circuit a aparatelor electrodinamice 203

5.5. **Aparate cu inducţie** 206

5.5.1. Disopzitivul cu inducţie cu un flux 206

5.5.2. Aparate cu inducţie cu două fluxuri 207

5.5.3. Contorul cu inducţie monofazat 209

5.6. **Aparate termice** 211

5.7. **Aparate electrostatice** 212

5.8. **Aparate electronice** 214

5.9. **Măsurarea intensităţii curentului electric** 214

5.9.1. Măsurarea directă a intensităţii curentului electric 214

5.9.2. Măsurarea indirectă a intensităţii curentului electric 217

5.10. **Măsurarea tensiunii electrice**.. 21

5.10.1. Măsurarea directă a tensiunii electrice 219
5.10.2. Măsurarea indirectă a tensiunii 221
5.11. **Măsurarea rezistențelor** 222
5.11.1. Metoda ampermetrului și voltmetrului 222
5.11.2. Metoda voltmetrului.... 224
5.11.3. Metoda voltmetrului și rezistenței etalon 224
5.11.4. Măsurarea rezistențelor foarte mici prin metoda compensației 225
5.11.5 Metoda ohmmetrului ....
5.11.6. Metoda punții 228
5.11.7. Măsurarea și verificarea rezistenței de izolație a instalațiilor electrice 229
5.11.8. Măsurarea rezistenței electrice a prizelor de pământ 230
5.12. **Măsurarea impedanțelor** 232
5.12.1. Metode de deviație 232
5.12.2. Metoda punții 233
5.12.3. Impedanțmetrul 234
5.13. **Măsurarea capacității condensatoarelor electrice** 234
5.13.1. Metoda voltampermetrică 235
5.13.2. Metoda voltmetrului, ampermetrului și wattmetrului 236
5.13.3. Metoda comparației 237
5.13.4. Metoda directă 237
5.13.5. Metoda punții 238
5.14. **Măsurarea inductivităților** 238
5.14.1. Măsurarea inductivității proprii 238
5.14.2. Măsurarea inductivităților mutuale 241
5.15. **Măsurarea puterilor electrice**.. 243
5.15.1. Măsurarea puterii în circuitele de curent continuu..... 243
5.15.2. Măsurarea puterii active în circuite de curent alternativ monofazat 245
5.15.3. Măsurarea puterii reactive în circuite de curent alternativ monofazat 247
5.15.4. Măsurarea puterii active în circuitele trifazate de curent alternativ 249
5.15.5. Măsurarea puterii reactive în circuitele trifazate..... 251
5.16. **Măsurarea energiei electrice** 253
5.16.1. Măsurarea energiei electrice în circuitele de curent continuu 253
5.16.2. Măsurarea enegiei active.. 254
5.16.3. Măsurarea energiei reactive 255
5.17. **Măsurarea factorului de putere**.. 256
5.17.1. Măsurarea factorului de putere în circuitele monofazate.. 256
5.17.2. Măsurarea factorului de putere în circuitele trifazate.... 258

Cap. 6. MAȘINI ELECTRICE 259

6.1. **Transformatorul electric** 260
6.1.1. Principiul de funcționare și rolul transformatorului electric 260
6.1.2. Elementele constructive ale transformatorului monofazat 263
6.1.3. Funcționarea în sarcină a transformatorului monofazat .. 264
6.1.4. Funcționarea în gol a transformatorului monofazat 267
6.1.5. Funcționarea în scurtcircuit a transformatorului monofazat.... 268
6.1.6. Schema electrică echivalentă a transformatorului monofazat 268
6.1.7. Cădere și pierdere de tensiune la transformatorul monofazat 270
6.1.8. Caracteristica externă a transformatorului monofazat.... 271
6.1.9. Randamentul transformatorului monofazat 271
6.1.10. Noțiuni privind construcția transformatorului trifazat.. 272
6.1.11. Principiul de funcționare a transformatorului trifazat 273
6.1.12. Scheme de conexiuni și grupe de conexiuni la transformatoarele trifazate 274
6.1.13. Funcționarea în paralel a transformatoarelor electrice.... 275

6.1.14. Autotransformatorul 278
6.1.15. Transformatoare electrice de sudare 279
6.1.16. Transformatoare pentru încălzirea prin inducție în înaltă frecvență 280
6.1.17. Simbolizarea transformatoarelor 281
6.2. **Mașina de curent continuu** 282
6.2.1. Elemente constructive ale mașinii de curent continuu.... 282
6.2.2. Cîmpul magnetic al polilor de excitație statorici 286
6.2.3. Principiul de funcționare ca generator 287
6.2.4. Principiul de funcționare ca motor 289
6.2.5. Reacția indusului la mașina de curent continuu 290
6.2.6. Comutația la mașina de curent continuu 291
6.2.7. Clasificarea generatoarelor de curent continuu după tipul excitației 293
6.2.8. Caracteristicile generatorului cu excitație separată.... 295
6.2.9. Caracteristicile generatorului cu excitație derivație 296
6.2.10. Caracteristicile generatorului cu excitație serie 297
6.2.11. Caracteristicile generatorului cu excitație mixtă..... 298
6.2.12. Ecuațiile și caracteristicile motorului de curent continuu 298
6.2.13. Caracteristicile de turație și mecanice ale motorului cu excitație derivație 299
6.2.14. Caracteristicile de turație și mecanice ale motorului cu excitație serie 301
6.2.15. Caracteristicile motorului cu excitație mixtă 302
6.2.16. Caracteristicile de pornire ale motorului de curent continuu 303
6.2.17. Caracteristicile de modificare (reglare) a turației motorului de curent continuu..... 305
6.2.18. Frînarea motorului de curent continuu 306
6.2.19. Randamentul mașinii de curent continuu 307
6.2.20. Generatoare de curent continuu pentru sudarea cu arcul electric 308
6.3. **Mașina asincronă** 308
6.3.1. Elemente constructive ale motorului asincron trifazat.... 309
6.3.2. Principiul de funcționare a motorului asincron trifazat.... 312
6.3.3. Ecuațiile tensiunilor motorului asincron trifazat..... 314
6.3.4. Scheme echivalente ale motorului asincron 314
6.3.5. Pierderile și randamentul motorului asincron trifazat.... 317
6.3.6. Cuplul motorului asincron trifazat 318
6.3.7. Caracteristicile mecanice ale motorului asincron trifazat.. 320
6.3.8. Pornirea motoarelor asincrone trifazate 322
6.3.9. Reglarea turației motoarelor asincrone trifazate 325
6.3.10. Frînarea mașinii asincrone trifazate 327
6.3.11. Motorul asincron monofazat 329
6.4. **Mașina sincronă** 331
6.4.1. Elemente constructive ale mașinii sincrone 332
6.4.2. Principiul de funcționare a generatorului sincron trifazat 333
6.4.3. Reacția indusului (statorului) la generatorul sincron.... 335
6.4.4. Diagrama fazorială a generatorului sincron la funcționarea în sarcină 336
6.4.5. Caracteristicile generatorului sincron trifazat 339
6.4.6. Randamentul generatorului sincron 340
6.4.7. Cuplul electromagnetic la generatorul sincron 340
6.4.8. Principiul de funcționare a motorului sincron trifazat .. 341

6.4.9. Diagrama fazorială a motorului sincron trifazat 342
6.4.10. Puterea și cuplul electromagnetic al motorului sincron.. 343
6.4.11. Caracteristicile motorului sincron trifazat 344
6.4.12. Frînarea cu motorul sincron 345
6.4.13 Compensatorul sincron ..
6.4.14. Motorul sincron pas cu pas 347

Cap. 7. SISTEME ELECTROENERGETICE INDUSTRIALE ȘI ELEMENTE DE ENERGIETICĂ TEHNOLOGICĂ 349

7.1 **Sistemul electroenergetic** 349

7.1.1. Definirea sistemului electroenergetic 349
7.1.2. Graficele de sarcină ale sistemului electroenergetic și întreprinderilor industriale 351
7.1.3. Prognoza curbelor de sarcină 355
7.1.4. Preliminarea curbelor de sarcină 358
7.1.5. Calculul sarcinilor electrice 359

7.2. **Sistemele electrice de alimentare din întreprinderile industriale....** 360

7.2.1. Trepte de tensiune 360
7.2.2. Rețele de distribuție.... 361
7.2.3. Stații de transformare și distribuție 364
7.2.4. Posturi de transformare.. 365

7.3. **Calculul pierderilor de putere și energie** 366

7.3.1. Calculul pierderilor de putere și energie în rețele electrice.... 366
7.3.2. Calculul pierderilor de putere și energie în transformatoare 368
7.3.3. Pierderile de putere și energie în motoarele electrice 369
7.3.4. Alegerea tensiunii rețelelor electrice 369

7.4. **Utilizarea rațională a energiei electrice** 370

7.4.1. Măsuri de economisire a energiei electrice 371
7.4.2. Energia electrică — componenta cea mai dinamică a balanței energetice 372
Bibliografie 375

Introducere

„Electrotehnica" are ca obiect de studiu aplicațiile din tehnică ale fenomenelor electrice și magnetice. Aceste aplicații pot fi: cu caracter general (ca, de exemplu: aparatele electrice de măsurat, motoarele electrice de acționare, instalațiile de iluminat electric, instalațiile electrotermice etc.) sau cu caracter specific unui anumit proces tehnologic (ca, de exemplu: instalații electrice pentru elaborarea aluminiului, cuptoarele electrice pentru tratamentele termice, instalațiile pentru sudarea electrică, instalațiile pentru călirea prin curenți de înaltă frecvență, dispozitivele electrice pentru automatizări etc.). Din punctul de vedere al nivelului energetic (al puterilor) ce intervin, aplicațiile pot fi de domeniul așa-numiților „curenți tari" (din instalațiile tehnologice industriale), sau al „curenților slabi" (telecomunicații, prelucrarea automată a datelor, aparatură electronică etc.).

În cadrul acestui curs avem în vedere numai *aplicațiile generale ale curenților tari*, urmînd ca la disciplinele tehnologice de profil să se studieze și aplicațiile specifice (la „Mașini-unelte și control dimensional", „Tehnologia fabricării și reparării utilajului tehnologic", „Calculul și construcția utilajului tehnologic", „Acționări electrice" etc.), iar la cursurile „Elemente de electronică industrială și automatică" și „Aparate de măsurat și automatizări" să se studieze și unele aplicații ale curenților slabi. Oricum, toate aceste aplicații specifice industriei utilajului tehnologic se vor baza pe cunoștințele prezentului curs, referitoare la aplicațiile generale ale fenomenelor electrice și magnetice.

Considerînd că de la cursurile de „Fizică" și „Matematici speciale" studenții au însușite noțiunile cu privire la teoria cîmpului în general și teoria fizică a cîmpului electromagnetic în special, vom studia aici numai *bazele tehnice ale aplicațiilor generale ale fenomenelor electromagnetice*. De aceea, ținînd seama și de aplicațiile practice de la laborator, în cadrul acestui curs vom face o analiză pe modele (matematice și grafice — scheme) a principiilor funcționale și fenomenologice din electrotehnică. Totodată vom acorda prioritate aspectelor energetice și de randament specifice instalațiilor electrice, pentru a dobîndi înțelegerea fundamentată științific a măsurilor necesare pentru utilizarea rațională a energiei electrice.

Prin cele de mai sus sperăm că am putut justifica structura pe care o are acest curs și anume:

— *circuite electrice*,
— *circuite magnetice*,
— *măsurări electrice și magnetice*,
— *mașini electrice*,
— *sisteme electroenergetice ale întreprinderilor industriale*,

care, dealtfel, corespunde și programelor de curs în vigoare.

Prin exemplele tipice pe care le vom utiliza aici, sperăm să reușim să familiarizăm pe viitorul inginer mecanic (deci neelectrician) cu mărimile specifice electrotehnicii, cu unitățile lor de măsură (toate în SI), cu modelele matematice folosite pentru analiza și sinteza circuitelor electrice și magnetice, precum și cu principiile de funcționare-utilizare a aparatelor electrice de măsurat și mașinilor electrice, toate numai la nivelul utilizatorului.

Acordăm o atenție deosebită circuitelor — ca modele grafice și expresiilor matematice care descriu comportarea lor — ca modele matematice, deoarece funcționarea dispozitivelor și instalațiilor electrice se analizează pe „scheme echivalente" ca modele ale originalului fizic aflat în exploatare.

În concluzie, din materialul extrem de vast pe care îl poate avea o lucrare generală de electrotehnică și mașini electrice, am selectat și dezvoltat numai acele părți care pot asigura acea pregătire electrică a viitorilor ingineri mecanici care să le permită ca — în activitatea lor practică — să poată rezolva probleme de bază ca: alegerea tehnologiilor în funcție și de componenta lor electroenergetică, utilizarea rațională a mașinilor, instalațiilor, aparatelor și a altor dispozitive ce cuprind și părți electrice.

Capitolul 1

CIRCUITE ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU

Deşi acest capitol este destinat studierii fenomenelor electrocinetice staţionare şi în mod special analizei circuitelor de curent continuu, vom prezenta — în primul paragraf — şi cîteva elemente, cu caracter mai larg, referitoare la noţiunile de circuit electric şi parametrii de circuit, pentru a fixa cadrul general, clasificările, unele mărimi comune şi specificul stărilor electrocinetice staţionare faţă de cele nestaţionare.

1.1. CIRCUITE ELECTRICE

1.1.1. Elemente introductive

Privite numai sub aspect energetic, *circuitele electrice* sînt alcătuite din *surse* electrice şi din *receptoare* de energie electrică, conectate între ele prin conductoare, conform unei scheme* ce depinde de o anumită aplicaţie avută în vedere. Pentru realizarea fizică a unui circuit electric (numit şi *reţea electrică*) mai sînt necesare şi alte dispozitive sau aparate cum sînt: cele de conectare şi comutare (separatoare, întreruptoare, contactoare etc.), de protecţie (relee, siguranţe fuzibile, descărcătoare etc.), de măsurat (ampermetre, voltmetre, wattmetre, contoare etc.), de reglare (reostate, controlere etc.), de adaptare (transformatoare, amplificatoare, mutatoare etc.), de montare (borne, cutii de conexiuni, cleme etc.).

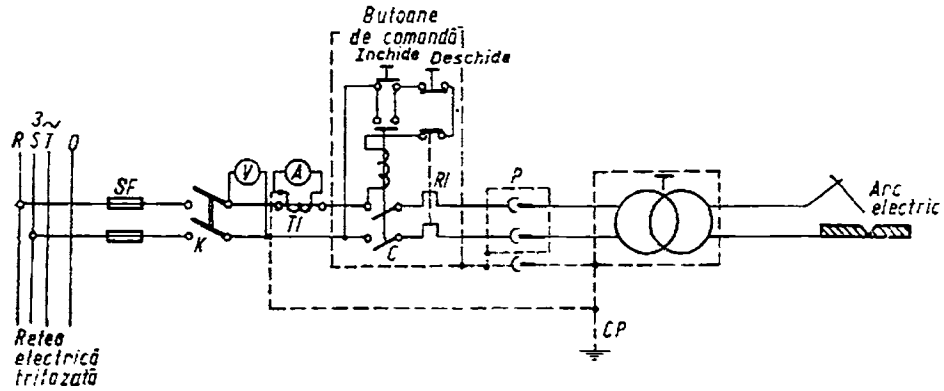


Fig. 1-1

* Schemele electrice sînt reprezentări grafice convenţionale (cu simboluri standardizate) ale circuitelor electrice. După detalierea pe care o realizează, schemele pot fi: de principiu, monofilare, de montaj, de conexiuni etc.

Fig. 1-2

Un exemplu simplu de circuit electric este cel din figura 1-1, în care rețeaua trifazată de curent alternativ (3~) constituie sursa electrică și arcul electric „receptorul" de energie electrică. Celelalte dispozitive și anume: siguranțele fuzibile (*SF*), conexiunea la pămînt (*CP*), releul maximal de curent (*RI*) sînt dispozitive de protecție; întreruptorul bipolar (*K*), contactorul electromagnetic (*C*) și priza cu fișe (*P*) — dispozitive de conectare; voltmetrul (*V*), ampermetrul (*A*) și transformatorul de curent (*TI*) — dispozitive de măsurat, iar transformatorul de sudare (*T*) — dispozitiv de adaptare.

Atît sursele cît și receptoarele sînt *convertoare de energie.* Sursele (generatoarele) de energie electrică transformă o energie de natură neelectrică W_{ne} într-o energie electrică W_e (fig. 1-2, *a*), iar receptoarele (consumatoarele) de energie electrică transformă energia electromagnetică W_e într-o energie de natură neelectrică W_{ne} (fig. 1-2, *b*), corespunzătoare aplicației („utilizării") avute în vedere.

Pentru aprecierea comportării în regim dinamic se consideră viteza de variație a energiei în timpul unor procese fizice, ceea ce reprezintă puterea instantanee: neelectrică $p_{ne} = \mathrm{d}W_{ne}/\mathrm{d}t$ și electrică $p_e = \mathrm{d}W_e/\mathrm{d}t$.

În funcție de aceste mărimi, se poate defini *randamentul mediu* al transformării energiei într-o sursă (η_{imS}) sau receptor (η_{imR}) prin rapoartele:

$$\eta_{imS} = \frac{W_e}{W_{ne}}; \qquad \eta_{imR} = \frac{W_{ne}}{W_e},$$

și *randamentul instantaneu* prin:

$$\eta_{iS} = \frac{p_e}{p_{ne}}; \qquad \eta_{iR} = \frac{p_{ne}}{p_e}.$$

În concluzie, circuitul electric este, din punctul de vedere energetic, un sistem care transformă *rațional,* prin intermediul unor procese de cîmp electromagnetic, o energie de natură neelectrică *primară* într-o altă energie tot de natură neelectrică *utilă* pentru o anumită aplicație (fig. 1-3). În practică, aceste sisteme au mai multe surse și mai multe receptoare. Termenul de „rațional", utilizat mai sus, are înțelesul că sistemul permite folosirea la utilizator a unor resurse energetice primare, oriunde ar exista ele în mod natural, precum și că valorifică resursele de energie de diverse forme, care altfel s-ar pierde (ale combustibililor fosili, hidraulice, eoliene, solară, nucleară, combustibili „săraci" și chiar resturi menajere).

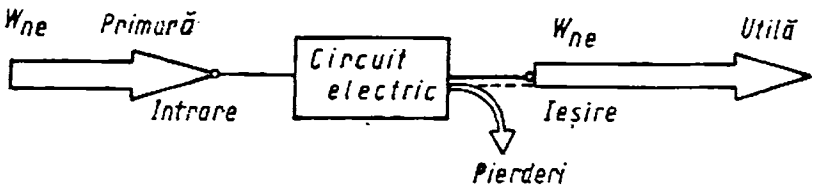


Fig. 1-3

După „forma de undă" (adică variația în timp a mărimilor electrice) circuitele electrice pot fi: de *curent continuu* (cu simbolul *cc* sau -) și de *curent alternativ* (cu simbolul *ca* — cel mai utilizat fiind regimul sinusoidal cu simbolul ~). În practică, circuitele de *ca* sinusoidal pot fi: monofazate (simbol 1 ~) și trifazate (simbol 3 ~).

Din punctul de vedere al proceselor electromagnetice, circuitele electrice se compun din următoarele *elemente de circuit:* rezistoare, bobine și condensatoare (capacitoare). Despre acestea se zice că sînt active atunci cînd sînt sediul unor tensiuni electromotoare (t.e.m.) sau *pasive* (nu au t.e.m.). După numărul de borne cu ajutorul cărora sînt conectate în circuit, elementele de circuit pot fi *dipoli* sau *multipoli* (de exemplu, cuadripolii).

1.1.2. Parametrii de circuit electric

Parametrii de circuit sînt mărimi fizice care caracterizează comportarea elementelor de circuit aflate în cîmp electromagnetic. Ei sînt: rezistența, conductanța, inductivitatea (inductanța) proprie, inductivitatea (inductanța) mutuală, capacitatea, precum și impedanța, admitanța, reactanța și susceptanța (pentru circuitele de curent alternativ sinusoidal).

Deși elementele de circuit sînt constituite în scopul de a fi caracterizate de un anumit parametru de circuit (rezistorul de rezistență, bobina de inductivitate și condensatorul de capacitate), orice element de circuit are simultan toți acești parametri, însă — după caz — unii din ei sînt neglijabili (fără un efect semnificativ).

Un parametru de circuit este *liniar* dacă valoarea lui nu depinde de mărimile electrice care caracterizează circuitul electric (curent, tensiune la borne, tensiune electromotoare etc.) și *neliniare* dacă depinde de ele (acesta fiind practic cazul general).

Parametrii de circuit mai pot fi concentrați („localizați") în anumite elemente ale circuitului sau distribuții (uniform sau după o anumită „lege", ceea ce reprezintă cazul general).

În cele mai multe situații, parametrii circuitelor care nu au dimensiuni geometrice mari pot fi considerați în modelele de calcul ca fiind concentrați în laturi. De exemplu, rezistența distribuită, în realitate, pe lungimea conductoarelor de legătură din figura 1-4, *a* poate fi considerată concentrată în două rezistoare r_l ca în figura 1-4, *b*, unde R este rezistența receptorului.

Parametrii de circuit sînt adesea influențați și de anumiți factori externi circuitului (temperatura, umiditatea mediului, deformații etc.). În unele aplicații influența acestor factori poate fi neglijată. De asemenea, parametrii de circuit depind de dimensiunile și forma corpurilor, de natura materialului și starea lui de uniformitate (omogenă și izotropă) etc.

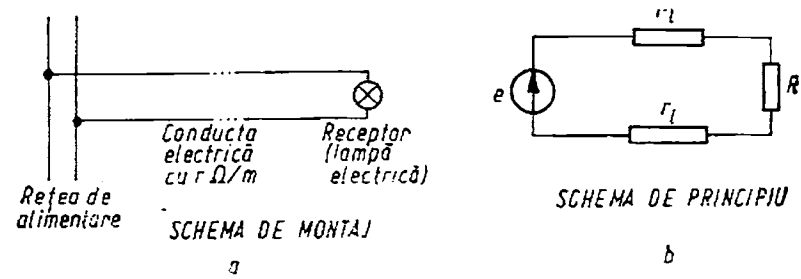


Fig. 1-4

Rezistența, conductanța

Rezistența și conductanța sînt parametri de circuit caracteristici corpurilor conductoare în legătură cu fenomenul conducției electrice din electrocinetică.

După cum se știe de la „Fizică", din punctul de vedere al conducției electrice, materialele sînt de trei feluri: conductoare, izolante și semiconductoare. „Apartenența" unui material la una din aceste trei categorii se poate determina prin experiență. Astfel, apropiind un corp neutru (neelectrizat), „confecționat" dintr-un material oarecare, de un alt corp, însă electrizat, se poate produce unul din următoarele fenomene:

— corpul neutru este atras de cel electrizat și după ce au ajuns în contact este imediat respins. În acest caz, corpul neutru (neelectrizat) este din *material conductor* (astfel de materiale sînt: metalele, cărbunele, soluțiile de săruri anorganice, de acizi și de baze);

— corpul neutru este atras de către corpul electrizat și după ce au ajuns în contact continuă să fie atras un timp îndelungat (de ordinul orelor și chiar zilelor). În acest caz corpul neutru (neelectrizat) este din *material izolant* (zis și *dielectric*). Așa sînt: mica, marmura, porțelanul, sticla, hîrtia, ebonita, mătasea, rășinele, aerul uscat și pur, apa distilată (chimic pură) etc.;

— corpul neutru este atras de cel electrizat dar numai pentru scurt timp (de ordinul secundelor). În acest caz corpul neutru este din *material semiconductor* (siliciu, germaniu etc.).

Această categorisire a materialelor se poate face și cu ajutorul unei mărimi scalare * numită **conductivitatea mediului.** Conductivitatea, notată de obicei cu γ sau σ, este o mărime de material care descrie local comportarea într-un cîmp electric a unui material din punctul de vedere electrocinetic. În sistemul internațional (SI), conductivitatea (mai exact, *conductivitatea electrică*) se măsoară în siemens pe metru, cu simbolul S/m. Valorile conductivității electrice specifice celor trei feluri de materiale sînt:

— la materialele conductoare $\gamma = 10^6 \div 10^8$ S/m (de exemplu, cuprul are conductivitatea $5{,}8 \cdot 10^7$ S/m);

— la materialele izolante $\gamma < 10^{-16}$ S/m;

— la materialele semiconductoare, la temperaturile normale de referință (de exemplu la 27°C) $\gamma = 10^{-3} \div 10^5$ S/m.

Materialele conductoare se împart, la rîndul lor, în două așa-zise clase:

— materiale conductoare de prima specie, denumite și *conductori metalici*, caracterizate prin aceea că în regim electrocinetic („sub curent") nu au transformări chimice (așa sînt metalele și cărbunele);

— materiale conductoare de specia a doua, denumite și *conductori electrolitici* sau — pur și simplu — *electroliți*, la care în regim electrocinetic (sub curent de conducție) se produc transformări chimice (așa sînt soluțiile apoase de acizi, baze și săruri).

Despre un corp conductor format din materiale diferite (chiar de aceeași specie și, mai ales, de specii diferite) se spune că este neomogen (în caz contrar — omogen). Comportarea în regim electrocinetic a conductorilor este determinată și de unele mărimi neelectrice, în special temperatura și accelerația (fenomenele conducției electrice în conductori sînt cîteodată determinate și de faptul că temperatura conductorului este neuniformă sau că vitezele în diferite puncte sînt diferite etc., ceea ce este cunoscut de la „Fizică").

* În mediile anizotrope, conductivitatea este o mărime tensorială.

Experiența arată că, dacă un corp conductor omogen la temperatură constantă și fără accelerații este „parcurs" de un curent electric de conducție i, atunci la extremitățile lui există o tensiune electrică u astfel încît raportul dintre u și i este constant, cu condiția — încă — să nu se producă deformații și modificări ale dimensiunilor corpului. Acest raport reprezintă — prin definiție — rezistența corpului conductor (a conductorului) și se notează cu literele R sau/și r.

Prin urmare, *rezistența electrică* a unui conductor uniform (omogen și izotrop), la temperatură constantă și fără accelerații (deci fără tensiune electromotoare proprie), ce are două borne de acces (prin care se poate conecta într-un „lanț" închis de conductori) se definește prin:

$$R \overset{D}{=} \frac{u}{i}, \tag{1-1}$$

unde u este tensiunea la bornele conductorului și i — intensitatea curentului electric de conducție din acel conductor, corespunzător tensiunii u. Egalitatea (1-1) reprezintă modelul de definiție a rezistenței conductorilor electrici, ca parametru de circuit.

Unitatea de măsură în sistemul internațional (SI) pentru rezistența electrică poartă numele de ohm și are simbolul Ω. În practică, după caz, se utilizează frecvent și multiplii: kiloohm (1 kΩ = 10^3Ω) sau megaohm (1 MΩ = 10^6 Ω), precum și submultiplul miliohm (1 mΩ = 10^{-3} Ω).

În anumite modele ale rețelelor electrice este mai comod să se „opereze" cu mărimea $\frac{1}{R}$. Aceasta este tot un parametru de circuit caracteristic conductorilor în stare electrocinetică, denumit *conductanță electrică*; el se notează cu G, se definește prin:

$$G \overset{D}{=} \frac{1}{R} \tag{1-2}$$

și se măsoară, în SI, în siemens cu simbolul S (1 S = 1/Ω = 1 Ω^{-1}).

Experiența arată că parametrul rezistență este, la corpurile omogene, fără t.e.m. proprii (pasive) și nedeformabile, o mărime independentă de i și u, determinată de particularitățile corpului conductor și anume: natura materialului din care este făcut corpul, forma lui geometrică și dimensiunile sale (cu încă o condiție, aceea ca u și i să nu varieze „prea rapid" în timp, adică să nu existe efectul pelicular).

Astfel se constată că un conductor filiform, omogen și pasiv, cu lungimea l și suprafața secțiunii transversale A, are rezistența dată de expresia:

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{A} \quad \text{sau} \quad R = \rho \frac{l}{A}, \tag{1-3}$$

unde $\rho \overset{D}{=} \frac{1}{\gamma}$ este o altă mărime de material care poate descrie local comportarea în cîmpul electric a unui conductor din punctul de vedere electrocinetic. Mărimea aceasta se numește *rezistivitate electrică* și — în sistemul SI — are unitatea de măsură ohmmetrul, cu simbolul Ωm. În practică, atunci cînd se calculează rezistența conductorilor filiformi, este mai comod să se utilizeze pentru rezistivitatea materialului unitatea ohm milimetru la pătrat pe metru, Ωmm²/m (deoarece pentru conductele electrice — cu diametru foarte

mic în raport cu lungimile la care sînt utilizate în instalații — se exprimă suprafața secțiunii în mm², iar lungimea în m). Între aceste două unități de măsură pentru rezistivitatea materialelor există relația:

$$1\ \Omega m = 10^6 \Omega\ mm^2/m.$$

Experiența arată că rezistivitatea (conductivitatea) materialelor conductoare este influențată de numeroase mărimi neelectrice ca: temperatura materialului, deformațiile materialului, structura cristalină a metalelor, impuritățile din material etc.

Astfel, rezistivitatea metalelor și a celor mai multe aliaje conductoare crește cu temperatura T, în timp ce rezistivitatea cărbunelui și a numeroși electroliți descrește cu temperatura. În general, rezistivitatea materialelor conductoare se modifică în funcție de temperatură după o „lege" care poate fi exprimată printr-un polinom de forma:

$$\rho_T = \rho_{T_0}[1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \delta(T - T_0)^3 + \dots],$$

în care: T_0 este temperatura de referință (în kelvin), T — temperatura curentă (tot în kelvin), ρ_{T_0} — rezistivitatea la temperatura de referință, ρ_T — rezistivitatea la temperatura curentă și α, β, δ, ... — coeficienți care depind de natura materialului.

În practică se folosește, de obicei, modelul:

$$\rho_T = \rho_{T_0}[1 + \alpha(T - T_0)]. \qquad (1\text{-}4)$$

În acest caz α are semnificația unui coeficient de variație a rezistivității cu temperatura și se măsoară, în SI, în K^{-1}. El se numește *coeficientul de temperatură al rezistivității.*

Pentru metale $\alpha > 0$, rezistivitatea acestora crescînd cu temperatura. Pentru constantan, cărbune, soluții $\alpha < 0$, rezistivitatea acestora scăzînd cu creșterea temperaturii.

Rezistivitatea materialelor semiconductoare scade cu temperatura după un model exponențial.

Se cunosc, de asemenea, cîteva materiale (metale, aliaje, combinații, semiconductoare) caracterizate prin anularea completă a rezistivității lor, sub o anumită temperatură critică (cuprinsă între 0,1 și 10 K). Acest fenomen se numește supraconductibilitate.

În tabela 1-1 sînt indicate, pentru cîteva materiale, mărimile ρ, γ la temperatura de 20°C și coeficientul lor de temperatură α.

Rezistoare. Rezistorul este un element (component) de circuit electric conceput în scopul de a avea o anumită rezistență R (conductanță G) în vederea realizării unei aplicații tehnice oarecare (încălzire electrică, pornire și reglajul vitezei la unele motoare electrice — v. cap. 6, asigurarea unei anumite repartiții a potențialelor electrice în circuitele electronice, reglaje de tensiuni și curenți electrici în diferite montaje, circuite de măsurare și elemente de „șunt" sau adiționale pentru aparatele de măsurat electrice — v. cap. 5).

Rezistorul — ca element de circuit — este un dipol caracterizat în special prin parametrul rezistență (conductanță), însă datorită modului de realizare tehnică el poate avea și capacitate și inductivitate. În unele aplicații practice concrete (de exemplu, în curent continuu și regim permanent), efectul capacității și inductivității (să le zicem „parazite", adică nedorite dar imposibil de eliminat) sînt nule sau neglijabile. În alte cazuri (mai ales în curent alternativ la frecvențe înalte), efectul capacității și inductivității parazite ale unui rezistor

Tabela 1-1

Materialul	ρ	γ	α
Unitatea de măsură	10^{-8} [Ωm]	10^6 [S/m]	grad $^{-1}$
Alamă	7—8	14,3—12,5	0,002
Aluminiu	2,82	35	0,0039
Antimoniu (Stibiu)	50	2	0,0041
Argint	1,6	62	0,00375
Aur	2,44	41	0,0034
Bismut	120	0,835	0,0037
Bronz	2,1	47,7	0,004
Cărbune pentru lampă electrică cu arc	60—80	17	—0,0002 ... —0,0008
Constantan	50	2	0,00005
Cositor	10	10	0,0042
Cromal	130	0,77	0,00004
Cromnichel	110	0,91	0,00015
Cupru (aramă)	1,75	57	0,004
Fier	10—15	10 — 6,68	0,006
Grafit	39,2	2,55	0,0006
Manganin 84% Cu, 12% Mn, 4% Ni	42	2,38	0,000015
Mercur	95	1,052	0,00089
Nichel	15	6,18	0,0037
Nichelină	42	2,38	0,0002
Nicrom	110	0,91	0,00015
Osmiu	25	4	
Oțel	10—25	10 — 4	0,006
Platină	10	10	0,003
Plumb	22	4,54	0,004
Wolfram	5,6	18	0,0047
Zinc	6,5	15,4	0,0042

nu mai poate fi neglijat. Deoarece nu există o tehnologie de fabricație care să conducă la realizarea de componente — dipol caracterizate exclusiv de parametrul rezistență, se utilizează adesea și denumirile de: rezistor *ideal* (un dipol caracterizat numai prin rezistență/conductanță), *rezistor tehnic* (un component de circuit electric anumit, cu o rezistență dată însă având în „subsidiar" — ca parazite — capacitate și inductivitate, reduse totuși la minimum posibil sau admisibil) și *conductoare perfecte* (dipoli pentru conexiuni, de tipul conductelor electrice, cu rezistență practic nulă).

Rezistoarele mai pot fi: *pasive* (fără tensiune electromotoare proprie) sau nu, și *liniare* (rezistența/conductanța lor nu depinde de curentul electric sau tensiunea la bornele rezistorului), *neliniare* (acesta putînd fi cazul general) sau *liniare pe porțiuni* etc.

Rezistoarele pot fi clasificate după numeroase criterii. Astfel, din punctul de vedere constructiv rezistoarele se clasifică în:

— *rezistoare fixe* a căror rezistență se stabilește la fabricație și rămîne constantă pe întreaga durată de funcționare (ele se reprezintă pe scheme printr-unul din simbolurile grafice generale arătate în figura 1-5);

— *rezistoare variabile* (cu simbolul grafic general indicat în figura 1-6, *a*), în anumite aplicații numite și *reostate* (cu simbolul grafic general prezentat în figura 1-6, *b*), a căror rezistență se poate modifica, în limite stabilite, în timpul funcționării (pentru operații de reglaj — cazul reostatelor, sau numai pentru operații de „acordare" inițiale).

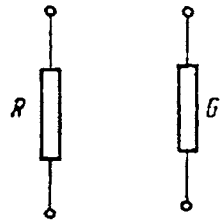


Fig. 1-5

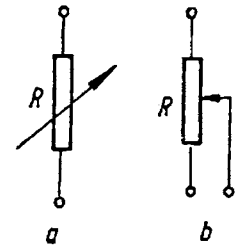


Fig. 1-6

Din punctul de vedere al realizării părții rezistive există trei tipuri de rezistoare:

— rezistoare bobinate (la care partea rezistivă este un conductor metalic de mare rezistivitate bobinat pe un suport izolant — de exemplu ceramic);

— rezistoare peliculare (la care elementul rezistiv este format dintr-o depunere peliculară rezistivă, cu grosime mai mică decît 100 μm, pe un suport izolant);

— rezistoare de volum (cu elementul rezistiv format dintr-un corp „masiv" de diferite forme, de obicei cilindrică sau tubulară). Rezistoarele de acest tip se numesc și rezistoare chimice deoarece ele se execută dintr-un amestec de două sau mai multe faze, dintre care una conductoare (un material chimic inert cum ar fi grafitul sau negrul de fum), după o tehnologie de tip chimic.

Pentru puteri mai mari (în curenți tari), rezistoarele fixe se execută și sub formă masivă (cu diverse „geometrii") din aliaje metalice turnate, din fonte etc.

Rezistoarele fixe sînt caracterizate prin:

— *rezistența nominală* (R_n) și toleranța acesteia (astfel: rezistoarele etalon au toleranța de $\pm 1\%$ sau $\pm 2{,}5\%$, rezistoarele de precizie au toleranța $\pm 2{,}5\%$ și 5%, iar rezistoarele de uz curent au toleranțe de la $\pm 5\%$ la cel mult $\pm 20\%$);

— *puterea de disipație nominală*, ce reprezintă puterea electrică maximă ($R_n I_n^2$) dezvoltată în rezistor fără ca temperatura acestuia să depășească valoarea maximă admisă în regim de funcționare îndelungată;

— *tensiunea nominală* (U_n) a rezistorului se definește ca fiind tensiunea maximă ce se poate aplica la bornele lui în regim de funcționare îndelungată (ea depinde de construcția și dimensiunile rezistorului);

— *intervalul temperaturilor de lucru* este acel interval de temperatură în limitele căruia se asigură funcționarea de lungă durată a rezistorului.

Rezistoarele variabile sînt caracterizate — în funcție de tipul lor constructiv și de aplicație — prin:

— *rezistența inițială* (r_0), definită ca rezistența în poziția inițială a contactului mobil (această valoare, întotdeauna diferită de zero, limitează inferior domeniul de variație al rezistenței);

— *rezistența saltului inițial* (r_s), definită ca variația minimă a rezistenței la deplasarea contactului mobil din poziția inițială și trecerea sa pe porțiunea rezistivă;

— *rezistența de contact* (r_k), adică rezistența dintre contactul mobil și partea fixă (rezistivă);

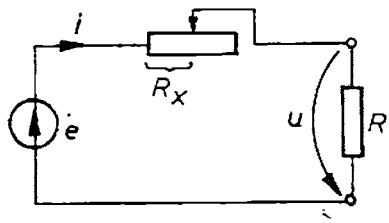


Fig. 1-7

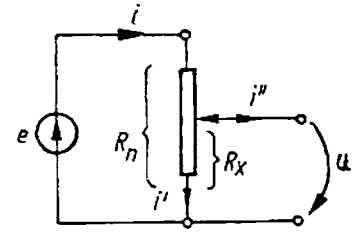


Fig. 1-8

— *rezoluția* sau *precizia reglării* exprimată prin variația minimă posibilă a rezistenței la deplasarea contactului mobil (de exemplu, la un reostat bobinat, rezoluția este rezistența Δr a unei spire a conductorului rezistiv din care s-a „bobinat" reostatul);

— *modul de variație al rezistenței* (liniară cu: $R_x = r_0 + xR_n$, logaritmică cu $R_x = r_0 e^{x \ln R_n/r_0}$, invers logaritmică cu $R_x = r_0 + R_n[1 - e^{x \ln R_n/r_0}]$, în formă de „S" etc., unde: R_n este rezistența nominală maximă a reostatului, R_x — rezistența la o poziție dată a contactului mobil și x — poziția relativă a contactului mobil);

— *puterea necesară acționării* (deplasării) contactului mobil etc.

Rezistoarele variabile pot fi: bobinate, peliculare și de volum sau chimice. Contactul mobil (la reostate numit și cursor) se execută în diverse moduri ca: lamelă, perie (fascicul de lamele) sau plot, din bronz fosforos, alamă sau oțel, „apăsat" pe partea fixă printr-un arc spiral sau lamelar, cu legare la borna de ieșire a cursorului prin tresă de cupru elastică sau prin glisiere.

Din punctul de vedere constructiv, rezistoarele variabile pot fi de formă rectilinie sau circulare, după cum se deplasează cursorul pe partea fixă. Ele mai pot fi: simple, duble (cu două părți fixe și două cursoare, acționate simultan nu independent) etc. Cele circulare mai pot fi și helicoidale, cu deplasarea în spirală (helicoidal) a cursorului, cu un unghi de rotație de $(2 \div 10) \cdot 2\pi$.

În montaje, rezistoarele variabile se pot conecta, în principiu, în două moduri: *reostatic* (fig. 1-7) și *potențiometric* (fig. 1-8). În aceste figuri u este tensiunea la bornele unui receptor (cu rezistența R) ce trebuie reglată.

În cazul conexiunii reostatice se face un reglaj să zicem serie sau „prin curent", deoarece: $u = e - R_x i = e - R_x \cdot \frac{e}{R_x + R} = e\left(1 - \frac{R_x}{R_x + R}\right)$. În cazul conexiunii potențiometrice se face un reglaj de tip paralel sau „prin tensiune" deoarece (dacă $i'' \ll i$): $u = R_x i' \approx R_x i = R_x \cdot \frac{e}{R_n} = e\frac{R_x}{R_n}$.

Există și alte variante de conectare a rezistoarelor variabile (fig. 1-9), ca de exemplu: reostat cu scurtcircuitare (fig. 1-9, *a*), reostat dublu (fig. 1-9, *b*), potențiometru cu contact fix median (fig. 1-9, *c*), în acest din urmă caz tensiunea u reglată variind de la $-U_1$ la $+U_2$ (U_1 și U_2 fiind două valori constante).

Rezistoare neliniare. Rezistoarele a căror rezistență (R) sau conductanță (G) depinde de tensiunea la bornele rezistorului (u) sau de curentul (i) din rezistor formează ceea ce numim *elemente de circuit electric neliniare*. La aceste elemente, rapoartele u/i și i/u nu mai sînt constante; de aceea ele nu mai pot fi caracterizate printr-o singură valoare a parametrilor R sau G.

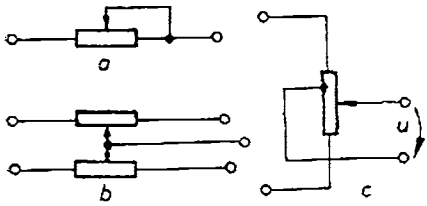


Fig. 1-9

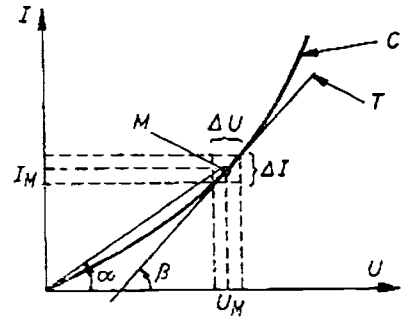


Fig. 1-10

Ca urmare, pentru dispozitivele neliniare se determină experimental (printr-un „tabel" cu un număr suficient de perechi de valori) corelația (u, i): $u \to i$ într-un interval în care urmează să „lucreze" dispozitivul. Pe baza acestui tabel cu valori (u, i) se poate determina analitic un model al rezistorului neliniar sub forma unei funcții f: $u \to i$ (de obicei un polinom) sau se poate trasa un grafic tensiune-curent, care să reprezinte valorile $i = f(u)$, cunoscut sub numele de *caracteristica tensiune-curent* sau „volt-amper" (fig. 1-10).

Deoarece la rezistoarele neliniare $R = R(i)$ sau $R = R(u)$ și $G = G(i)$ sau $G = G(u)$, iar $\frac{di}{du} \neq 0$, atunci pentru calculul circuitelor neliniare se introduc următoarele mărimi (v. fig. 1-10), ca parametri de circuit pentru rezistoarele neliniare:

— *rezistența statică* (sau „în curent continuu") R:

$$R(M) = \frac{U_M}{I_M} \triangleq \operatorname{ctg} \alpha(M), \quad M \in C$$

și

— *rezistența dinamică* r:

$$r(M) = \left.\frac{\Delta U}{\Delta I}\right|_M \triangleq \operatorname{ctg} \beta(M), \quad M \in C$$

parametri care sînt funcții de punctul M aparținînd caracteristicii $C: U \to I$ (v. fig. 1-10). Observăm că R este întotdeauna pozitivă, în timp ce r poate fi și negativă (dacă $\exists\, M \in C$ pentru care $dI/dU = 0$, așa cum este caracteristica diodei tunel — v. „Fizica"). Este evident că R și r se măsoară în ohm Ω (în SI).

Comportarea rezistoarelor la frecvențe mari. Experiența arată că în regim electrocinetic nestaționar, în curent alternativ la frecvențe „ridicate", rezistența conductorilor crește cu frecvența datorită unui fenomen natural cunoscut de la „Fizică" sub numele de efect pelicular (Peltier) asupra căruia vom reveni în capitolul 4.

Inductivități (proprii și mutuale)

Inductivitatea (inductanța) este un parametru de circuit ce exprimă posibilitatea circuitelor, aflate în regim electrocinetic (sub un curent i), de a produce flux magnetic prin anumite suprafețe înlănțuite de conductoarele circuitelor sau de componente ale acestor circuite.

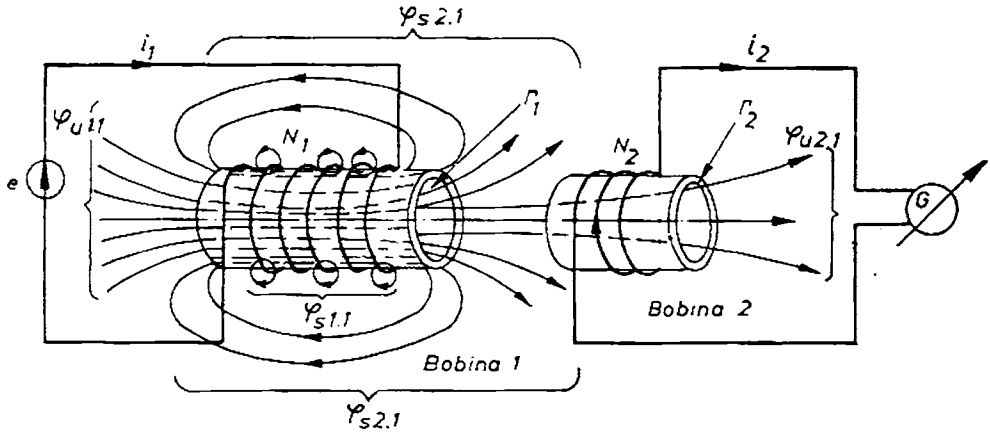


Fig. 1-11

Elementul de circuit destinat realizării unei anumite inductivități este bobina, alcătuită dintr-un anumit număr de spire din conducte filiforme izolate, înfășurate pe un suport (carcasă) confecționat dintr-un material izolant și plasat pe un „micz" magnetic care are rolul de a „concentra" fluxul magnetic.

Pentru definirea inductivității, să considerăm două bobine cu N_1 și N_2 spire, pentru care alegem două contururi Γ_1 și respectiv Γ_2, care să înlănțuie toate liniile de cîmp ale unei bobine, așa ca în figura 1-11.

În circuitul bobinei *1* se stabilește, din „exterior", curentul i_1. Datorită efectului magnetic al curentului i_1 se produce un cîmp magnetic, reprezentat în figură prin liniile de cîmp și caracterizat de inducția magnetică B_{11}. În continuare vom utiliza notațiile (v. fig. 1-11):

φ_{u11} — fluxul fascicular util produs de bobina *1* care trece prin conturul Γ_1;

φ_{s11} — fluxul de scăpări produs de bobina *1* care nu parcurge toate spirele bobinei *1**;

φ_{u21} — fluxul fascicular (util) produs de bobiana *2* care trece prin conturul Γ_2;

φ_{s21} — fluxul de scăpări produs de bobina *1* care nu parcurge toate spirele bobinei *2*.

Se observă, cu ușurință (prin definiții și din figura 1-11) că:

$$\varphi_{s11} + \varphi_{u11} = \varphi_{u21} + \varphi_{s21}.$$

Cu acestea, se pot calcula:

Φ_{u11} — fluxul util total al bobinei *1* produs de aceasta:

$$\Phi_{u11} = N_1 \cdot \varphi_{u11};$$

Φ_{u21} — fluxul util total al bobinei *2*, produs de bobina *1*:

$$\Phi_{u21} = N_2 \cdot \varphi_{u21};$$

---

* Ne reamintim de la „Fizică" că fluxul magnetic φ este fluxul vectorului inducție magnetică: $\varphi = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A}$, care în SI se măsoară în weber cu simbolul Wb. Asupra lui vom reveni în capitolul 4.

Φ_{s21} — fluxul de scăpări total al bobinei *2* produs de bobina *1* : $\Phi_{s21} = N_1 \cdot \varphi_{s21}$.

Raportînd aceste fluxuri totale la curentul care le-a produs, i_1, se pot defini următorii parametri:

— inductivitatea proprie a bobinei *1* (autoinductanța):

$$L_{11} \overset{D}{=} \frac{\Phi_{u11}}{i_1} = N_1 \cdot \frac{\varphi_{u11}}{i_1}; \tag{1-5}$$

— inductivitatea mutuală a bobinei *1* în raport cu bobina *2*:

$$L_{21} \overset{D}{=} \frac{\Phi_{u21}}{i_1} = N_2 \cdot \frac{\varphi_{u21}}{i_1}; \tag{1-6}$$

— inductivitatea de scăpări a bobinei *1* față de bobina *2*:

$$L_{s21} \overset{D}{=} \frac{\Phi_{s21}}{i_1} = N_1 \cdot \frac{\varphi_{s21}}{i_1}. \tag{1-7}$$

Dacă $\varphi_{s11} = 0$, rezultă $\varphi_{s21} = \varphi_{u11} - \varphi_{u21}$ și:

$$L_{s21} = \frac{N_1}{i_1}(\varphi_{u11} - \varphi_{u21}) = N_1 \cdot \frac{\varphi_{u11}}{i_1} - N_2 \frac{\varphi_{u21}}{i_1} \cdot \frac{N_1}{N_2}$$

adică:

$$L_{s21} = L_{11} - \frac{N_1}{N_2} L_{21}. \tag{1-8}$$

În mod analog, se pot defini:

— inductivitatea proprie a bobinei *2*;

$$L_{22} = \frac{\Phi_{u22}}{i_2} = N_2 \cdot \frac{\varphi_{u22}}{i_2};$$

— inductivitatea mutuală a bobinei *2* în raport cu *1*:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{u12}}{i_2} = N_1 \cdot \frac{\varphi_{u12}}{i_2};$$

— inductivitatea de dispersie a bobinei *2* în raport cu *1*:

$$L_{s12} = \frac{\Phi_{s12}}{i_2} = N_2 \cdot \frac{\varphi_{s12}}{i_2}.$$

Experiența arată că inductivitatea proprie depinde de natura materialului magnetic, de dimensiunile, forma și numărul de spire al bobinei, iar inductivitatea mutuală depinde, în plus, și de poziția relativă a bobinelor.

Datorită reciprocității $L_{12} = L_{21}$ și de aceea se introduce notația:

$$L_{12} = L_{21} = M. \tag{1-9}$$

Într-un caz particular, acela al cuplajului magnetic perfect (ideal) fluxurile de dispersie sînt nule și atunci:

$$\Phi_{u11} = \Phi_{u21} = \Phi_1; \quad \Phi_{u22} = \Phi_{u12} = \Phi_2$$

$$M^2 = L_{12} \cdot L_{21} = N_1 \cdot \frac{\Phi_{u12}}{i_2} \times N_2 \cdot \frac{\Phi_{u21}}{i_1} =$$

$$= N_1 \cdot \frac{\Phi_{u22}}{i_2} \cdot N_2 \cdot \frac{\Phi_{u11}}{i_1} = N_1 \cdot \frac{\Phi_{u11}}{i_1} \times N_2 \cdot \frac{\Phi_{u22}}{i_2} = L_{11} L_{22},$$

adică:

$$M = \sqrt{L_{11} L_{22}}. \tag{1-10}$$

În realitate nu există cuplaj magnetic perfect și deci întotdeauna $M^2 < L_{11} \cdot L_{22}$, ceea ce justifică scrierea:

$$M = k \sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}, \tag{1-11}$$

în care k este așa-numitul *coeficient de cuplaj*; $k \in (0,1)$.

Dacă nu se specifică în mod expres o bobină, prin indicatorii *1*, *2*,... și se vorbește despre inductivitatea proprie a unei bobine în general, se poate folosi pentru acest parametru numai litera L (fără indici) care reprezintă $L = \Phi/i$ (i — curentul din bobină, Φ — fluxul util total al acelei bobine datorit lui i).

În sistemul internațional, unitatea de măsură pentru inductivități este henry cu simbolul H.

Bobina electrică este un element (component) de circuit electric constituită dintr-un sistem de spire în serie (care „îmbrățișează" practic același circuit magnetic — v. cap. 4) și destinată fie să producă o anumită tensiune magnetomotoare (v. cap. 4) — cînd spirele sînt „parcurse" de curent electric (cazul bobinelor inductoare sau de excitație), fie pentru a fi „sediul" unei tensiuni electromotoare induse — cînd circuitul magnetic al bobinei este „străbătut" de flux magnetic variabil în timp (cazul bobinelor induse), fie pentru a crea într-un anumit loc dintr-un circuit electric o anumită inductivitate sau reactanță (v. cap. 2) — cazul circuitelor electronice, circuitelor electrice de măsurare (punți electrice în curent alternativ — v. cap. 5) etc.

Bobinele electrice pot constitui aparate electrice autonome (ca, de exemplu: bobina de inductanță, bobina de reactanță, bobine etalon, bobină de șoc etc.) sau pot intra în componența transformatoarelor și mașinilor electrice (v. cap. 6), a aparatelor electrice ș.a.m.d.

Din punctul de vedere al electrocineticii, bobinele sînt caracterizate de parametrul de circuit inductivitate (L sau/și M). O bobină — ca element de circuit — se numește *bobină perfectă* dacă ea nu are (în afară de inductivități) și alt parametru (rezistență și capacitate) precum și pierderi de energie electrică (acesta fiind un caz ideal) sau *bobină tehnică* cînd are, în afară de inductivități, și alți parametri de circuit (în subsidiar) precum și pierderi de energie electrică (cazul real).

Din punct de vedere constructiv și funcțional, bobinele pot fi: *bobine fixe* — pentru care inductivitatea L este constantă în tot timpul funcționării (ele se reprezintă pe scheme așa ca în figura 1-12, *a*) și *bobine variabile* — pentru care variația inductivității este funcțional necesară (pe scheme, bobinele variabile se reprezintă așa ca în figura 1-12, *b*).

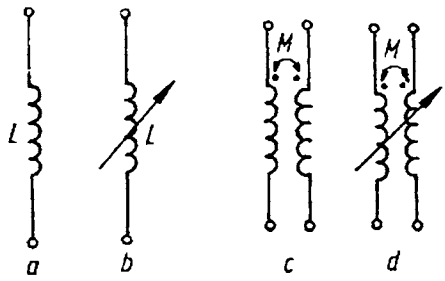


Fig. 1-12

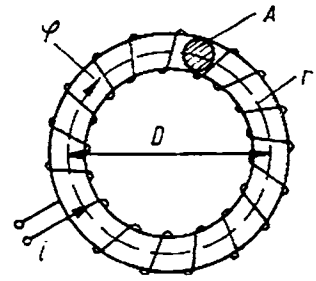


Fig. 1-13

Bobinele cuplate (caracterizate și prin inductivitatea mutuală M) se reprezintă pe scheme așa ca în figura 1-12 (c — cu cuplaj fix, d — cu cuplaj variabil). În schemele din figura 1-12 punctele cu care se „marchează" una din cele două borne ale bobinei sînt un mod convențional de asociere a sensurilor de referință ale curentului și tensiunii cu sensul de înfășurare (bobinare) a spirelor. Astfel, dacă în prima bobină sensul curentului este de la borna polarizată către cea nepolarizată, atunci în cea de-a doua bobină se induce o t.e.m (în regim electrocinetic nestaționar) cu sensul de referință tot de la borna polarizată către cea nepolarizată și viceversa.

Un element important, mai ales în proiectare, este calculul inductivității unei bobine. Definită prin (1—5), adică $L \overset{D}{=} \Phi/i$, inductivitatea se constată că depinde de: pătratul numărului de spire N, permeabilitatea μ a materialului din care este confecționat miezul bobinei, forma și dimensiunile bobinei și miezului, fluxul de scăpări etc. Calculul se face în funcție de situația concretă și reală a unei bobine date.

Cu titlu de exercițiu, vom considera un exemplu de calcul mai simplu și într-un caz ideal. Să calculăm inductivitatea proprie a unei bobine realizată pe un miez toroidal, ca în figura 1—13, considerînd cazul ideal în care nu există flux de scăpări. Se cunosc: numărul N de spire al bobinei, diametrul mediu D al miezului toroidal, permeabilitatea absolută a miezului (μ) și aria secțiunii transversale a miezului (A). Atunci, conform (1—5):

$$L \overset{D}{=} \frac{\Phi}{i} = N \cdot \frac{\varphi}{i}$$

unde fluxul magnetic util se calculează cu:

$$\varphi \overset{D}{=} \int_{\Sigma_A} \bar{B} \cdot d\bar{A} = \int_{\Sigma_A} B \, dA = B \int_{\Sigma_A} dA = B \cdot A.$$

Din legea magnetizării temporare (v. cap. 4) rezultă aici $B = \mu H$, unde intensitatea cîmpului magnetic H se determină aplicînd legea circuitului magnetic (v. cap. 4): $\int_{\Gamma} = \bar{H} \cdot d\bar{l}$, care în cazul particular din figura 1-13 devine: $Hl = Ni$, astfel că: $H = \frac{Ni}{l} = \frac{Ni}{\pi D}$, $B = \mu \frac{Ni}{\pi D}$ și $\varphi = \mu \frac{Ni}{\pi D} A$, adică în final:

$$L = \frac{N}{i} \cdot \mu \cdot \frac{Ni}{\pi D} A = \mu \cdot \frac{N^2 A}{\pi D} \cdot$$

Capacitatea electrică

Capacitatea electrică (denumită, uneori, și capacitanță) este un parametru de circuit care exprimă posibilitățile conductoarelor izolate între ele de a se încărca cu sarcini electrice atunci cînd se găsesc „sub tensiune".

Elementul de circuit conceput să aibă, ca parametru principal, capacitatea este **condensatorul electric** (denumit, uneori și capacitor).

Sistemul de doi conductori separați printr-un mediu izolant, de configurație geometrică adecvată condiției ca toate liniile de cîmp care „pleacă" de pe unul din conductori să se „termine" pe celălalt, formează un *condensator electric*. Cei doi conductori se numesc *armăturile* condensatorului, iar mediul izolant — *dielectricul* condensatorului.

Capacitatea electrică se definește prin raportul C dintre sarcina electrică q_1 a unei armături de condensator (*1* în figura 1-14) și tensiunea electrică corespunzătoare u_{12} (față de cealaltă armătură — *2* în figura 1-14): $C = q_1/u_{12}$. Acest cît este independent de armătura la care se referă, deoarece la un condensator $q_1 + q_2 = 0$, dar depinde în anumite cazuri de regimul de lucru al condensatorului. Pentru că $q_1 + q_2 = 0$ și $q_1 = -q_2$, rezultă că $|q_1| = |q_2| = q$, iar deoarece $u_{12} = -u_{21}$ și $|u_{12}| = |u_{21}| = u$, atunci putem defini — în general — capacitatea electrică C prin:

$$C \stackrel{D}{=} \frac{q}{u}, \qquad (1\text{-}12)$$

unde q este sarcina electrică de pe una din armăturile condensatorului, iar u este tensiunea electrică dintre cele două armături corespunzătoare sarcinii q.

Capacitatea electrostatică a unui condensator (pe scurt — capacitatea condensatorului) este mărimea definită ca în (1-12) însă în regim electrostatic (în care tensiunea este egală cu diferența de potențial: $u_{12} = V_1 - V_2$).

În SI, capacitatea (capacitanța) se măsoară în farazi cu simbolul F; frecvent se utilizează submultiplii: microfarad μF, nanofarad nF sau chiar picofarad pF, datorită valorilor uzuale mici (în farazi) ale acestui parametru. Desigur că relațiile între aceste unități sînt știute ($1\ \mu F = 10^{-6} F$, $1\ nF = 10^{-9} F$ și $1\ pF = 10^{-12} F$).

Dacă dielectricul condensatorului este liniar — adică dacă are permitivitatea absolută (v. „Fizică") $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ (unde ε_0 — permitivitatea vidului și ε_r — permitivitatea relativă) independentă de intensitatea locală a cîmpului electric și nu are polarizație electrică permanentă — capacitatea electrostatică e pozitivă și nu depinde de tensiune sau de sarcina electrică a condensatorului; spunem că această capacitate cu $C \neq f(u)$ sau $C \neq f(q)$ că este *liniară* (iar despre condensator că e un condensator liniar).

Practic, însă, permitivitatea dielectricului poate depinde de loc (de punct), la materialele izolante neomogene, și de condițiile fizice neelectrice locale (de exemplu: de temperatură, de umiditate ș.a.). *Capacitatea condensatorului liniar* este deci o mărime caracteristică acestuia (ca dispozitiv fizic concret dat), ce nu depinde de starea lui electrică (de exemplu de u sau q etc.), ci numai de configurația lui geometrică (formă și dimensiuni), de natura dielectricului, dar și de temperatură, umiditate etc.

La un condensator liniar ideal (la care nu intervine influența factorilor fizici externi, ca temperatură și umiditate), capacitatea condensatorului este proporțională cu suprafața armăturilor, cu permitivitatea absolută a dielectricului și cu inversul distanței dintre armături, expresia care reunește însă aceste

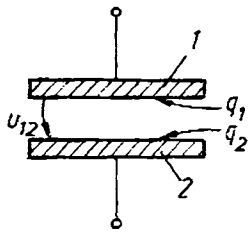


Fig. 1-14

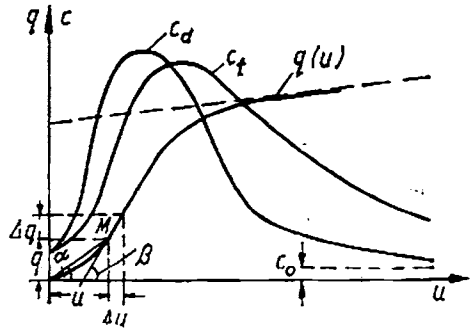


Fig. 1-15

mărimi depinzînd (ca model matematic) de forma condensatorului (plan, cilindric, sferic etc.).

Dacă dielectricul condensatorului nu este liniar, adică dacă permitivitatea depinde de intensitatea locală și momentană (nu există polarizație temporară — v. „Fizica"), dependența $q = q(u)$ dintre sarcina electrică și tensiunea condensatorului este de asemenea neliniară (putînd fi — adesea — de forma din figura 1—15). În acest caz se pot defini mai multe capacități, care depind de punctul de funcționare M al condensatorului, și se numesc *capacități neliniare:* statică, diferențială, dinamică etc.

Capacitatea statică (C_t) a unui condensator neliniar se definește prin raportul:

$$C_t = q/u = k \operatorname{tg} \alpha$$

și depinde de tensiunea aplicată la bornele condensatorului, adică $C_t = f_t(u)$, unde k este raportul (în unități de capacitate) al scărilor folosite pentru trasarea curbei $q(u)$ — v. fig. 1-15 și e o funcție de tensiunea aplicată *.

Capacitatea diferențială (C_d) a unui condensator neliniar este definită prin (v. fig. 1-15): $C_d = \lim_{\Delta u \to 0} \Delta q/\Delta u = k \operatorname{tg} \beta$ și este, de asemenea, o funcție de tensiunea aplicată $C_d = f_d(u)$ — adică depinde de „punctul de funcționare" de pe caracteristica $q(u)$.

Capacitatea dinamică (C_{din}) a unui condensator neliniar reprezintă raportul dintre amplitudinea Δq_a a variației sarcinii electrice și amplitudinea corespunzătoare Δu_a a variației tensiunii, la alimentarea cu o tensiune variabilă în timp, alternativă, dar care are o componentă continuă u_0 (ce corespunde punctului mediu de funcționare) și o componentă periodică sinusoidală:

$$C_{din} = \Delta q_a/\Delta u_a.$$

care depinde de asemenea de punctul de funcționare, de amplitudinea componentei alternative și de frecvența ei, adică $C_{din} = f(u_0, \Delta u_a, f)$.

În practică se utilizează și noțiunea de capacitate proprie a unui conductor (notată adesea cu C_p). Este vorba de capacitatea condensatorului format de către conductorul considerat și de toate celelalte conductoare din cîmp, inclusiv „pămîntul" (sau „suprafața conductoare de la infinit" care le cuprinde) presupuse conectate între ele, adică la același potențial considerat ca potențial de referință (de valoare nulă): $C = q/V$, unde q este sarcina electrică a conductorului și V — potențialul conductorului.

* La un condensator liniar capacitatea statică coincide cu capacitatea electrostatică.

Astfel, capacitatea proprie a unei sfere „izolată", cu diametrul d, este:

$$C_{sfera} = 4\pi\varepsilon d,$$

iar capacitatea proprie a unui conductor cilindric rectiliniu „izolat", avînd diametrul d și lungimea l, cu condiția $d << l$ (adică cu d neglijabil în raport cu l), deci „filiform", este:

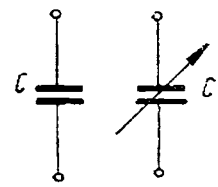
$$C_{fir} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{2l}{d}}.$$

Condensatoare electrice. Așa cum au fost definite la începutul acestui paragraf, condensatoarele electrice (capacitoarele) au numeroase aplicații practice (în electronică și telecomunicații, în electroenergetică, în instalațiile electrice de uz general și industriale ș.a.) astfel încît în prezent există o mare diversitate de condensatoare, atît sub aspect constructiv, cît și funcțional. Astfel, condensatoarele pot fi realizate ca aparate electrice autonome (de exemplu „bateriile" de condensatoare pentru îmbunătățirea factorului de putere la utilizatorii industriali de energie electrică) sau ca simple „piese" ce intră în componența aparatelor electrice și electronice.

Din punctul de vedere constructiv condensatoarele pot fi: *condensatoare fixe*, a căror capacitate se stabilește la fabricație și rămîne constantă pe întreaga durată de funcționare (pe scheme, ele se reprezintă așa ca în figura 1-16, *a*) și *condensatoare variabile*, a căror capacitate se poate modifica — în limite stabilite — în timpul funcționării (se reprezintă, în scheme, prin simbolul general din figura 1-16, *b*) sau numai la începutul executării unui montaj (pentru reglaj inițial).

Din punctul de vedere al dielectricului utilizat, condensatoarele se clasifică în: condensatoare cu dielectric gazos (de exemplu, cu aer, cu vid, cu azot sub presiune la 20 at sau rarefiat etc.); condensatoare cu dielectric lichid (cu ulei); condensatoare cu dielectric anorganic solid (de exemplu cu: mică, ceramică, sticlă, pelicule din oxizi ai metalelor — cum este cazul așa-numitelor condensatoare electrolitice etc.); condensatoare cu dielectric organic solid (hîrtie, pelicule plastice etc.) și condensatoare cu dielectric „mixt" (combinații diverse ca: material sintetic termoplastic polar cu hîrtie, mică cu materiale ceramice, hîrtie — cunoscută chiar sub numele de „hîrtie de condensator" — cu ulei ș.a.).

Condensatoarele cu vid sau cu gaz comprimat se folosesc în montajele de înaltă tensiune (cele cu vid pînă la cca. 50 kV) și de frecvențe radio, deoarece au o rigiditate dielectrică foarte mare (v. „Fizica") și pierderi în dielectric mici. Condensatoarele cu ulei, care au capacitate specifică mai mare (caracteristică ce va fi precizată mai jos) și tensiune de străpungere mare se folosesc în instalațiile electroenergetice, la 50 Hz și tensiuni de lucru pînă la 100 kV. Condensatoarele electrolitice se folosesc în special în montajele de filtraj ale redresoarelor cu tensiuni pînă la cel mult 1000 V valoare maximă, precum și în instalațiile electroterapeutice (pentru că au capacitate specifică mare). Condensatoarele cu hîrtie, mai ieftine, se folosesc în circuitele de joasă frecvență, în special în aplicațiile de tip industrial.



a b
Fig. 1-16

Principalele caracteristici (de normare) ale condensatoarelor sînt de natură electrică și tehnologică.

Caracteristicile electrice ale condensatoarelor sînt:

— capacitatea electrică nominală (C_n) la condensatoarele fixe și limitele $C_0 \div C_n$ între care poate fi reglată capacitatea unui condensator variabil;

— toleranța capacității la condensatoarele fixe ($\pm 2\%$ pentru clasa 0, $\pm 5\%$ pentru clasa I; $\pm 10\%$ pentru clasa II și $\pm 20\%$ pentru clasa III);

— tensiunea de străpungere (U_s) este acea valoare a tensiunii aplicată pe armături peste care există posibilitatea străpungerii dielectricului, adică „clacarea" condensatorului (ea depinde de: natura izolantului prin rigiditatea lui dielectrică; condițiile de fabricație, de păstrare și de utilizare; factori externi ca temperatură, umiditate și presiune, grosimea izolantului, de frecvență f etc.);

— pierderile de putere în regim periodic permanent (adică puterea activă P absorbită de condensator — v. cap. 2). Din punctul de vedere al pierderilor, calitatea condensatorului se apreciază prin „tangenta de delta" definită prin: $\operatorname{tg} \delta = P/Q$, unde P este puterea activă — de pierderi — a condensatorului și Q este puterea lui reactivă $\frac{1}{C_n \omega} I^2$ (ω — pulsația în $< s^{-1} >$ și I — valoarea eficace a curentului alternativ sinusoidal de sarcină).

Principalele *caracteristici tehnologice* ale condensatoarelor sînt: tensiunea nominală (de lucru) continuă U_c; coeficientul de siguranță (dat de raportul U_s/U_c); tensiunea nominală (de lucru) alternativă (valoarea eficace U_a); temperatura maximă de lucru (la condensatoarele cu dielectric lichid și temperatura minimă); poziția de funcționare (la anumite condensatoare: variabile, cu dielectric lichid etc.); capacitatea specifică (este cîtul dintre capacitatea electrică nominală și volumul condensatorului, în $< F/cm^3 >$).

1.1.3. Regimurile de funcționare ale circuitelor electrice

Știm de la „Fizică" faptul că orice stare în care corpurile pot exercita unele asupra altora forțe de natura celor produse de corpurile electrizate prin frecare este *o stare de electrizare*. Ea este descrisă global de sarcina electrică q a corpului (măsurată în coulomb, cu simbolul C) și local de densitatea de volum a sarcinii q_v (măsurată în C/m^3) sau de densitatea de suprafață a sarcinii electrice q_A (măsurată în C/m^3):

$$q_v = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv},$$

$$q_A = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{dq}{dA}.$$

În funcție de modul cum pot varia în timp aceste mărimi, fenomenele produse în cîmp electric pot fi electrostatice sau electrocinetice.

Starea electrostatică este caracterizată printr-o repartiție a sarcinilor electrice pe conductori constantă în timp: $\frac{dq_v}{dt} = 0$; $\frac{dq_A}{dt} = 0$; $\frac{dq}{dt} = 0$ și prin absența degajării de căldură.

Starea electrocinetică este caracterizată prin efecte termice (degajare de căldură) în conductorii de prima specie, efecte chimice (reacții chimice) în conductorii de specia a II-a, precum și de alte fenomene.

Dacă în conductor se produce o modificare în timp a densității de sarcină electrică $\left(\frac{dq}{dt} \neq 0\right)$ atunci *starea electrocinetică* este *nestaționară.*

Dacă repartiția sarcinilor electrice în conductor este constantă în timp, *starea electrocinetică* este *staționară.* În acest caz, mărimile care descriu starea electrocinetică au valori constante în timp. De aceea, ea se mai numește stare de „curent continuu".

La „Fizică" am mai constatat experimental că, în afara interacțiunilor electrice, există un tip calitativ deosebit de interacțiuni — denumite magnetice și care sînt strîns legate de cele electrice. Acestui tip de interacțiuni magnetice îi corespunde un cîmp specific numit cîmp magnetic (v. cap. 4). Cîmpul magnetic apare în prezența corpurilor electrizate în mișcare și a corpurilor aflate în stare electrocinetică sau în *stare de magnetizare* (v. „Fizica"). Cîmpul magnetic produce acțiuni ponderomotoare asupra corpurilor aflate în una din aceste stări. Cîmpul magnetic poate fi analizat independent de cel electric numai în regim staționar; în regim nestaționar, cîmpul electric și cîmpul magnetic apar inseparabil ca niște componente ale unui cîmp unic — *cîmpul electromagnetic.*

Tot la „Fizică" am stabilit prin experiență că, în afara stărilor de electrizare și de magnetizare, mai există o stare a corpurilor (ireductibilă la cele precedente) în care acestea interacționează cu cîmpul electromagnetic. Această stare, pe care o numim stare electrocinetică, este caracteristică corpurilor conductoare și se manifestă prin așa-numitele *efecte electrocinetice* și anume: mecanice (apar acțiuni ponderomotoare suplimentare față de cele datorate stării de electrizare sau de magnetizare), magnetice (starea electrocinetică este asociată unui cîmp magnetic), electrice (starea electrocinetică nestaționară creează un cîmp electric), chimice, termice, luminoase și fiziologice. După cum știm de la „Fizică", unele din aceste efecte însoțesc întotdeauna starea electrocinetică (cum sînt cele mecanice și magnetice), iar altele sînt condiționate de anumite proprietăți ale corpurilor (în special de material) și de regimul de desfășurare al fenomenelor. Starea electrocinetică (mai precis efectele acestei stări) poate fi descrisă (caracterizată) total printr-o singură mărime primitivă; aceasta este *intensitatea curentului electric de conducție*, notată cu i. (v. § 1.2).

În general, starea electrocinetică reprezintă *regimul de lucru al circuitelor electrice*, considerate ca „lanțuri de conductoare" închise. După „forma" funcțiilor care exprimă valorile instantanee ale tensiunilor și intensităților curenților în raport cu timpul, regimurile de funcționare ale circuitelor electrice pot fi:

— *regimul de curent continuu* în care intensitățile curenților, tensiunile și potențialele electrice sînt toate constante în timp;

— *regimul periodic* în care intensitățile curenților, tensiunile și potențialele electrice sînt reprezentabile prin funcții periodice de timp (v. cap. 2), cu cazul particular (dar foarte răspîndit în practică) al *regimului sinusoidal*;

— *regimul variabil* în care intensitățile curenților, tensiunile și potențialele electrice sînt funcții oarecare de timp*.

---

* Regimurile variabile (cu durată relativ redusă) prin care se face trecerea de la unele regimuri de curent continuu sau regimuri periodice la alte regimuri de curent continuu sau periodice se numesc *regimuri tranzitorii* (v. cap. 3).

1.2. ANALIZA REGIMURILOR DE CURENT CONTINUU

1.2.1. Mărimi electrice de circuit

Studiul circuitelor electrice liniare de curent continuu se face prin intermediul unor mărimi ca: intensitatea curentului electric de conducție, densitatea curentului electric de conducție, tensiunea electromotoare și tensiunea electrică, pe care aici le vom numi mărimi electrice de circuit.

Intensitatea curentului electric de conducție

Starea electrocinetică a corpurilor poate fi descrisă cantitativ și global (la nivelul întregului corp) prin efectele electrocinetice pentru care este suficientă introducerea unei singure mărimi primitive și anume a mărimii scalare cu numele intensitatea curentului electric de conducție, notată cu i (v. „Fizica"), căreia ne vom permite să-i spunem cîteodată, pentru prescurtare, numai curent electric (sau chiar curent).

Pentru introducerea acestei mărimi, putem utiliza efectele mecanice ce se produc asupra unui sistem fizic idealizat: *conductorul filiform* aflat în stare electrocinetică. (Ne reamintim că despre un conductor zicem că este filiform dacă dimensiunile secțiunii sale transversale sînt neglijabile în raport cu lungimea lui.) Pentru aceasta, considerăm o porțiune rectilinie cu lungimea l dintr-un conductor filiform, în care s-a stabilit un curent electric i și care este plasat într-un cîmp magnetic omogen, în vid, cu inducția magnetică $\bar{B}_v$ (fig. 1-17). Vom constata (experimental) că efectul mecanic se manifestă printr-o forță $\bar{F}$ care se exercită asupra porțiunii de conductor considerată și care este proporțională cu lungimea l, cu inducția magnetică $\bar{B}_v$ și cu sinusul unghiului α între direcțiile lui $\bar{B}_v$ și conductorului, factorul de proporționalitate fiind o „măsură" a stării electrocinetice. Direcția forței $\bar{F}$ este perpendiculară pe direcția lui $\bar{B}_v$ și pe direcția conductorului și are un sens care depinde de polaritatea stării electrocinetice. Expresia acestei forțe este, deci, dată de formula lui Laplace (cunoscută de la „Fizică"), adică:

$$\bar{F} = i(\bar{l} \times \bar{B}_v) \tag{1-13}$$

unde „factorul" i reprezintă mărimea primitivă pentru starea electrocinetică denumită *intensitatea curentului electric de conducție*. Să remarcăm faptul că $\bar{l}$ (v. fig. 1-17) este *lungimea orientată a conductorului*, al cărui sens — ales

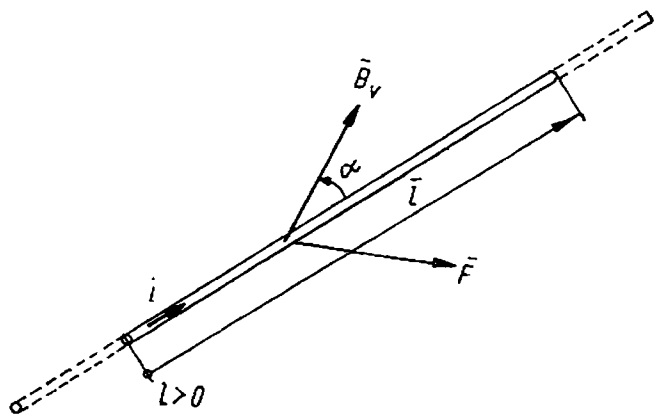


Fig. 1-17

arbitrar — reprezintă așa-numitul *sens de referință al curentului* (asupra căruia vom reveni).

Această mărime primitivă i, de stare electrocinetică a corpurilor, poate fi introdusă și prin alte efecte electrocinetice (chimice, magnetice, termice sau electrice). Astfel, referindu-ne la efectul electric și apelînd la o interpretare intuitivă microscopică (cunoscută de la „Fizică"), putem considera că în regimul electrocinetic al conductorilor, prin suprafața unei secțiuni a acestuia, trece într-un sens un număr de particule elementare libere cu sarcină electrică de un nume, iar în celălalt sens trec particule cu sarcina de nume contrar. Atunci, intensitatea curentului electric de conducție i este limita raportului dintre suma algebrică a sarcinilor electrice ale particulelor libere care străbat secțiunea conductorului și durata intervalului de timp considerat, cînd această limită tinde către zero, adică:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_m}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q_m}{\mathrm{d}t} \tag{1-14}$$

unde q_m este sarcina electrică „microscopică" (a particulelor libere) și t — timpul. Și din (1—14) reiese că mărimea i poate rezulta pozitivă sau negativă, după sensul în care se mișcă particulele cu sarcină pozitivă și în funcție de sensul arbitrar ales față de secțiunea considerată (adică particulele trec „de la stînga la dreapta" prin secțiune sau invers). Rezultă că trebuie să alegem arbitrar un *sens de referință al curentului* (indicat pe scheme printr-o săgeată), așa cum am făcut prin $\bar{l}$ în figura 1-17 și în relația (1-13). Cînd sensul lui i coincide cu sensul de referință, atunci i va fi pozitiv (în caz contrar negativ).

În sfîrșit, mărimea i, ca mărime primitivă de stare electrocinetică globală (integrală) — adică la nivelul întregului conductor, este un scalar care poate fi definit ca fluxul unui vector $\bar{J}$ denumit *densitatea curentului electric de conducție* (asupra căruia vom reveni mai jos). Astfel (fig. 1-18), intensitatea curentului electric prin elementul de arie $\mathrm{d}A$ (din secțiunea Σ a unui conductor) va depinde de direcția $\bar{n}_0$ (versorul normalei locale, în $\mathrm{d}A$, pe Σ) prin cos α și de „densitatea curentului electric de conducție", adică:

$$\mathrm{d}i = \mathrm{d}A J \cos\alpha = \bar{J} \cdot \mathrm{d}\bar{A}.$$

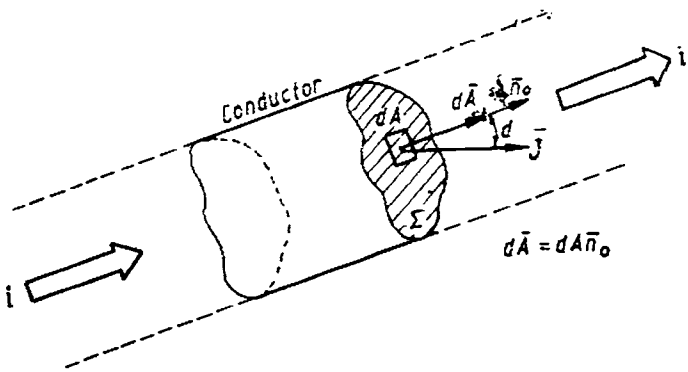


Fig. 1-18

Prin urmare, intensitatea curentului electric de conducție prin secțiunea Σ poate fi definit ca fluxul vectorului $\bar{J}$:

$$i \overset{D}{=} \int_{\Sigma} \bar{J} \cdot d\bar{A}. \tag{1-15}$$

Și din (1-15) i rezultă cu semnul + sau — după cum $\bar{J}$ și $d\bar{A}$ *(elementul de arie orientat)* au între ele un unghi $\alpha \in (0, \pi/2)$ sau $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, astfel că elementul de arie orientat $d\bar{A} = \bar{n}_0 dA$ are un sens — ales arbitrar — care reprezintă sensul de referință al curentului electric.

În SI, unitatea de măsură a intensității curentului de conducție este amperul cu simbolul A. Amperul este o unitate de măsură fundamentală (pentru electromagnetism), ceea ce impune definirea etalonului de curent. Definirea amperului ca etalon de curent se face pe baza efectului mecanic al electrocineticii, adică prin expresia (1-13), așa cum se știe de la „Fizică".

Densitatea curentului electric de conducție

Starea electrocinetică este caracterizată local (în fiecare punct dintr-un conductor) prin mărimea densitatea curentului electric de conducție, notată cu $\bar{J}$ și care este o mărime vectorială de punct.

Considerînd un conductor filiform, intensitatea curentului din acesta este o măsură a stării electrocinetice globale a conductorului și nu depinde de modul particular în care alegem secțiunea la care se referă curentul. De aceea, în cazul unei distribuții uniforme a curentului prin conductor, *densitatea scalară a curentului* — definită prin raportul dintre intensitatea curentului printr-o suprafață și aria ei va avea valoarea $J_0 = \dfrac{i}{A_0}$, pentru suprafața Σ_0 normală pe axa conductorului și valoarea:

$$J_\alpha = \frac{i}{A_\alpha} = \frac{i}{A_0/\cos\alpha} = J_0 \cos\alpha, \tag{1-16}$$

pentru o suprafață Σ_α a cărei normală $\bar{n}_\alpha$ face unghiul α cu axa conductorului (fig. 1-19). Atunci, putem considera că densitatea scalară a curentului este componenta J_n a unui vector $\bar{J}$, care are mărimea $J_0 = i/A_0$ direcția axei conductorului și sensul curentului i, luată după direcția normalei la suprafața considerată:

$$J_\alpha = J_{n\alpha} = \bar{J} \cdot \bar{n}_\alpha. \tag{1-17}$$

Din (1-16) și (1-17) rezultă că intensitatea curentului este fluxul vectorului $\bar{J}$ printr-o secțiune cu aria A a conductorului ca în (1-15), adică:

$$i = J_\alpha A = J_n A = \bar{J} \cdot \bar{n} A = \bar{J} \cdot \bar{A},$$

unde $\bar{A} = \bar{n}A$ este vectorul arie orientată.

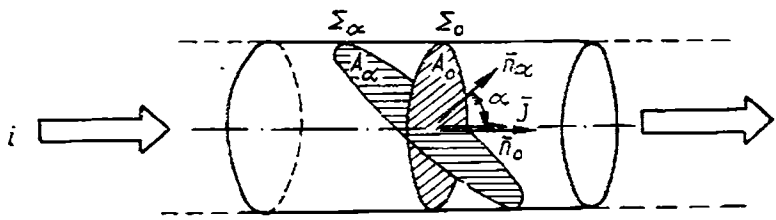


Fig. 1-19

De aici, rezultă că densitatea de curent poate fi definită prin:

$$\bar{J} = \max_{\bar{n}} \left(\bar{n} \frac{i}{A} \right),$$

care poate fi generalizată pentru cazul unei distribuții de curent neuniform prin:

$$\bar{J} = \max_{\bar{n}} \left(\bar{n} \lim_{\Delta A \to 0} \frac{i}{\Delta A} \right).$$

În SI, unitatea de măsură pentru densitatea de curent este amperul pe metru la pătrat (cu simbolul A/m^2).

Tensiunea electromotoare

O altă mărime care intervine în procesele electrocinetice este tensiunea electromotoare (t.e.m.), e.

Modificarea distribuției sarcinilor electrice pe corpuri este legată de existența unei rezultante a forțelor electrice și neelectrice diferită de zero, care acționează asupra particulelor elementare, încărcate electric: $\bar{F}_{el} + \bar{F}_{neel} \neq 0$.

Raportînd această rezultantă la valoarea sarcinii q_m a corpului asupra căreia acționează, rezultă:

$$\frac{\bar{F}_{el}}{q_m} + \frac{\bar{F}_{neel}}{q_m} \neq 0.$$

Primul termen reprezintă intensitatea cîmpului electric, $\bar{E}$, adică: $\bar{E} = \frac{\bar{F}_{el}}{q_m}$, iar al doilea — *intensitatea cîmpului electric imprimat*, $\bar{E}_i$: $\bar{E}_i = \frac{\bar{F}_{neel}}{q_m}$.

În cazul cel mai general, în regim electrocinetic nestaționar, intensitatea cîmpului electric este:

$$\bar{E} = \bar{E}_c + \bar{E}_s,$$

în care: $\bar{E}_c$ este „componenta potențială a cîmpului electric", care are rot $\bar{E}_c = 0$, numită și „cîmp electric coulombian", produsă numai de sarcini electrice; $\bar{E}_s$ — „componenta solenoidală a cîmpului electric", cu rot $\bar{E}_s \neq 0$, numită și „cîmp electric indus", produsă prin fenomenul inducției electromagnetice.

Prin definiție *t.e.m. de contur*, e_c este circulația cîmpului electric rezultant pe un contur închis;

$$e_c \overset{D}{=} \oint_\Gamma (\bar{E} + \bar{E}_i) \cdot d\bar{l}, \tag{1-18}$$

unde $d\bar{l}$ este elementul de contur (de pe Γ) orientat pe direcția tangentei. Deoarece $\oint_\Gamma \bar{E}_c \cdot d\bar{l} = 0$ ($\bar{E}_c$ fiind un cîmp potențial), rezultă:

$$e_c = \oint_\Gamma (\bar{E}_s + \bar{E}_i) \cdot d\bar{l}. \tag{1-19}$$

În regim electrostatic suma $\bar{E} + \bar{E}_i = 0$ (condiția echilibrului electrostatic) în interiorul conductorilor și t.e.m. de contur este nulă pentru orice curbă închisă prin interiorul conductorilor.

În regim electrocinetic staționar, neexistînd o variație în timp a sarcinilor electrice, $\bar{E}_s = 0$. Rezultă:

$$e_c = \oint_\Gamma E \cdot d\bar{l},$$

adică t.e.m. de contur este dată numai de cîmpul electric imprimat.

În cazul general, tensiunea electromotoare de contur este dată numai de cîmpul electric indus și de cîmpul electric imprimat, fiind egală cu suma dintre „t.e.m. indusă" și „t.e.m. imprimată":

$$e_c = \oint_\Gamma E_s \cdot d\bar{l} + \oint_\Gamma E_i \cdot d\bar{l}.$$

Tensiunea electromotoare între două puncte este circulația sumei cîmpului electric indus și cîmpului electric imprimat, efectuată între cele două puncte pe o curbă deschisă:

$$e_{ab} = \int_{a-b} (\bar{E}_s + \bar{E}_i) \cdot d\bar{l}, \qquad (1\text{-}20)$$

unde $d\bar{l}$ este elementul de curbă (din *a-b*) orientat pe direcția trangentei.

Din (1-18) rezultă că t.e.m. este o mărime scalară care, în funcție de sensul ales pentru $d\bar{l}$ și sensul ales pentru integrare, poate avea valoare pozitivă sau negativă. Sensul de integrare ales în (1-18), (1-19), (1-20) reprezintă așa-numitul *sens de referință al t.e.m.*, iar *sensul t.e.m.* este acel sens de referință care face ca valoarea ce rezultă prin integrare pentru e să fie pozitivă.

Pe schemele electrice sensul t.e.m. se poate indica printr-o „mică" săgeată încercuită în dreptul căreia se scrie litera e (așa ca în figurile 1-22 și 1-23).

Cîmpuri electrice imprimate. Intensitatea cîmpului electric imprimat este o mărime de stare a cîmpului electric din interiorul conductorilor, care se datorește existenței unor neomogenități (mărime de material). În funcție de domeniul spațial în care sînt localizate aceste neomogenități deosebim:

— *cîmpuri electrice imprimate de volum*, cum sînt: cîmpul imprimat de accelerație, cîmpul imprimat de concentrație (de difuzie), cîmpul imprimat termoelectric de volum etc.;

— *cîmpuri electrice imprimate de contact (pe interfețe)*, cum sînt: cîmpul imprimat voltaic, cîmpul imprimat termoelectric de contact (efect Seebeck), cîmpul imprimat fotovoltaic etc.

Exemplu de cîmp electric imprimat de accelerație. La rotirea discului metalic din figura 1-20 în jurul axei lui de simetrie cu viteza unghiulară ω, datorită forței centrifuge, electronii sînt „refulați" către periferia discului, care se încarcă negativ, în timp ce partea centrală rămîne pozitivă.

Dacă m este masa electronului și r raza discului, forța de natură neelectrică ce acționează asupra unui electron este: $\bar{F}_{ner} = m\omega^2\bar{r}$. Această forță determină un cîmp electric imprimat de intensitate: $\bar{E}_i = \bar{F}_{ner}/q_m$, unde q_m este sarcina electronului (deci negativă), cu valoarea absolută e (v. „Fizica").

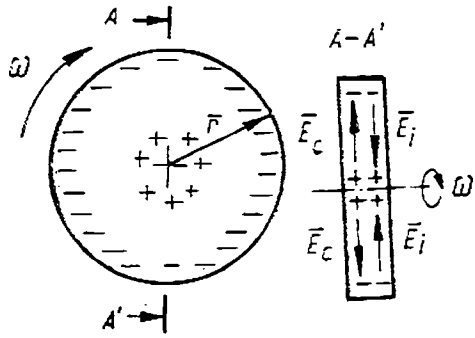


Fig. 1-20

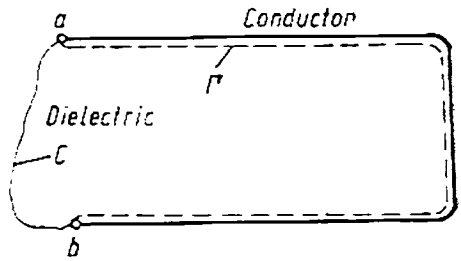


Fig. 1-21

Rezultă $\bar{E}_i = -\frac{m\omega^2}{e}\bar{r}$, dirijat spre partea centrală a discului.

Datorită încărcării discului, prin „centrifugarea" electronilor, se produce cîmpul $\bar{E}_c$ (v. fig. 1-20) care tinde să compenseze efectul forței centrifuge. Condiția de echilibru este dată de relația: $\bar{E}_c = -\bar{E}_i$.

Tensiunea electrică

Tensiunea electrică este o altă mărime scalară ce caracterizează starea electrocinetică din punctul de vedere al cîmpului electric de-a lungul unei curbe, între două puncte.

Definim *tensiunea la borne a unui dipol* (fig. 1-21) circulația cîmpului electric rezultant efectuată pe o curbă deschisă, c, prin dielectricul ce separă cele două borne, adică:

$$u_{ab} \overset{D}{=} \int_{(c)\,a\to b} (\bar{E}_c + \bar{E}_s)\cdot \mathrm{d}\bar{l}. \tag{1-21}$$

Presupunînd că în afara conductorului nu există cîmp magnetic variabil ($\bar{E}_s = 0$):

$$u_{ab} = \int_{(c)\,a\to b} \bar{E}_c \cdot \mathrm{d}\bar{l},$$

unde $\mathrm{d}\bar{l}$ este elementul de curbă, aparținînd lui (c), orientat pe direcția tangentei la curbă.

Din modul cum a fost definită tensiunea la borne, rezultă: $u_{ab} = -u_{ba}$.

Definim *tensiunea „în lungul firului"* unui dipol, circulația cîmpului electric coulombian efectuată pe o curbă deschisă, Γ, prin conductor între bornele a și b (v. fig. 1-21), adică:

$$u_f \overset{D}{=} \int_{(\Gamma)\,a\to b} \bar{E}_c \cdot \mathrm{d}\bar{l}. \tag{1-22}$$

În regim electrocinetic staționar ($\bar{E}_s = 0$), deoarece circulația vectorului $\bar{E}_c$ nu depinde de drum, adică:

$$\int_{(c)\,a\to b} \bar{E}_c \cdot \mathrm{d}\bar{l} = \int_{(\Gamma)\,a\to b} \bar{E}_c \cdot \mathrm{d}\bar{l},$$

putem scrie: $u_{ab} = u_{ab,f}$ sau $u_b = u_f$.

În regim electrocinetic nestaționar tensiunea la borne (u_b) este diferită de tensiunea în lungul firului (u_f): $u_b \neq u_f$.

Sensul de integrare ales în (1-21) sau (1-22) se numește *sensul de referință al tensiunii* (care — în scheme — se indică printr-un arc orientat unind cele două puncte sau borne între care se calculează tensiunea, de pildă așa ca în figurile 1-22 și 1-23). *Sensul tensiunii* este, prin definiție, sensul de referință care dă o valoare pozitivă tensiunii.

Asocierea sensurilor de referință

Pentru scrierea ecuațiilor de funcționare ale dipolilor, în care intervin mărimile: curent i, tensiune electromotoare e, tensiunea în lungul firului u_f și tensiunea la borne u_b este necesară precizarea unor convenții de asociere a sensurilor de referință ale mărimilor amintite, deoarece aceste sensuri pot fi alese arbitrar.

De exemplu, dacă sensul t.e.m. este dat (adică e are valoarea pozitivă), deoarece putem alege arbitrar ambele sensuri de referință ale curentului i și tensiunii la borne u_b, rezultă necesitatea *asocierii convenționale* a acestor două sensuri atunci cînd exprimăm legea lui Ohm $u_b = Ri$ (v. „Fizica"), pentru ca aceasta să descrie corect situația reală a unui dipol pasiv cu rezistența R.

Astfel, asocierea sensurilor de referință ale mărimilor i, e, u_f și u_b se poate face în felul următor:

— curentul i și tensiunea electromotoare e au același sens de referință în lungul unui circuit;

— curentul i și tensiunea în lungul firului u_f au același sens de referință în lungul unei porțiuni de circuit;

— sensurile de referință ale curentului i și tensiunii la borne u_b se pot asocia după *convenția de la generator* (fig. 1-22) sau după *convenția de la receptor* (fig. 1-23), presupunînd sensul t.e.m. dat (adică întotdeauna valoarea t.e.m. e este pozitivă).

Numim *dipol receptor*, un dipol (activ sau pasiv) care primește energie electrică din exterior și *dipol generator*, un dipol (activ) care furnizează energie electrică unui sistem exterior.

După convenția de la generator, sensul pozitiv al curentului este dirijat prin dipol astfel încît să formeze un sens unic de circulație cu sensul pozitiv al tensiunii la borne. După convenția de la receptor, sensul pozitiv al curentului este dirijat prin dipol astfel încît să formeze un sens de circulație opus sensului pozitiv al tensiunii la borne.

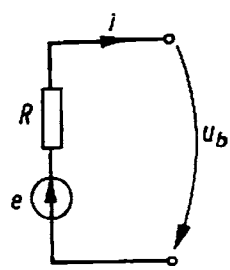


Fig. 1-22

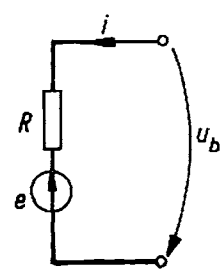


Fig. 1-23

Pentru a stabili expresiile tensiunii la borne în cele două cazuri pornim de la expresia de definiție a tensiunii în lungul firului, între bornele a și b:

$$u_{ab,f} = \int_{a\to b} \bar{E}_c \cdot d\bar{l}.$$

Dar, din legea lui Ohm: $u_{ab,f} = Ri - e$ (v. punctul 1.2.2. de mai jos), rezultă:

$$Ri = u_{ab,f} + e = \int_{a\to b} \bar{E}_c \cdot d\bar{l} + \int_{a\to b} (\bar{E}_s + \bar{E}_i) \cdot d\bar{l}.$$

În convenția de la generator, expresia de mai sus devine: $Ri = -u_b + e$, iar în convenția de la receptor: $Ri = u_b - e$.

Deci, expresia tensiunii la bornele unui dipol generator este: $u_b = e - Ri$, iar la bornele unui dipol receptor: $u_b = +e + Ri$.

Potrivit acestor expresii ale tensiunii la borne, din modul de asociere a sensurilor curentului și tensiunii la borne, rezultă că întotdeauna:

— dipolul receptor *absoarbe* energie electrică (deoarece $u_b i\, dt = -ei\, dt + Ri^2\, dt < 0$), ceea ce justifică denumirea „convenția de la receptor";

— dipolul generator *produce* energie electrică (deoarece $u_b i\, dt = ei\, dt - Ri^2\, dt > 0$), ceea ce justifică denumirea „convenția de la generator".

1.2.2. Legile electrocineticii

Legea conservării sarcinii electrice

Considerînd, în regim electrocinetic, o suprafață închisă Σ care trece numai prin izolanți, astfel încît intensitatea curentului este nulă prin această suprafață, se constată experimental că sarcina totală localizată în interiorul suprafeței rămîne constantă în timp.

Dacă, însă, suprafața Σ trece și prin conductori în care apare curent electric de conducție, sarcina electrică din interiorul suprafeței variază în timp. Legea conservării sarcinii electrice stabilește legătura dintre curenții din conductori și sarcina electrică din interiorul suprafeței închise Σ.

În forma integrală, legea se poate enunța astfel:

Intensitatea i_Σ a curentului electric de conducție care „iese" dintr-o suprafață închisă Σ (adică străbate suprafața cu sensul de referință spre exterior) este, în fiecare moment, egală cu viteza de scădere a sarcinii electrice q_Σ localizată în interiorul suprafeței:

$$i_\Sigma = -dq_\Sigma/dt, \tag{1-23}$$

unde t reprezintă timpul.

Observații:

1° i_Σ este suma algebrică a curenților care străbat suprafața spre exterior (se consideră convențional cu semnul „+" curenții care străbat spre exterior și cu semnul „—" curenții care trec spre interior);

2° suprafața Σ nu este considerată sub aspect pur geometric, ci ca o suprafață alcătuită din puncte materiale în mișcare, adică $\Sigma = \Sigma(t)$.

Legea poate fi exprimată și sub formă locală. Pentru aceasta, exprimăm curentul i_Σ cu ajutorul densității de curent $\bar{J}$, iar sarcina q_Σ (în ipoteza unei repartiții de volum) cu ajutorul densității de volum a sarcinii q_v:

$$i_\Sigma = \oint_\Sigma \bar{J} \cdot \mathrm{d}\bar{A} \text{ și } q = \int_{v_\Sigma} q_v \, \mathrm{d}v,$$

unde v reprezintă volumul.

Aplicînd formula Gauss-Ostrogradski (v. „Matematica") în expresia curentului, rezultă:

$$i_\Sigma = \oint_\Sigma \bar{J} \cdot \mathrm{d}\bar{A} = \int_{v_\Sigma} \operatorname{div} \bar{J} \, \mathrm{d}v.$$

Dacă suprafața Σ este imobilă, putem scrie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q_\Sigma) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{v_\Sigma} q_v \, \mathrm{d}v = \int_{v_\Sigma} \frac{\mathrm{d}q_v}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}v.$$

Introducînd aceste rezultate în expresia formei integrale a legii, obținem:

$$\operatorname{div} \bar{J} \, \mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}q_v}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}v.$$

Cum suprafața Σ și volumul v_Σ din interiorul ei sînt arbitrar alese, rezultă următoarea relație:

$$\operatorname{div} \bar{J} = -\frac{\mathrm{d}q_v}{\mathrm{d}t}, \tag{1-24}$$

care reprezintă forma locală a legii conservării sarcinii electrice (deci, în fiecare punct dintr-un conductor, viteza de scădere a densității de volum a sarcinii electrice este egală cu divergența densității curentului electric de conducție).

Legea curentului electric de conducție (legea lui Ohm)

Experiența arată că în fiecare punct din interiorul unui conductor în regim electrocinetic nestaționar intensitatea cîmpului electric rezultant din interiorul unui conductor izotrop este proporțională în fiecare punct cu densitatea curentului electric de conducție din acel punct. Factorul de proporționalitate este rezistivitatea materialului, ρ, care depinde de natura acestuia. De aceea, legea conducției electrice este o lege de material.

Prin urmare sub forma locală legea curentului electric de conducție se exprimă prin:

$$\bar{E}_c + \bar{E}_s + \bar{E}_i = \rho \bar{J}. \tag{1-25}$$

Pentru a deduce forma integrală a legii, considerăm o porțiune de circuit filiform ca în figura 1-24 și efectuăm pentru relația de mai sus circulația în lungul firului între bornele a și b (pe curba Γ):

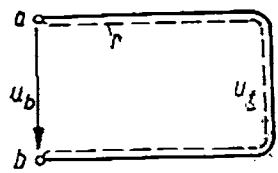


Fig. 1-24

$$\int_{a \to b} (\bar{E}_c + \bar{E}_s + \bar{E}_i) \cdot \mathrm{d}\bar{l} = \int_{a \to b} \rho \bar{J} \cdot \mathrm{d}\bar{l},$$

însă:

$$\int_{a \to b} \bar{E}_c \cdot \mathrm{d}\bar{l} = u_{ab,f} \text{ și } \int_{a \to b} (\bar{E}_s + \bar{E}_i) \cdot \mathrm{d}\bar{l} = e_{ab}.$$

Pentru calculul integralei din membrul drept, presupunem — deoarece conductorul este filiform — că $\bar{J} = const.$ într-o secțiune și că $d\bar{l} \parallel d\bar{A}$. Atunci $J = \frac{i}{A}$, în care i este curentul din conductor, iar A — aria secțiunii transversale a conductorului. Rezultă deci:

$$\int_{a\to b} \rho \bar{J} \cdot d\bar{l} = \int_{a\to b} \rho \frac{i}{A} \cdot dl = \rho \int_{a\to b} \frac{i}{A}\, dl = \rho \frac{i}{A} \int_{a\to b} dl = \rho \frac{l_{AB}}{A} \cdot i,$$

în care: $\rho \frac{l_{AB}}{A} = R_{AB}$, de unde $\int_{a\to b} \rho \bar{J} \cdot d\bar{l} = Ri$.

Înlocuind termenii calculați, în relația inițială, obținem:

$$u_{ab,t} + e_{ab} = R_{ab} \cdot i, \tag{1-26}$$

care reprezintă forma integrală (globală) a legii lui Ohm.

Legea transformării de energie în conductori (legea Joule-Lenz)

Experiența arată că în orice conductor în stare electrocinetică se dezvoltă căldură ca urmare a transformării unei părți din energia electrică absorbită de acesta în energie termică (este vorba de efectul caloric al electrocineticii).

Forma locală a legii transformării de energie în conductori exprimă puterea locală p, cedată pe unitatea de volum, în fiecare punct al conductorului, în procesul de conducție electrică, punct în care există o intensitate a cîmpului electric $\bar{E}$ și o densitate a curentului de conducție $\bar{J}$:

$$p = \bar{E} \cdot \bar{J}. \tag{1-27}$$

Deci, în formă locală, legea Joule-Lenz poate fi enunțată astfel: puterea cedată pe unitatea de volum a conductorului de cîmpul electromagnetic, în procesul de conducție electrică, este egală cu produsul scalar dintre intensitatea cîmpului electric și densitatea curentului electric de conducție.

În sistemul internațional. p se măsoară în watt pe metru cub (W/m^3).

Relația este adevărată pentru orice fel de conductori. Există și diferite cazuri particulare ca, de exemplu, situația conductorilor omogeni ($\bar{E}_i = 0$), pentru care (aplicînd legea lui Ohm $\bar{E}_c = \rho \bar{J}$), obținem: $p = \rho J^2$.

În cazul general al conductorilor neomogeni ($\bar{E}_i \neq 0$), aplicînd aceeași lege a lui Ohm ($\bar{E}_c = \rho \bar{J}_i - \bar{E}_i$), obținem: $p = \rho J^2 - \bar{E}_i \cdot \bar{J}$, unde primul termen, $p_R = \rho J^2 > 0$, reprezintă densitatea de volum a puterii transformată ireversibil în căldură. Această transformare se numește „efect electrocaloric ireversibil" sau „efect Joule-Lenz" al electrocineticii. Al doilea termen, $p_g = \bar{E}_i \cdot \bar{J}$, poate fi pozitiv, caz în care el are semnificația unei puteri cedate de sursă cîmpului electromagnetic sau negativ, caz în care are semnificația unei puteri cedate de cîmpul electromagnetic sursei electrice.

Pentru a obține forma globală (integrală) a acestei legi, integrăm expresia formei locale pe volumul v al unei porțiuni de conductor filiform, în care $\bar{E}$, $\bar{J}$, $d\bar{l}$ sînt paraleli (v. fig. 1-25). Notînd cu A, aria secțiunii transversale a conductorului și cu P, puterea cedată întregului conductor în procesul de conducție electrică, obținem:

$$P = \int_v p\, dv = \int_v \bar{E} \cdot \bar{J}\, dv.$$

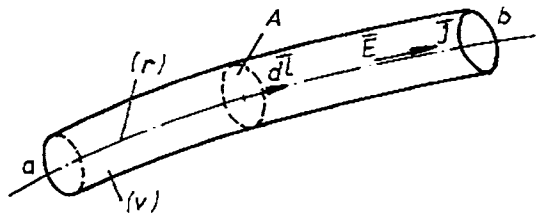


Fig. 1-25

Deoarece $\bar{E} \parallel \bar{J}$, putem scrie:

$$P = \int_v EJ\,dv$$

și pentru că $dv = A\,dl$ rezultă:

$$P = \int_{(\Gamma)a\to b} EJA\,dl = \int_{(\Gamma)a\to b} Ei\,dl = i\int_{(\Gamma)a\to b} E\,dl = i\int_{(\Gamma)a\to b} \bar{E}\cdot d\bar{l} = i\cdot u_{ab,f},$$

adică:

$$P = u_f \cdot i, \tag{1-28}$$

expresie care reprezintă forma integrală a legii transformării de energie în conductori, care se enunță astfel: puterea totală cedată de cîmpul electromagnetic unei porțiuni de conductor filiform, în procesul conducției electrice, este egală cu produsul dintre intensitatea curentului electric de conducție și tensiunea electrică în lungul firului.

Din legea conducției electrice (1-26) putem scrie: $u_f = Ri - e$ și înlocuind-o în (1-28), rezultă:

$$P = Ri^2 - e\cdot i.$$

Primul termen, $P_R = Ri^2 > 0$, este termenul corespunzător efectului electrocaloric ireversibil amintit anterior, iar relația:

$$P_R = Ri^2 = \int_v \rho J^2\,dv$$

reprezintă legea Joule-Lenz sub formă integrală. Al doilea termen $P_g = ei$ este puterea electrică a sursei.

Prin integrarea în timp a acestui termen obținem căldura totală dezvoltată în intervalul $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2\,dt. \tag{1-29}$$

Pentru circuitele de curent continuu, în care intensitatea curentului electric de conducție este constantă în timp $i = \text{const} = I$, putem scrie:

$$P = RI^2 \text{ și } W = RI^2\cdot \Delta t = RI^2(t_2 - t_1).$$

Legea electrolizei

Această lege se referă la efectul chimic al electrocineticii (care apare pregnant în procesul denumit electroliză) și exprimă relația dintre masa unui element (radical chimic) care apare la unul din electrozii unei băi electrolitice, intensitatea curentului electric de conducție din electrolit și timp.

Experiența arată că dacă într-un vas în care se găsește un electrolit (ceea ce alcătuiește o baie electrolitică) introducem doi electrozi (două corpuri metalice), pe care îi conectăm la o sursă de curent continuu, prin electrolit se stabilește un curent electric și se produc anumite transformări chimice. Procesul dirijării ionilor unui electrolit în cîmpul electric stabilit între electrozi conectați la sursa de curent continuu poartă denumirea de *electroliză* (v. „Fizică", „Chimia").

Legea electrolizei arată că masa de substanță (m) care se depune într-un interval de timp ($t_2 - t_1$) la un electrod al băii electrolitice este direct proporțională cu sarcina electrică q care a „trecut" prin baia electrolitică și cu echivalentul chimic A_m/m al elementului depus, adică:

$$m = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{A_m}{m} \int_{t_1}^{t_2} i \, dt \text{ sau } m = \frac{1}{F_0} \frac{A_m}{m} q, \tag{1-30}$$

unde F_0 este constanta lui Faraday (o constantă universală avînd valoarea $F_0 = 96490$ C/mol aceeași pentru toți electroliții — v „Fizica"), A_m — masa unui mol (referitor la ionii depuși la catodul băii) și m — valența unui ion.

1.3. CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU

1.3.1. Rețelele electrice de curent continuu

Un sistem de elemente de circuit se numește circuit electric sau rețea electrică. Elementele de circuit ale rețelelor electrice liniare de curent continuu sînt: rezistorul și sursele de curent continuu.

Rezistorul a fost prezentat la punctul 1.1.2.

Sursele de curent continuu sînt generatoare de energie electrică caracterizate printr-o tensiune electromotoare, constantă în timp * (pe care o vom nota cu E) și printr-o rezistență proprie R (numită și rezistența internă a sursei). Ele se conectează în circuite prin două borne, notate adesea cu + și —, la care se determină o tensiune la borne constantă în timp pe care o vom nota cu U; ea se calculează cu relația de definiție (1-21) și rezultă întotdeauna cu o valoare pozitivă dacă integrala se efectuează de la borna + a sursei către borna — (în caz contrar este negativă).

Dacă sursa de curent continuu este conectată într-un circuit închis, atunci ea determină un regim electrocinetic staționar (de „curent continuu") caracterizat și de o anumită intensitate a curentului electric de conducție constantă în timp pe care o vom nota cu I. Curentul electric prin sursă se mai numește și *curentul de sarcină* al sursei. Din punctul de vedere al valorii acestui curent, sursele de curent continuu pot funcționa:

— în gol ($I = 0$);

— în sarcină $0 < I \leqslant I_n$, unde I_n este *curentul nominal* al sursei (adică valoarea maximă a intensității curentului electric la care sursa poate funcționa în „regim de durată", adică un timp oricît de mare, fără ca sursa să se „deterioreze"). Dacă curentul de sarcină $I > I_n$ se spune că sursa este „în suprasarcină" și el nu poate fi un regim de lucru normal;

* Nu avem în vedere aici regimul tranzitoriu.

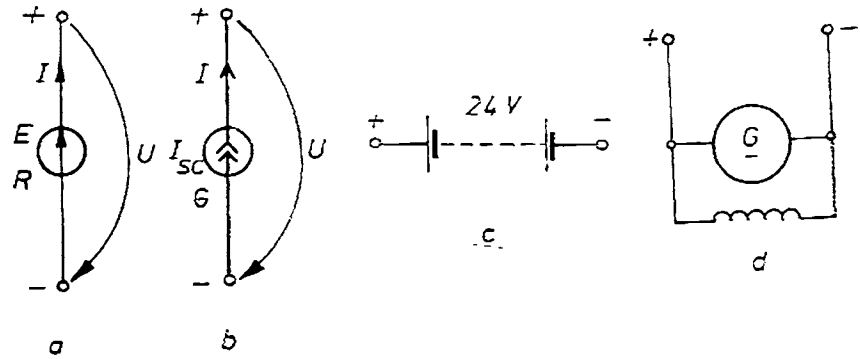


Fig. 1-26

— în scurtcircuit, cînd $U = 0$ și curentul de sarcină ajunge la valoarea limită $I = E/R \overset{D}{=} I_{sc}$ (numit *curent de scurtcircuit*) așa cum rezultă din aplicarea lui (1-26). La marea majoritate a surselor de curent continuu regimul de scurtcircuit este un caz de avarie ce trebuie evitat. De altfel, în aplicațiile practice, circuitele sînt dotate cu dispozitive de protecție (de exemplu relee maximale de curent, siguranțe fuzibile etc.) care împiedică sursa să fie solicitată la suprasarcini sau la scurtcircuit.

Din punctul de vedere al principiului de funcționare, sursele de curent continuu pot fi: electrochimice (de exemplu, pilele și acumulatoarele electrice — v. „Fizica"), termoelectrice (de exemplu, cuplul termoelectric — v. „Fizica"), fotoelectrice, de inducție (de exemplu, generatoarele rotative de curent continuu cu colector — v. cap. 6), redresoarele (v. „Electronica") etc. Printre altele, sursele de curent continuu sînt caracterizate funcțional și de puterea pe care o pot debita (caracterizînd nivelul energetic la care se face conversia în sursă, din energie neelectrică în energie electrică).

În schemele circuitelor electrice, sursele de curent continuu se pot reprezenta prin simbolurile grafice din figura 1-26. Simbolul din figura 1-26, *a* reprezintă sursa ca pe un generator real de tensiune; simbolul din figura 1-26, *b* reprezintă sursa ca pe un generator ideal de curent (v. punctul 1.3.2), adică un element de circuit dipolar care „debitează" un curent electric de intensitate I_{sc}, independentă de tensiunea la borne U. Simbolul din figura 1-26, *c* este rezervat de obicei reprezentării bateriilor de acumulatoare, iar cel din figura 1-26, *d* — generatoarelor de curent continuu cu colector (de exemplu cu excitație derivație).

Aplicînd cazului din figura 1-26, *a* legea lui Ohm sub forma (1-26), cu sensul de parcurs prin sursă de la borna + la —, rezultă că pentru sursele de curent continuu se pot scrie relațiile *:

— la funcționarea în sarcină (cu un curent de intensitate $I = I_{-\to+}$):

$$U + E_{+\to-} = -RI$$

și deoarece $E_{+\to-} = -E_{-\to+} = E$ (sensul indicat în figura 1-26, *a*):

$$U = E - RI,$$

unde termenul RI reprezintă așa-numita *cădere de tensiune* a sursei;

* Sensurile de referință pentru U și I în figura 1-26, *a* au fost asociate după regula de la generator.

— la funcționarea în gol ($I = 0$):

$$U + E_{+\to -} = 0 \text{ sau } U = -E_{+\to -} \text{ sau } U = E$$

(deci t.e.m. a unei surse se poate determina măsurînd tensiunea la bornele sursei la mersul în gol).

Rețelele electrice de curent continuu, definite ca un sistem de rezistoare și surse conectate între ele conform unei anumite scheme (determinată de aplicațiile practice), sînt caracterizate prin numărul de noduri (să-l notăm cu n) și prin numărul de laturi (notat cu l).

Se numește *nod* al unei rețele punctul în care se „întîlnesc" două sau mai multe laturi. Dacă numim *latură* a unei rețele porțiunea de circuit cuprinsă între două noduri extreme (în lungul căreia curentul are aceeași intensitate), rezultă că o latură nu posedă alte noduri decît cele de la capete și că într-un nod sînt conectate cel puțin trei laturi.

Pentru ordonarea calculului, vom nota aici nodurile unei rețele prin litere (a, b, ..., n) și laturile rețelei prin numere întregi (1, 2, ..., l).

Numai numărul de laturi l, sau numai numărul de noduri n, nu poate determina o rețea (deoarece rețele cu același număr de noduri pot avea un număr diferit de laturi; de exemplu, între două noduri pot fi conectate în paralel oricîte laturi). De aceea, ceea ce determină complet o rețea este numărul l de laturi și numărul n de noduri, considerate simultan.

Orice curbă închisă realizată pe o rețea se numește *ochi*, *buclă* sau *circuit*; există însă *ochiuri (bucle* sau *circuite) fundamentale* și ochiuri secundare. Euler a dovedit că în orice rețea completă (care nu are ochiuri deschise) există relația $m = l - n + 1$, unde m este numărul de ochiuri fundamentale.

În cadrul acestui paragraf ne vom ocupa numai de circuitele în care curentul nu-și schimbă sensul în nici o latură a rețelei și este constant în timp (sau variază așa de lent încît poate fi considerat constant pe intervale, deoarece nu se produc practic fenomene caracteristice curenților rapid variabili). Curenții fiind constanți, atunci și t.e.m. din laturile rețelei vor fi constante în timp, ca și tensiunile electrice la noduri, precum și potențialele electrice ale nodurilor rețelei. După cum am mai arătat, acest regim al rețelelor poartă denumirea de regim electrocinetic staționar sau *regim de curent continuu*. În această categorie nu intră studiul curenților din regimul tranzitoriu (care va fi analizat în capitolul 3), chiar dacă regimul tranzitoriu este urmat de stabilirea unor curenți continui.

Mai precizăm că vom avea în vedere numai rețelele de curent continuu filiforme și liniare (cele neliniare vor fi prezentate în capitolul 3), în care densitatea de curent are o repartiție uniformă în secțiunile transversale din conductori și la care parametrii de circuit ai laturilor (conductanțe și rezistențe) sînt independenți de intensitatea curenților sau de tensiunile la noduri.

În cele ce vor urma vom nota mărimile electrice: curenții din laturi, t.e.m., tensiuni la borne (noduri) și potențialele nodurilor cu literele mari: I_k, E_k, U_{pq} și V_p, unde indicii $k \in \{1, 2, ..., l\}$ precizează latura rețelei, iar p, $q \in \{a, b, ..., n\}$ — nodurile rețelei.

Prin calculul sau rezolvarea unui circuit electric de curent continuu vom înțelege determinarea tensiunilor (potențialelor) la noduri și intensitatea curenților electrici din laturi, atunci cînd se cunosc parametrii de circuit (R sau G) și t.e.m. din laturi (ca valoare și sens).

1.3.2. Teoremele rețelelor electrice liniare de curent continuu

Teoremele lui Kirchhof

Teorema întîi a lui Kirchhoff. Considerăm o suprafață închisă (Σ) care cuprinde în interiorul ei un nod al unei rețele de curent continuu (fig. 1-27).

Deoarece în regim electrocinetic staționar distribuția sarcinilor electrice este constantă în timp, aplicînd legea conservării sarcinii electrice rezultă:

$$i_\Sigma = -\frac{dq}{dt} = 0 \text{ sau } \sum_{k=1}^{p} I_k = 0,\ p \in N \tag{1-31}$$

adică suma algebrică a curenților ce se întîlnesc într-un nod este nulă, concluzie care reprezintă teorema I a lui Kirchhoff. Altfel spus, suma curenților care „intră" în nod este egală cu suma curenților care „ies" din nod. Astfel, pentru cazul din figura 1-27 rezultă: $I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$.

Teorema a II-a a lui Kirchhoff. Considerăm un „ochi" al unei rețele electrice de curent continuu, ca în figura 1-28. Scriind t.e.m. de contur pe curba (Γ) ce trece prin axa conductorilor ce formează ochiul rezultă:

$$e_c = \oint_\Gamma (\bar{E}_c + \bar{E}_s + \bar{E}_t) \cdot d\bar{l} = \oint_\Gamma \bar{E}_i \cdot d\bar{l} = \sum_k .$$

Din forma locală a legii conducției electrice și anume: $(\bar{E}_c + \bar{E}_s + \bar{E}_t) \cdot d\bar{l} = \rho \bar{J} \cdot d\bar{l}$, integrată pe Γ, deoarece conductoarele sînt filiforme ($d\bar{l} \parallel \bar{J} \parallel d\bar{A}$), putem scrie:

$$\oint_\Gamma \rho \bar{J} \cdot d\bar{l} = \oint_\Gamma \rho J\, dl = \oint_\Gamma \rho \frac{I}{A}\, dl = \sum R_k I_k .$$

Reunind aceste relații, obținem:

$$\sum_{k=1}^{p} E_k = \sum_{k=1}^{q} R_k I_k \quad p,q \in N \tag{1-32}$$

și denumind termenul $R_k I_k$ *căderea de tensiune din latura k*, înseamnă că suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor în lungul unui ochi este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune din laturile ochiului.

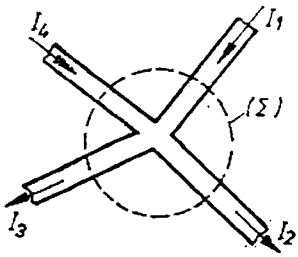


Fig. 1-27

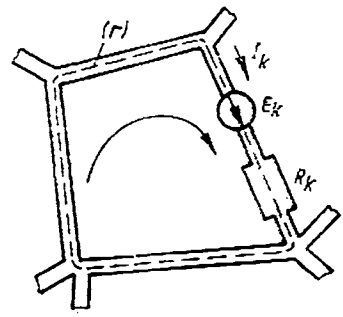


Fig. 1-28

Cu notațiile de mai sus, tensiunea între două noduri a și b ale unei rețele de curent continuu se poate scrie sub forma:

$$U_{ab} = \left(\sum_{k=1}^{p} R_k I_k - \sum_{k=1}^{q} E_k\right)_{a \to b} \quad p, q \in N \tag{1-33}$$

sensurile de referință fiind asociate după regula de la receptor.

La scrierea expresiilor (1-32) și (1-33), t.e.m. E_k și căderile de tensiune $R_k I_k$ rezultă cu semnul + sau — după cum sensul de parcurs al ochiului coincide sau nu cu sensul stabilit pe schemă pentru E_k și I_k.

Teorema conservării puterilor în rețelele de curent continuu

Considerăm o rețea de curent continuu cu n noduri și l laturi. Pentru un nod oarecare j (fig. 1-29) teorema I a lui Kirchhoff poate fi scrisă sub forma:

$$\sum_{k=1}^{l} I_{kj} = 0,$$

în care: I_{kj} este curentul din latura k ce „iese" din nodul $j (I_{kj} \neq 0$ numai dacă nodul j aparține laturii k).

Multiplicăm această relație cu V_j, potențialul electric al nodului j:

$$V_j \sum_{k=1}^{l} I_{kj} = 0.$$

Considerăm suma tuturor relațiilor de această formă, pentru toate nodurile, ceea ce înseamnă:

$$\sum_{j=1}^{n} V_j \sum_{k=1}^{l} I_{kj} = 0.$$

Dar suma dublă poate fi transformată astfel:

$$\sum_{j=1}^{n} V_j \sum_{k=1}^{l} I_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} V_j I_{kj} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} V_j I_{kj}.$$

Presupunînd că latura k este delimitată de nodurile j și $j+1$, rezultă:

$$I_{kj} = -I_{k,j+1} = I_k$$

și deci:

$$\sum_{j=1}^{j=n} V_j I_{kj} = V_j I_{kj} + V_{j+1} I_{k,j+1} =$$

$$= V_j I_{kj} - V_{j+1} I_{kj} = (V_j - V_{j+1}) I_k = U_{bk} I_k$$

(suma are sens fizic numai pentru acești doi termeni), unde indicele b indică faptul că U este tensiunea la borne. Cu această transformare, putem scrie:

$$\sum_{k=1}^{l} U_{bk} I_k = 0, \tag{1-34}$$

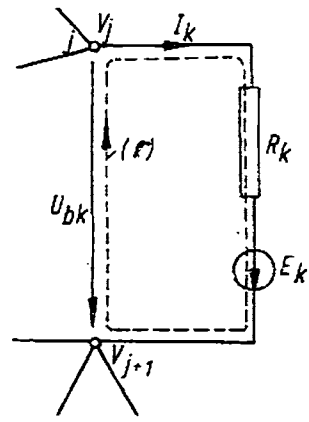


Fig. 1-29

relație care exprimă teorema conservării puterilor. Sub această formă, ea se enunță astfel: suma algebrică a puterilor primite de toate laturile rețelei pe la bornele lor, este nulă.

Pentru a găsi o altă formă de exprimare a teoremei, scriem pentru latura k tensiunea la borne conform (1-33):

$$U_{bk} = R_k I_k - E_k.$$

Multiplicăm ecuația cu I_k:

$$U_{bk} I_k = R_k I_k^2 - E_k I_k$$

și efectuăm suma pentru toate laturile rețelei:

$$\sum_{k=1}^{l} U_{bk} I_k = \sum_{k=1}^{l} R_k I_k^2 - \sum_{k=1}^{l} E_k I_k.$$

Ținînd cont de (1-34) rezultă:

$$\sum_{k=1}^{l} E_k I_k = \sum_{k=1}^{l} R_k I_k^2, \tag{1-35}$$

care constituie un alt mod de exprimare a teoremei conservării puterilor ce exprimă faptul că suma algebrică a puterilor debitate de sursele din rețea este suma algebrică a puterilor disipate în rezistoarele din laturi.

Produsul $E_k I_k$ este pozitiv dacă E_k și I_k au același sens de referință și e negativ dacă au sensuri contrare. Produsul $R_k I_k^2$ este întotdeauna pozitiv (indiferent de sensul lui I_k), ceea ce exprimă faptul că *rezistorul este un element disipativ de energie electrică.*

Teorema conservării puterilor este o consecință a teoremelor lui Kirchhoff și reprezintă un caz particular al principiului conservării energiei, aplicat rețelelor de curent continuu.

Teorema transferului maxim de putere

Considerăm circuitul din figura 1-30 alcătuit dintr-o sursă de curent continuu de t.e.m. E și rezistență interioară r și dintr-un receptor de rezistență R. Ne propunem să determinăm valoarea rezistenței R pentru care puterea transmisă de sursă să fie maximă. Aplicînd legea lui Ohm rezultă:

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

Puterea transmisă de sursă pe la bornele A și B este:

$$P_b = U_b \cdot I = RI^2 = \frac{RE^2}{(R + r)^2} > 0.$$

Maximul puterii P_b se obține anulînd prima derivată a puterii în raport cu R. Rezultă $R = r$ și teorema se poate formula astfel: un rezistor pasiv conectat între două borne ale unei surse absoarbe puterea maximă dacă rezistența ei este egală cu valoarea rezistenței interioare a sursei.

În acest caz, puterea maximă furnizată de generator este $P_g = EI = \frac{E^2}{2r}$, iar puterea maximă la borne este $P_b = RI^2 = r\frac{E^2}{(2r)^2} = \frac{E^2}{4r} = P_{b\,max}$.

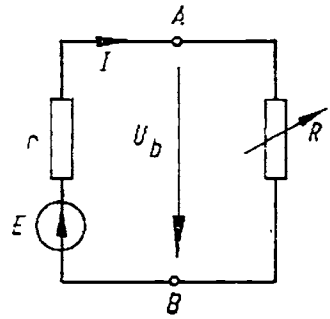


Fig. 1-30

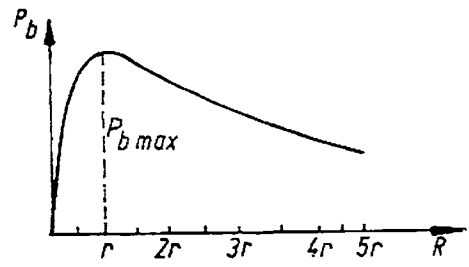


Fig. 1-31

În figura 1-31 este reprezentată variația $P_b = f(R)$ pentru valorile pozitive ale lui R.

Teorema superpoziției

Conform teoremei superpoziției, intensitatea curentului electric din orice latură a unei rețele electrice liniare complete este suma algebrică a intensităților curenților pe care i-ar stabili pe acea latură fiecare din surse, dacă s-ar găsi singură în rețea.

Dacă I_{jk} este curentul din latura j cînd toate t.e.m. sînt nule, în afară de E_k (t.e.m. de pe latura k), atunci curentul din latura j, I_j este:

$$I_j = \sum_{k=1}^{l} I_{jk}, \tag{1-36}$$

unde l este numărul laturilor rețelei considerate, iar:

$$I_{jk} = G_{jk} \cdot E_k.$$

Parametrul G_{jk} are dimensiunea unei conductanțe, motiv pentru care se numește „conductanța de transfer a laturii k la latura j".

Teorema superpoziției rezultă din aplicarea principiului superpoziției la sistemele de ecuații algebrice liniare care descriu comportarea rețelelor electrice liniare în regim de curent continuu.

Teorema rezistențelor echivalente

Numim *rezistență echivalentă* (R_e) între două borne ale unei rețele de curent continuu cu elemente (rezistoare) pasive, raportul dintre tensiunea aplicată la borne și curentul care rezultă în rețea (considerînd sensurile de referință asociate după regula „de la receptor"):

$$R_e = \frac{U_b}{I}$$

Rezistoare conectate în serie. Considerăm circuitul din figura 1-32, alcătuit din n rezistoare înseriate, avînd rezistențele R_1 R_2, ..., R_n (și conductanțele G_1, G_2, ..., G_n).

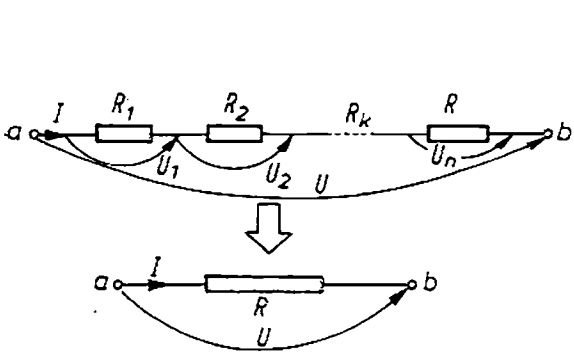


Fig. 1-32

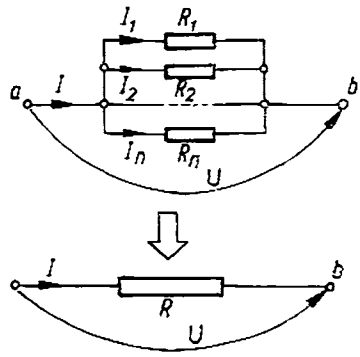


Fig. 1-33

Curentul din toate rezistoarele fiind același, I, tensiunea la borne este $U_b = U_{b1} + U_{b2} + ... + U_{bn}$ adică:

$$U_b = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot I_k = I \sum_{k=1}^{n} R_k.$$

Conform definiției anterioare, rezistența și conductanța echivalentă sînt:

$$R_{e.s} = \sum_{k=1}^{n} R_k \text{ și } \frac{1}{G_{e.s}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{G_k}, \tag{1-37}$$

unde indicii e, s reprezintă *e*chivalent, *s*erie.

Deci, dacă într-o latură de circuit există n rezistoare conectate în serie (se găsesc sub același curent) atunci, pe schemă ele pot fi înlocuite printr-un singur rezistor a cărui rezistență echivalentă este suma celor n rezistențe.

Rezistoare conectate în paralel. Considerăm circuitul din figura 1--33 alcătuit din n rezistoare conectate în paralel, avînd conductanțele G_1, G_2, ... G_n (rezistențele R_1, R_2, ..., R_n) și aceeași tensiune la borne, U_b.

Aplicînd teorema I a lui Kirchhoff la unul dintre cele două noduri, rezultă:

$$I = \sum_{k=1}^{n} I_k,$$

în care I_k este curentul din rezistorul k. Dar din legea lui Ohm:

$$I_k = G_k U_k = G_k \cdot U_b,$$

rezultă:

$$I = \sum_{k=1}^{n} G_k \cdot U_b = U_b \sum_{k=1}^{n} G_k,$$

sau

$$G_{e.p} = \sum_{k=1}^{n} G_k \text{ și } \frac{1}{R_{e.p}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k},$$

relații care exprimă conductanța (rezistența) echivalentă a celor n rezistoare conectate în paralel. Indicii e, p reprezintă *e*chivalent, *p*aralel.

Teorema generatoarelor echivalente

Teoremele generatoarelor echivalente arată că un dipol liniar activ admite două scheme echivalente numite „schema generatorului echivalent de tensiune" și „schema generatorului echivalent de curent".

Prin schemă echivalentă a unei rețele oarecare înțelegem schema unei rețele fictive care ar putea înlocui rețeaua considerată (în cadrul unei rețele mai mari din care ea face parte) fără să se schimbe curenții care „intră" sau „ies" pe la bornele de acces sau tensiunile la aceste borne.

Teorema generatorului echivalent de tensiune (Thévenin-Helmholtz). Considerăm rețeaua din figura 1-34 care cuprinde între bornele a și b mai multe rezistoare și surse de t.e.m. conectate după o anumită schemă și ne propunem să determinăm curentul I ce se stabilește prin latura rezistorului R.

Conform teoremei lui Thévenin, curentul I debitat de rețeaua liniară pe rezistorul R este egal cu raportul dintre tensiunea de mers în gol la bornele (a, b), U_{abo} și suma dintre rezistența exterioară R și rezistența interioară (echivalentă) a rețelei „pasivizate" R_{abo} (prin „pasivizat" înțelegem eliminarea t.e.m. și șuntarea surselor în rețeaua dată, cu menținerea rezistențelor interne ale surselor).

Practic, pe mărimile U_{abo} și R_{abo} le calculăm astfel:

— „tăiem" latura rezistorului R conectat între bornele a și b și calculăm în aceste condiții tensiunea la borne, pe care o numim U_{abo};

— în aceleași condiții (rezistorul R neconectat) pasivizăm rețeaua și calculăm rezistența echivalentă a rețelei între bornele a și b, pe care o notăm cu R_{abo}.

Cu acestea construim circuitul echivalent din figura 1-35 alcătuit dintr-un generator cu t.e.m. egală cu U_{abo} și rezistența interioară R_{abo} (în serie) și din rezistorul exterior R. În această schemă echivalentă putem scrie, aplicînd teorema a II-a a lui Kirchhoff, curentul din rezistor:

$$I = \frac{U_{abo}}{R + R_{abo}}. \tag{1-38}$$

Teorema generatorului echivalent de curent (Norton). Considerăm aceeași rețea din figura 1-34. Conform teoremei lui Norton, tensiunea U produsă în sarcină de rețeaua liniară activă care alimentează rezistența exterioară R este egală cu raportul dintre curentul de scurtcircuit $I_{ab,s}$ al rețelei și suma dintre conductanța interioară a rețelei pasivizate G_{abo} și conductanța exterioară, G.

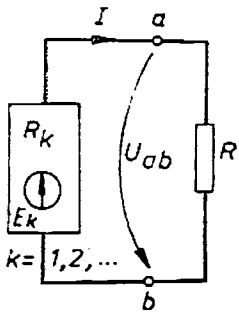


Fig. 1-34

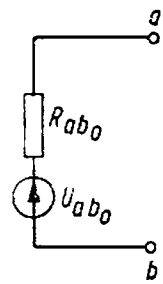


Fig. 1-35

Practic, pe mărimile $I_{ab.s}$ și G_{abo} le calculăm astfel:

— „tăiem" latura rezistorului R și legăm în scurtcircuit bornele a și b. Calculăm curentul pe care-l debitează rețeaua în aceste condiții, curent pe care îl notăm $I_{ab.s}$ (numit *curentul de scurtcircuit al sursei*);

— în rețeaua dată „suprimăm" latura rezistorului R și toate tensiunile electromotoare ale surselor (fără a suprima și rezistențele lor interioare). În aceste condiții calculăm conductanța echivalentă, între bornele a și b, a rețelei pasivizate, care este chiar G_{abo} (inversul mărimii R_{abo}, definită anterior).

Cu acestea, putem construi circuitul echivalent din figura 1-36, alcătuit dintr-un generator având curentul de scurtcircuit $I_{ab.s}$ și conductanța interioară G_{abo} (în paralel) și din rezistorul exterior G. În această schemă echivalentă, aplicînd teorema I a lui Kirchhoff, într-unul dintre cele două noduri, putem scrie:

$$U = \frac{U_{ab.s}}{G_{abo} + G}. \tag{1-39}$$

Teorema circuitelor fundamentale independente

Considerăm rețeaua liniară din figura 1-37 cu n noduri, l laturi și m ochiuri fundamentale (ochiuri pentru care, scriind teorema a II-a a lui Kirchhoff, obținem ecuații independente). Știm că $m = l - n + 1$ (v. punctul 1.3.1).

Presupunem că fiecare ochi al rețelei este parcurs de un curent închis fictiv (ca și cînd ochiul ar fi un circuit independent).

Acești curenți notați I_1, I_2, ..., I_m sînt numiți curenți „de contur" sau „ciclici" și îndeplinesc următoarea condiție: pentru fiecare latură a rețelei, curentul real este suma algebrică a curenților ciclici care trec prin acea latură.

Notăm cu R_{pq} suma rezistențelor laturii comune ochiurilor p și q. În cazul în care curenții I_p și I_q au același sens prin latura comună $R_{pq} > 0$; dacă sensurile lor diferă $R_{pq} < 0$. Evident, $R_{pq} \neq 0$ numai dacă ochiurile p și q au o latură comună.

Conform notației, rezultă că R_{jj} este suma rezistențelor distribuite pe laturile ochiului j, totdeauna pozitivă.

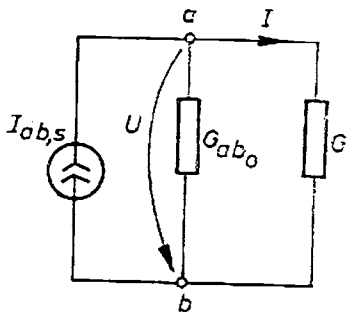


Fig. 1-36

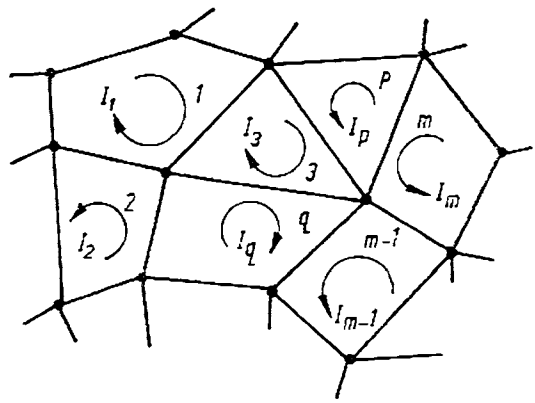


Fig. 1-37

Mai notăm cu E_j, suma algebrică a t.e.m. din laturile ochiului j. Dacă sensul t.e.m. coincide cu sensul curentului de contur, o considerăm pozitivă; în caz contrar—negativă.

Aplicînd în cele m ochiuri ale rețelei teorema a II-a a lui Kirchhoff, rezultă un sistem de m ecuații, avînd ca necunoscute cei m curenți ciclici, sistem care exprimă teorema circuitelor independente:

$$\sum_{p=1}^{m} R_{pq} I_q = E_q \text{ cu } q = 1, \ldots, m \tag{1-40}$$

Prin rezolvarea sistemului obținem soluția:

$$I_q = \sum_{p=1}^{m} E_p \frac{\Delta_{qp}}{\Delta}, \quad q = 1, \ldots, m$$

în care Δ este determinantul principal al sistemului, iar Δ_{qp} este minorul de ordinul $(m-1)$ corespunzător elementului de la intersecția coloanei q cu linia p.

Folosind teorema superpoziției, calculăm curenții reali, prin însumarea algebrică a curenților ciclici din laturi.

Teorema potențialelor la noduri

Considerăm o rețea liniară de curent continuu care are n noduri și l laturi. Pentru un nod oarecare k al rețelei, aplicînd teorema I a lui Kirchhoff, obținem:

$$\sum_{j=1}^{n-1} I_{jk} = 0,$$

în care I_{jk} este curentul din latura mărginită de nodurile j și k. Dacă j și k nu sînt noduri vecine $I_{jk} = 0$.

Din expresia generală a tensiunii la bornele laturii jk, $U_{jk} = I_{jk} \cdot R_{jk} - E_{jk}$, rezultă:

$$I_{jk} = \frac{1}{R_{jk}} (U_{jk} + E_{jk}) = G_{jk}(U_{jk} + E_{jk}),$$

unde R_{jk} și G_{jk} reprezintă rezistența și conductanța laturii jk, U_{jk} este tensiunea între nodurile j și k, iar E_{jk} este tensiunea electromotoare a surselor din latura jk.

Înlocuind I_{jk} în expresia teoremei I a lui Kirchhoff de mai sus rezultă:

$$\sum_{j=1}^{n-1} G_{jk}(U_{jk} + E_{jk}) = 0.$$

Considerînd că tensiunea U_{jk} este egală cu diferența dintre potențialele nodurilor j și k, adică:

$$U_{jk} = V_j - V_k$$

și înlocuind-o în expresia anterioară rezultă:

$$\sum_{j=1}^{n-1} G_{jk}(V_j - V_k) + \sum_{j=1}^{n-1} G_{jk} E_{jk} = 0$$

sau

$$\sum_{j=1}^{n-1} G_{jk} \cdot V_k - \sum_{j=1}^{n-1} G_{jk} \cdot V_j = \sum_{j=1}^{n-1} G_{jk} E_{jk}, \quad k = 1, 2, ..., n. \qquad (1\text{-}41)$$

Am obținut astfel un sistem de $(n-1)$ ecuații cu necunoscutele V_1, V_2, ..., V_{n-1}. Atribuind potențialului nodului n valoarea zero sistemul este compatibil determinat.

Pentru aplicarea ușoară a teoremei în calculul circuitelor electrice, facem următoarele precizări:

$\sum_{j=1}^{n-1} G_{jk}$ reprezintă suma conductanțelor laturilor ce se întîlnesc în nodul k;

$G_{jk} \cdot E_{jk} = I_{sc,jk}$ reprezintă curentul de scurtcircuit al sursei din latura jk.

1.3.3. Metode de calcul al rețelelor liniare de curent continuu

Pentru calculul corect al unei rețele de curent continuu (v. punctul 1.3.1) este necesară parcurgerea următoarelor etape:

1° realizarea schemei circuitului sub forma cea mai simplă posibilă, utilizînd teorema rezistoarelor echivalente și notarea, în această formă, a tuturor elementelor definitorii ale circuitului;

2° stabilirea arbitrară a sensurilor de referință ale curenților sau tensiunilor necunoscute, indicîndu-le prin săgeți pe schema rețelei;

3° scrierea modelului matematic al rețelei adică a ecuațiilor care descriu funcționarea rețelei date, prin aplicarea teoremelor și legilor circuitelor de curent continuu, model care constă în final într-un sistem algebric de l ecuații liniare cu l necunoscute;

4° rezolvarea sistemului și interpretarea rezultatelor. În cazul în care necunoscutele sînt curenți sau tensiuni, ele au sensul de referință ales inițial numai atunci cînd rezultă cu valori pozitive. Dacă rezolvarea sistemului de ecuații conduce la valori negative pentru unele necunoscute, înseamnă că sensul lor real este opus celui ales inițial;

5° verificarea soluției (folosind, de exemplu, teorema bilanțului puterilor sau alte metode).

Metodele cele mai des utilizate la calculul rețelelor de curent continuu sînt:

— metoda aplicării directe a teoremelor lui Kirchhoff;
— metoda aplicării teoremei circuitelor fundamentale independente;
— metoda aplicării teoremei potențialelor la noduri.

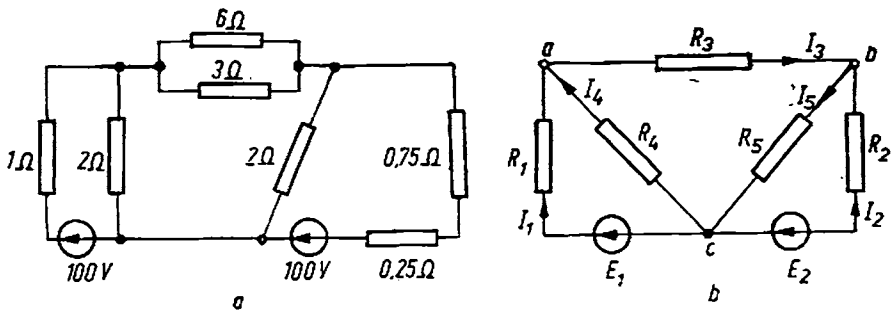


Fig. 1-38

Să exemplificăm aceste metode printr-o aplicație numerică. Să considerăm rețeaua din figura 1-38, *a* și să aplicăm pe rînd metodele de mai sus.

Pentru rezolvare, vom parcurge etapele enunțate anterior:

1° Calculăm rezistențele echivalente serie (pentru rezistoarele de 0,25Ω și 0,75Ω) și paralel (pentru cele de 3Ω și 6Ω) și realizăm scheme sub forma cea mai simplă (ca în figura 1-38, *b*).

Circuitul are: $n = 3$ noduri, $l = 5$ laturi, $m = l - n + 1 = 3$ ochiuri fundamentale, tensiunile electromotoare $E_1 = E_2 = 100$ V și rezistoarele: $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 2\Omega$.

2° Necunoscutele sînt curenții din laturi: I_1, I_2, I_3, I_4 și I_5, cu sensurile stabilite arbitrar (așa ca în figura 1-38, *b*).

3° Sistemul de l ecuații cu l necunoscute poate fi obținut prin mai multe procedee, așa ca mai jos.

Utilizarea teoremelor lui Kirchhoff. Putem scrie teorema I a lui Kirchhoff în $n - 1 = 2$ noduri și teorema a II-a a lui Kirchhoff în $m = 3$ ochiuri:

$$\begin{cases} I_1 + I_4 = I_3 \\ I_2 + I_3 = I_5 \\ R_1 I_1 - R_4 I_4 = E_1 \\ R_4 I_4 + R_3 I_3 + R_5 I_5 = 0 \\ -R_5 I_5 - R_2 I_2 = E_2 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} I_1 - I_3 + I_4 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_5 = 0 \\ I_1 - 2I_4 = 100 \\ 2I_3 + 2I_4 + 2I_5 = 0 \\ -I_2 - 2I_5 = 100 \end{cases}$$

Metoda curenților ciclici. Numărul de necunoscute al problemei se reduce la $m = 3$, acestea fiind curenții ciclici $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ și $\mathcal{I}_3$, ca în figura 1-39.

Sistemul de ecuații care conduce la rezolvarea problemei este:

$$\begin{cases} (R_1 + R_4)\,\mathcal{I}_1 - R_4\mathcal{I}_2 = E_1 \\ (R_3 + R_4 + R_5)\,\mathcal{I}_2 - R_4\mathcal{I}_1 - R_5\mathcal{I}_3 = 0 \\ (R_2 + R_5)\,\mathcal{I}_3 - R_4\mathcal{I}_2 = E_2 \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} (1 + 2)\,\mathcal{I}_1 - 2\mathcal{I}_2 = 100 \\ -2\mathcal{I}_1 + (2 + 2 + 2)\,\mathcal{I}_2 - 2\mathcal{I}_3 = 0 \\ -2\mathcal{I}_2 + (1 + 2)\,\mathcal{I}_3 = 100 \end{cases}$$

Cu soluția acestui sistem, se obțin curenții din laturi, cu relațiile:

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{I}_1 \\ I_2 &= -\mathcal{I}_3 \\ I_3 &= \mathcal{I}_2 \\ I_4 &= \mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1 \\ I_5 &= \mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3 \end{aligned}$$

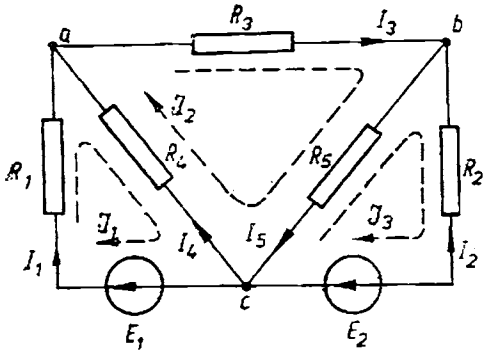


Fig. 1-39

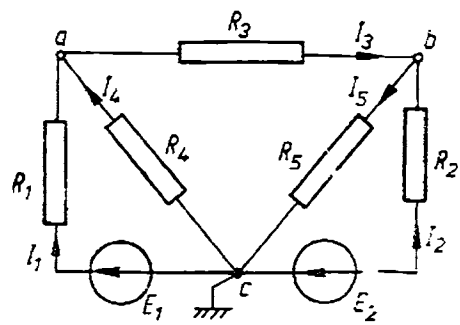


Fig. 1-40

Metoda potențialelor la noduri. Considerînd potențialul nodului c, nul (v. fig. 1-40), sistemul de $n-1=2$ ecuații cu două necunoscute (potențialele nodurilor a și b, V_a și V_b) se scrie:

$$\begin{cases} (G_1+G_3+G_4)V_a - G_3V_b = G_1E_1 \\ (G_2+G_3+G_5)V_b - G_3V_a = -G_2E_2 \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)V_a - \frac{1}{2}V_b = 1\cdot 100 \\ -\frac{1}{2}V_a + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)V_b = -1\cdot 100 \end{cases}$$

După rezolvarea acestui sistem, soluția finală se obține cu relațiile:

$$I_1 = G_1(E_1 - U_{ac}) = G_1(E_1 - V_a)$$
$$I_2 = -G_2(E_2 + U_{bc}) = -G_2(E_2 + V_b)$$
$$I_3 = G_3 \cdot U_{ab} = G_3(V_a - V_b)$$
$$I_4 = -G_4U_{ac} = -G_4V_a$$
$$I_5 = G_5U_{bc} = G_5V_b$$

4° Rezolvarea sistemelor conduce, în cele trei situații, la următoarele rezultate:

— aplicarea teoremelor lui Kirchhoff

$$I_1 = 60 \text{ A},\ I_2 = -60 \text{ A},\ I_3 = 40 \text{ A},\ I_4 = I_5 = -20 \text{ A};$$

— metoda curenților ciclici:

$\mathcal{J}_1 = 60$ A, $\mathcal{J}_2 = 40$ A, $\mathcal{J}_3 = 60$ A, de unde: $I_1 = 60$ A, $I_2 = -60$ A, $I_3 = 40$ A, $I_4 = 40 - 60 = -20$ A, $I_5 = 40 - 60 = -20$ A;

— metoda potențialelor la noduri:

$V_a = 40$ V, $V_b = -40$ V, de unde: $I_1 = \frac{1}{1}(100 - 40) = 60$ A, $I_2 = -\frac{1}{1}(100 - 40) = -60$ A, $I_3 = \frac{1}{2}(40 + 40) = 40$ A, $I_4 = -\frac{1}{2} \cdot 40 = -20$ A, $I_5 = \frac{1}{2} \cdot (-40) = -20$ A.

Notînd curenții din cele două laturi paralele ale circuitului inițial (cu rezistențele de 6Ω și 3Ω) cu I'_3 și I''_3, rezultă:

$$I'_3 = \frac{3}{3+6} I_3 = \frac{40}{3} A,$$

$$I''_3 = \frac{6}{3+6} I_3 = \frac{80}{3} A.$$

Soluția obținută în final (aceeași prin toate metodele) arată că sensurile reale ale curenților I_2, I_4 și I_5 sînt opuse celor alese inițial.

5° Relația de verificare a bilanțului puterilor este: $\sum_1^l E_k I_k = \sum_1^l R_k I_k^2$.

Înlocuind, pentru cazul concret analizat, rezultă:

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2,$$

adică: $100 \cdot 60 - 100 \cdot (-60) = 1 \cdot 60^2 + 1 \cdot (-60)^2 + 2 \cdot 40^2 + 2 \times (-20)^2 + 2 \cdot (-20)^2$, deci: 12 000 W = 12 000 W, identitate ce indică rezolvarea corectă a circuitului.

1.3.4. Rezolvarea asistată de calculatoare a circuitelor liniare de curent continuu

În cazul unor rețele cu un număr mare de laturi, rezolvarea sistemelor de ecuații, ce conduc la determinarea mărimilor electrice necunoscute, devine foarte laborioasă. În această situație este necesar să apelăm la mijloacele de calcul automat. În continuare, vom prezenta un exemplu de rezolvare a unui astfel de circuit cu asistența unui sistem de calcul FELIX C-256 aflat frecvent în dotarea centrelor de calcul din țara noastră și folosind pachetele de programe din biblioteca MATHLIB (v. „Programare").

Considerăm circuitul din figura 1-41.

Metoda aplicării directe a teoremelor lui Kirchhoff

În figura 1-42, *a* am notat mărimile cunoscute cu: $R_1, R_2, ..., R_{20}$ și $E_1, E_2, ..., E_{20}$, iar cele necunoscute cu: $I_1, I_2, ..., I_{20}$, pentru care am indicat și sensurile lor de referință, adoptate arbitrar.

Circuitul are $n = 12$ noduri, $l = 20$ laturi și $m = l - n + 1 = 9$ ochiuri fundamentale. Vom scrie teorema I a lui Kirchhoff în $n - 1 = 11$ noduri și teorema a II-a a lui Kirchhoff în $m = 9$ ochiuri:

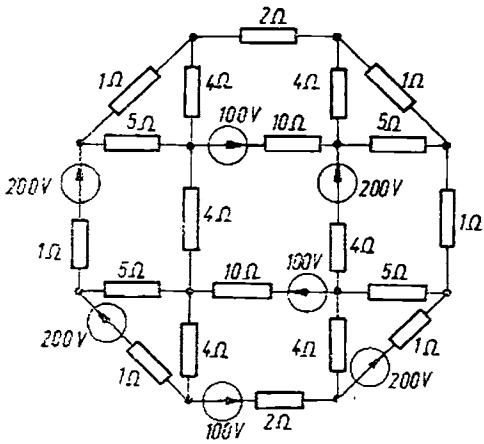
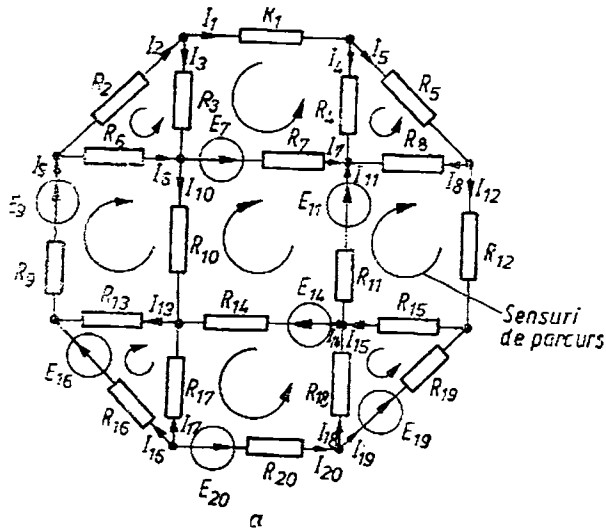


Fig. 1-41



a

Fig. 1-42 a

1. $I_1 - I_4 - I_5 = 0$
2. $-I_2 - I_6 + I_9 = 0$
3. $I_3 + I_6 - I_7 - I_{10} = 0$
4. $I_4 + I_7 + I_8 + I_{11} = 0$
5. $I_5 - I_8 - I_{12} = 0$
6. $-I_9 + I_{13} + I_{16} = 0$
7. $I_{10} - I_{13} + I_{14} + I_{17} = 0$
8. $-I_{11} - I_{14} + I_{15} + I_{18} = 0$
9. $I_{12} - I_{15} + I_{19} = 0$
10. $-I_{16} - I_{17} - I_{20} = 0$
11. $-I_{18} - I_{19} + I_{20} = 0$
12. $-R_2I_2 - R_3I_3 + R_6I_6 = 0$
13. $-R_1I_1 + R_3I_3 - R_4I_4 + R_7I_7 = E_7$
14. $R_4I_4 - R_5I_5 - R_8I_8 = 0$
15. $R_6I_6 + R_9I_9 + R_{10}I_{10} + R_{13}I_{13} = E_9$
16. $R_7I_7 - R_{10}I_{10} - R_{11}I_{11} + R_{14}I_{14} = E_7 - E_{11} + E_{14}$
17. $-R_8I_8 + R_{11}I_{11} + R_{12}I_{12} + R_{15}I_{15} = E_{11}$
18. $-R_{13}I_{13} + R_{16}I_{16} - R_{17}I_{17} = E_{16}$
19. $R_{14}I_{14} - R_{17}I_{17} + R_{18}I_{18} + R_{20}I_{20} = E_{14} + E_{20}$
20. $R_{15}I_{15} - R_{18}I_{18} + R_{19}I_{19} = E_{19}$

Scris matriceal, sistemul devine: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{B}$, unde matricele **A**, **I** și **B** au forma arătată în figura 1-42, *b*.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \\ I_{13} \\ I_{14} \\ I_{15} \\ I_{16} \\ I_{17} \\ I_{18} \\ I_{19} \\ I_{20} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Fig. 1-42 b

```
C    PROGRAM FORTRAN PENTRU CALCULUL CURENTILOR DIN CIRCUITUL REPREZENTAT
C    IN FIGURA 1-41 PRIN METODA APLICARII DIRECTE A TEOREMELOR LUI "KIRCH-
C    HOFF (CONFORM SCHEMEI DIN FIGURA 1-42A SI DATELOR DIN FIGURA 1-42B)
C
C     ALOCAREA MEMORIEI
      REAL I
      DIMENSION A(20,21),I(20)
C    INTRODUCEREA DATELOR PRIN CARTELE PERFORMATE:
C       -PE PRIMA CARTELA SE PERFOREAZA M (NUMARUL DE LINII AL SISTEMULUI
C            DE ECUATII ALGEBRICE LINIARE) CA INTREG PERFORAT PE PRIMELE
C            DOUA COLOANE
C       -PE URMATOARELE CARTELE SE PERFOREAZA COEFICIENTII SISTEMULUI,
C            LINIE DUPA LINIE (CITE O LINIE PE FIECARE CARTELA), CU FORMA-
C            TUL F3.0 (ULTIMA DATA DE PE CARTELA FIIND TERMENUL LIBER AL
C            SISTEMULUI DE PE ACEA LINIE)
      READ(105,1) M
      N=M+1
      L=M-1
      READ(105,2) ((A(K,J),J=1,N),K=1,M)
    1 FORMAT(I2)
    2 FORMAT(21F3.0,17X)
C
C    PROGRAMUL DE REZOLVARE AL SISTEMULUI DE ECUATII ALGEBRICE LINIARE
C    DIN FIGURA 1-42B PRIN METODA ELIMINARII -SCHEMA LUI GAUSS, VARIANTA
C    "INMULTIRII SI SCADERII"
      DO 9 K=1,L
      JJ=K
      ELEM=ABS(A(K,K))
      KP1=K+1
      DO 4 KI=KP1,M
      AR=ABS(A(KI,K))
      IF(ELEM-AR) 3,4,4
    3 ELEM=AR
      JJ=KI
    4 CONTINUE
      IF(JJ-K) 5,7,5
    5 DO 6 J=K,N
      TEMP=A(JJ,J)
      A(JJ,J)=A(K,J)
    6 A(K,J)=TEMP
    7 DO 8 KI=KP1,M
      CII=A(KI,K)/A(K,K)
      DO 8 J=KP1,N
    8 A(KI,J)=A(KI,J)-CII*A(K,J)
      DO 9 KI=KP1,M
    9 A(KI,K)=0.
      I(M)=A(M,N)/A(M,M)
      DO 11 NN=1,L
      SUMA=0.
      KI=M-NN
      IP1=KI+1
      DO 10 J=IP1,M
   10 SUMA=SUMA+A(KI,J)*I(J)
   11 I(KI)=(A(KI,N)-SUMA)/A(KI,KI)
C
C    EXTRAGEREA VALORILOR SOLUTIEI SISTEMULUI
      WRITE(108,12) (KI,I(KI),KI=1,M)
      STOP
   12 FORMAT (1H1,10X,'CURENTII DIN LATURILE RETELEI - FIG. 1-41 SINT:'/
     1 1'0',13X,'LATURA NR.',8X,'CURENTUL '/(' ',17X,I2,8X,F10.5,1X,'AMPER
     2 1 '))
      END
```

CURENTII DIN LATURILE RETELEI - FIG. 1-41 SINT:

LATURA NR.	CURENTUL
1	4.08894 AMPERI
2	18.35667 AMPERI
3	14.26770 AMPERI
4	-4.26769 AMPERI
5	4.35662 AMPERI
6	15.08549 AMPERI
7	5.40363 AMPERI
8	-5.08548 AMPERI
9	33.44217 AMPERI
10	25.94952 AMPERI
11	5.94956 AMPERI
12	13.44213 AMPERI
13	-2.53354 AMPERI
14	9.35600 AMPERI
15	27.46645 AMPERI
16	35.97571 AMPERI
17	-37.83914 AMPERI
18	-12.16086 AMPERI
19	14.02430 AMPERI
20	1.80343 AMPERI

c

Fig. 1-42 c

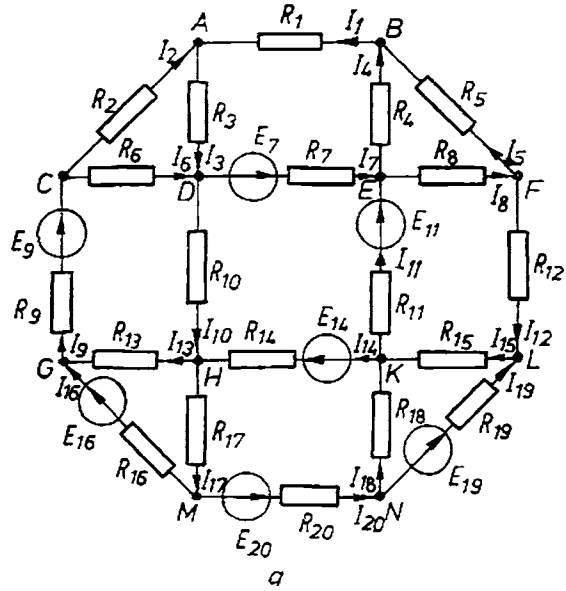


Fig. 1-43

Acest sistem a fost rezolvat printr-un algoritm bazat pe metoda eliminării (a lui Gauss), varianta înmulțirii și scăderii, așa cum rezultă din programul FORTRAN redat în lista din figura 1-42, *c*.

Datele de intrare sînt: M — numărul de linii (în cazul nostru, 20) și matricea asociată $a_{ij}b_j$, $i = 1, 2, ..., 20$ și $j = 1, 2, ..., 21$ introduse linie după linie cu formatele indicate în lista din figura 1-42, *c*, iar cele de ieșire sînt curenții I_k, $k = 1, 2, ..., 20$ tipăriți de imprimantă la finele listei din figura 1-42, *c*.

Metoda potențialelor la noduri

Aplicînd relația (1-41) circuitului din figura 1-43, *a* în nodurile $B, C, ..., N$ (considerînd nul, potențialul nodului A), se obține următorul sistem de ecuații, cu necunoscutele $V_B, V_C, ..., V_N$ (sau $V_1, V_2, ..., V_{11}$).

1. $(G_1 + G_4 + G_5)\, V_B - G_4 V_E - G_5 V_F = 0$
2. $(G_2 + G_6 + G_9)\, V_C - G_6 V_D - G_9 V_G = G_9 E_9$
3. $(G_3 + G_6 + G_7 + G_{10})\, V_D - G_6 V_C - G_7 V_E - G_{10} V_H = -G_7 E_7$
4. $(G_4 + G_7 + G_8 + G_{11})\, V_E - G_4 V_B - G_7 V_D - G_8 V_F - G_{11} V_K = G_7 E_7 + G_{11} E_{11}$
5. $(G_5 + G_8 + G_{12})\, V_F - G_5 V_B - G_8 V_E - G_{12} V_L = 0$
6. $(G_9 + G_{13} + G_{16})\, V_G - G_9 V_C - G_{13} V_H - G_{16} V_M = -G_9 E_9 + G_{16} E_{16}$
7. $(G_{10} + G_{13} + G_{14} + G_{17})\, V_H - G_{10} V_D - G_{13} V_G - G_{14} V_K - G_{17} V_M = G_{14} E_{14}$
8. $(G_{11} + G_{14} + G_{15} + G_{18})\, V_K - G_{11} V_E - G_{14} V_H - G_{15} V_L - G_{18} V_N =$
$$= -G_{11} E_{11} - G_{14} E_{14}$$
9. $(G_{12} + G_{15} + G_{19})\, V_L - G_{12} V_F - G_{15} V_K - G_{19} V_N = G_{19} E_{19}$

10. $(G_{16} + G_{17} + G_{20})\, V_M - G_{16}V_G - G_{17}V_H - G_{20}V_N = -G_{16}E_{16} - G_{20}E_{20}$

11. $(G_{18} + G_{19} + G_{20})\, V_N - G_{18}V_K - G_{19}V_L - G_{20}V_M = -G_{19}E_{19} + G_{20}E_{20}$

unde:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = 0{,}5\text{S};\quad G_6 = \frac{1}{R_6} = 0{,}2\text{S};\quad G_{11} = \frac{1}{R_{11}} = 0{,}25\text{S};\quad G_{16} = \frac{1}{R_{16}} = 1\text{S}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = 1\text{S};\quad G_7 = \frac{1}{R_7} = 0{,}1\text{S};\quad G_{12} = \frac{1}{R_{12}} = 1\text{S};\quad G_{17} = \frac{1}{R_{17}} = 0{,}25\text{S}$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = 0{,}25\text{S};\quad G_8 = \frac{1}{R_8} = 0{,}2\text{S};\quad G_{13} = \frac{1}{R_{13}} = 0{,}2\text{S};\quad G_{18} = \frac{1}{R_{18}} = 0{,}25\text{S}$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = 0{,}25\text{S};\quad G_9 = \frac{1}{R_9} = 1\text{S};\quad G_{14} = \frac{1}{R_{14}} = 0{,}1\text{S};\quad G_{19} = \frac{1}{R_{19}} = 1\text{S}$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = 1\text{ S};\quad G_{10} = \frac{1}{R_{10}} = 0{,}25\text{S};\quad G_{15} = \frac{1}{R_{15}} = 0{,}2\text{S};\quad G_{20} = \frac{1}{R_{20}} = 0{,}5\text{S}$$

Matriceal, sistemul se scrie: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{B}$, așa ca în figura 1-43,*b*.

De această dată, vom rezolva sistemul de mai sus utilizînd un program de bibliotecă MATHLIB, „specializat" în rezolvarea sistemelor cu matricea coeficienților în formă de bandă, denumit REBAN.

Apelarea acestui program se face așa cum rezultă din programul utilizator redat în figura 1-43,*c*.

Ca date de intrare se introduc: N — dimensiunea matricei coeficienților (în cazul nostru, 11), M — dimensiunea benzii (numărul de paralele la diagonala din bandă) — în cazul nostru 9, A — tablou monodimensional în care se află memorate elementele din banda matricei, B — tablou (vector) de dimensiune N, în care se află memorați termenii liberi.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 20 & -4 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 15 & -4 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -4 & 28 & -4 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -4 & 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 4 & 20 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix};\quad \underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \\ J_7 \\ J_8 \\ J_9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix}$$

b

Fig. 1-43

```
C     PROGRAM FORTRAN PENTRU CALCULUL CURENTILOR DIN CIRCUITUL REPREZENTAT
C     IN FIGURA 1-41 PRIN METODA POTENTIALELOR LA NODURI (CONFORM SCHEMEI
C     DIN FIGURA 1-43A SI A DATELOR DIN FIGURA 1-43B)
C
C     METODA CONSTA IN REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUATII ALGEBRICE LINIARE
C     DIN FIGURA 1-43B PRIN APELAREA PROGRAMULUI 'REBAN' DIN BIBLIOTECA
C      STIINTIFICA 'MATHLIB' CU RESTAURARE DE CATRE OPERATORUL DE SISTEM
C
C     PARAMETRII FORMALI AI RUTINEI 'REBAN' SINT:
C        A - TABLOUL CU COEFICIENTII SISTEMULUI DE ECUATII ALGEBRICE LINIA-
C            RE IN CARE TERMENII NENULI AI BENZII CU DIAGONALE SE ARANJEAZA
C            PORNIND DE LA CEA MAI DIN STINGA PARALELA CU DIAGONALA PRINCI-
C            PALA (DATE DE INTRARE)
C        B - TABLOUL CU COEFICIENTII TERMENILOR LIBERI AI SISTEMULUI (DATE
C            DE INTRARE)
C      EPS - DATA DE INTRARE PRIN CARE SE INDICA LIMITA SUB CARE PIVOTUL SE
C            CONSIDERA NUL
C      KOD - CODUL DE EROARE (DATA DE IESIRE CE POATE LUA UNA DIN VALORILE:
C            0 PENTRU SOLUTIE NORMALA, 1 PENTRU PIVOT NUL SAU 2 DACA EXISTA
C            ERORI IN ARGUMENTE)
C        N - NUMARUL DE LINII AL MATRICEI A
C        M - NUMARUL DE DIAGONALE AL MATRICEI A CARE ESTE IN FORMA DE BANDA
C
C     ALOCAREA MEMORIEI
C        MATRICEA COEFICIENTILOR A SE MEMOREAZA CA VECTOR COLOANA CU DIMEN-
C        SIUNEA N*M
      DIMENSION A(99),B(11)
C
C     INTRODUCEREA DATELOR
C        SE FACE PRIN CARTELE PERFORATE:
C           -PE PRIMA CARTELA SE PERFOREAZA N (PE COLOANELE 1 SI 2 CU FOR-
C            MATUL I2) SI M (PE COLOANELE 3 SI 4 CU FORMATUL I2)
C           -PE URMATOARELE CARTELE SE PERFOREAZA COEFICIENTII DIN BANDA
C            MATRICEI A (INCEPIND CU DIAGONALELE DE JOS SPRE CELE DE SUS PE
C            FIECARE DIAGONALA -COMPLETATA CU ZEROURI PINA LA NIVELUL DE SUS
C            SAU DE JOS AL DIAGONALEI PRINCIPALE PENTRU A AVEA TOATE N TER-
C            MENI- COEFICIENTII SE PERFOREAZA DE LA STINGA LA DREAPTA) SI
C            APOI CEI DIN COLOANA TERMENULUI LIBER B
      READ (105,1) N,M
      READ (105,2) A,B
      EPS=.000001
C
C     APELAREA SUBRUTINEI DE REZOLVARE A SISTEMULUI
      CALL REBAN (A,B,EPS,KOD,N,M)
C
C     SCRIEREA POTENTIALELOR LA NODURI
      WRITE (108,3) (A,B(K),K=1,N)
      STOP
    1 FORMAT (2I2)
    2 FORMAT (16F5.2)
    3 FORMAT (1H1,10X,'VALORILE POTENTIALELOR LA NODURI SINT: '//10X,12X,
     1'NODURL',10X,'POTENTIALUL '//(1H ,14X,I2,4X,F16.5,' VOLTI '))
      END
```

```
VALORILE POTENTIALELOR LA NODURI SINT:

  NODURL          POTENTIALUL
     1          -12.85486 VOLTI
     2           19,28896 VOLTI
     3          -50.26382 VOLTI
     4           23.11450 VOLTI
     5          -16,71734 VOLTI
     6         -146.71170 VOLTI
     7         -158.32115 VOLTI
     8         -101.61062 VOLTI
     9          -28.54628 VOLTI
    10         -310.39038 VOLTI
    11         -213.78258 VOLTI
```

Fig. 1-43, *c*

Cu soluția V a sistemului (fig. 1-43,*c*), curenții din laturi se calculează cu relațiile:

$$I_1 = -G_1V_B = 4{,}089 \text{ A}$$
$$I_2 = -G_2V_C = -18{,}356 \text{ A}$$
$$I_3 = -G_3V_D = 14{,}267 \text{ A}$$
$$I_4 = G_4(V_B - V_E) = -4{,}267 \text{ A}$$
$$I_5 = G_5(V_B - V_F) = 8{,}356 \text{ A}$$
$$I_6 = G_6(V_C - V_D) = 15{,}085 \text{ A}$$
$$I_7 = G_7(E_7 + V_D - V_E) = 3{,}403 \text{ A}$$
$$I_8 = G_8(V_E - V_F) = 5{,}085 \text{ A}$$
$$I_9 = G_9(E_9 + V_G - V_C) = 33{,}442\text{A}$$
$$I_{10} = G_{10}(V_D - V_H) = 25{,}949 \text{ A}$$
$$I_{11} = G_{11}(E_{11} + V_K - V_E) = 5{,}949 \text{ A}$$
$$I_{12} = G_{12}(V_F - V_L) = 13{,}442 \text{ A}$$
$$I_{13} = G_{13}(V_G - V_H) = 2{,}533 \text{ A}$$
$$I_{14} = G_{14}(E_{14} + V_K - V_H) = 9{,}356 \text{ A}$$
$$I_{15} = G_{15}(V_K - V_L) = -27{,}466 \text{ A}$$
$$I_{16} = G_{16}(E_{16} + V_M - V_G) = 35{,}976 \text{ A}$$
$$I_{17} = G_{17}(V_H - V_M) = 37{,}839 \text{ A}$$
$$I_{18} = G_{18}(V_K - V_N) = 12{,}160 \text{ A}$$
$$I_{19} = G_{19}(E_{19} + V_N - V_L) = 14{,}024\text{A}$$
$$I_{20} = G_{20}(E_{20} + V_M - V_N) = 1{,}863 \text{ A}$$

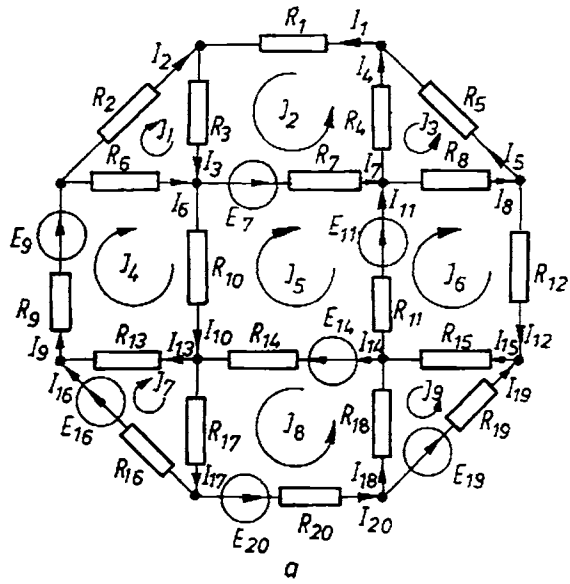


Fig. 1-44

Metoda curenților ciclici

Aplicînd relația (1-40) pentru cele $m = 9$ ochiuri independente ale circuitului din figura 1-44,*a* rezultă sistemul de ecuații:

1. $(R_2 + R_3 + R_6)\,\mathcal{J}_1 + R_3\mathcal{J}_2 - R_6\mathcal{J}_4 = 0$

2. $(R_1 + R_3 + R_4 + R_7)\,\mathcal{J}_2 + R_3\mathcal{J}_1 - R_4\mathcal{J}_3 + R_7\mathcal{J}_5 = E_7$

3. $(R_4 + R_5 + R_8)\,\mathcal{J}_3 - R_4\mathcal{J}_2 + R_8\mathcal{J}_6 = 0$

4. $(R_6 + R_9 + R_{10} + R_{13})\,\mathcal{J}_4 - R_6\mathcal{J}_1 - R_{10}\mathcal{J}_5 - R_{13}\mathcal{J}_7 = E_9$

5. $(R_7 + R_{10} + R_{11} + R_{14})\,\mathcal{J}_5 + R_7\mathcal{J}_2 - R_{10}\mathcal{J}_4 - R_{11}\mathcal{J}_6 + R_{14}\mathcal{J}_8 = E_7 - E_{11} + E_{14}$

6. $(R_8 + R_{11} + R_{12} + R_{15})\,\mathcal{J}_6 + R_8\mathcal{J}_3 - R_{11}\mathcal{J}_5 + R_{15}\mathcal{J}_9 = E_{11}$

7. $(R_{13} + R_{16} + R_{17})\,\mathcal{J}_7 - R_{13}\mathcal{J}_4 + R_{17}\mathcal{J}_8 = E_{16}$

8. $(R_{14} + R_{17} + R_{18} + R_{20})\,\mathcal{J}_8 + R_{14}\mathcal{J}_5 + R_{17}\mathcal{J}_7 - R_{18}\mathcal{J}_9 = E_{14} + E_{20}$

9. $(R_{15} + R_{18} + R_{19})\,\mathcal{J}_9 + R_{15}\mathcal{J}_6 - R_{18}\mathcal{J}_8 = E_{19}$

Matriceal, sistemul se scrie $\mathbf{A} \cdot \mathcal{J} = \mathbf{B}$, așa ca în figura 1-44,*b*.

Matricea sistemului de ecuații obținut fiind tot o matrice de tip „bandă", rezolvarea acestuia o vom face tot prin apelarea programului de bibliotecă REBAN, așa cum rezultă din lista redată în figura 1-44,*c*.

$$A = \begin{bmatrix} 1,75 & 0 & 0 & 0,25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,2 & -0,2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0,8 & -0,1 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,1 & 0,8 & -0,2 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -0,2 & 2,2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2,2 & -0,2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0 & -0,2 & 0,8 & -0,1 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,25 & 0 & 0 & -0,1 & 0,8 & -0,2 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,2 & 2,2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,25 & 0 & 0 & 1,75 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,25 & -1 & -0,5 & 1,75 \end{bmatrix}; V = \begin{bmatrix} V_B \\ V_C \\ V_D \\ V_E \\ V_F \\ V_G \\ V_H \\ V_K \\ V_L \\ V_M \\ V_N \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ -10 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ -60 \\ 200 \\ -250 \\ -150 \end{bmatrix}$$

b

Fig. 1-44

```
      C
      C     PROGRAM FORTRAN PENTRU CALCULUL RETELEI REPREZENTATE IN FIGURA 1-41
      C     PRIN METODA CURENTILOR CICLICI (CONFORM SCHEMEI DIN FIGURA 1-44A SI
      C     A DATELOR DIN FIGURA 1-44B)
      C
      C
      C        PENTRU REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUATII ALGEBRICE LINIARE
      C        @IN FIGURA 1-44B AM FOLOSIT RUTINA 'REBAN' DIN BIBLIOTECA
      C        CU PROGRAME STIINTIFICE 'MATHLIB', ASA CUM AM PRECIZAT IN
      C        COMENTARIILE INSERATE IN LISTA DIN FIGURA 1-43C
      C
      C     ALOCAREA MEMORIEI
            DIMENSION A(63),B(9)
      C
      C     INTRODUCEREA DATELOR
            READ (105,1) N,M
            READ (105,2) A,B
            EPS=.000001
          1 FORMAT (2I2)
          2 FORMAT (16F5.0)
      C
      C     APELAREA RUTINEI PENTRU REZOLVAREA SISTEMULUI DIN FIGURA 1-44B
            CALL REBAN(A,B,EPS,KOD,N,M)
      C
      C     SCRIEREA REZULTATELOR (VALORILE CURENTILOR CICLICI)
            WRITE(108,3)(K,B(K),K=1,N)
            STOP
          3 FORMAT('1',10X,'VALORILE CURENTILOR CICLICI SINT: '/'0',11X,
           1'OCHIUL',11X,'CURENTUL '/(' ',14X,I2,9X,F16.5,' AMPERI '))
            END
```

```
VALORILE CURENTILOR CICLICI SINT:

 OCHIUL          CURENTUL
      1       18.35664  AMPERI
      2       -4.08895  AMPERI
      3       -8.35665  AMPERI
      4       33.48214  AMPERI
      5        7.49258  AMPERI
      6       13.44213  AMPERI
      7       35.97571  AMPERI
      8        1.86343  AMPERI
      9       14.02431  AMPERI
```

c

Fig. 1-44

Soluția sistemului (v. fig. 1-44,*c*) reprezintă valorile curenților ciclici $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, ..., $\mathcal{J}_9$. Cu acestea, curenții din laturi se calculează cu relațiile:

$I_1 = \mathcal{J}_2 = -4{,}08895$ A

$I_2 = \mathcal{J}_1 = 18{,}35664$ A

$I_3 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = 14{,}26769$ A

$I_4 = \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3 = 4{,}2677$ A

$I_5 = \mathcal{J}_3 = -8{,}35665$ A

$I_6 = -\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_4 = 15{,}0855$ A

$I_7 = \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_5 = 3{,}40363$ A

$I_8 = \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_6 = 5{,}08548$ A

$I_9 = \mathcal{J}_4 = 33{,}44214$ A

$I_{10} = \mathcal{J}_4 - \mathcal{J}_5 = 25{,}94956$ A

$I_{11} = -\mathcal{J}_5 + \mathcal{J}_6 = 5{,}949555$ A

$I_{12} = \mathcal{J}_6 = 13{,}44213$ A

$I_{13} = \mathcal{J}_4 - \mathcal{J}_7 = -2{,}53357$ A

$I_{14} = \mathcal{J}_5 + \mathcal{J}_8 = 9{,}35601$ A

$I_{15} = \mathcal{J}_6 + \mathcal{J}_9 = 27{,}46644$ A

$I_{16} = \mathcal{J}_7 = 35{,}97571$ A

$I_{17} = \mathcal{J}_7 + \mathcal{J}_8 = 37{,}83914$ A

$I_{18} = \mathcal{J}_8 - \mathcal{J}_9 = -12{,}16088$ A

$I_{19} = \mathcal{J}_9 = 14{,}02431$ A

$I_{20} = \mathcal{J}_8 = 1{,}86343$ A

Cititorul a reținut, din exemplele de mai sus, că utilizarea tehnicii de calcul la rezolvarea circuitelor de curent continuu — propusă aici — se reduce la simpla aplicare a unor programe de bibliotecă specializate în rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice liniare, ce descriu regimul electrocinetic al rețelei date.

Există și algoritmi (deci și programe) specializați în calculul rețelelor electrice de anvergură. Prezentarea unui astfel de algoritm — chiar numai ca exemplu — depășește cadrul acestui manual.

Capitolul 2

CIRCUITE ELECTRICE LINIARE DE CURENT ALTERNATIV

În cadrul acestui capitol vom studia comportarea circuitelor electrice liniare, filiforme și cu parametrii R, L, C localizați (v. 1.1.2) în regim electrocinetic periodic sinusoidal (v. 1.1.3), regim pe care îl vom numi de *curent alternativ sinusoidal.*

Importanța studierii regimului sinusoidal rezultă din faptul că, în practică, producerea, transportul și distribuția energiei electrice se face prin tensiuni și curenți alternativi cu formă practic sinusoidală, cu frecvența — în general — de 50 Hz, sistem care s-a dovedit a fi cel mai economic. În plus, numeroase utilizări importante ale energiei electromagnetice ca, de exemplu, acționările cu motoare asincrone (v. § 6.3), încălzirea prin inducție (v. 4.4.3), unele aplicații din radioelectronică (v. „Electronică industrială și automatizări") se studiază în regim sinusoidal.

În cele ce urmează vom trata dipolii R, L, C în regim variabil (cazul general) și în regim sinusoidal (ca pe un caz particular al regimului variabil) apoi vom prezenta calculul circuitelor electrice liniare de curent alternativ sinusoidal și, în final, circuitele electrice trifazate.

2.1. REGIMUL VARIABIL AL CIRCUITELOR ELECTRICE

În capitolul 2 am stabilit forma locală a legii curentului electric de conducție — v. 1.2.2, relația (1-25). În curent variabil, această lege se exprimă prin modelul:

$$\bar{E}_c + \bar{E}_s + \bar{E}_i = \rho \bar{J}, \tag{2-1}$$

în care ρ este rezistivitatea conductorului, $\bar{E}_c$ este cîmpul electric „coulomb"-ian stabilit de sarcinile electrice (cîmp potențial), $\bar{E}_s$ este cîmpul electric rezultat din variația cîmpului magnetic (cîmp solenoidal, adică rotațional, dar de divergență nulă), iar $\bar{E}_i$ este cîmpul imprimat. Într-un circuit cu conductoare filiforme, pe un contur închis parcurs de-a lungul conductoarelor, forma integrală a acestei legi este:

$$\Sigma ri = \Sigma e.$$

Subliniem că termenul din dreapta provine numai din circulația efectuată cu $\bar{E}_s$ și cu $\bar{E}_i$, deoarece $\bar{E}_c$ este un cîmp potențial la care circulația pe un contur închis este nulă. Pentru un contur deschis, delimitat de punctele a și b, vom avea:

$$\sum_{ab} ri = u_{ab},$$

unde prin u_e se înțelege t.e.m. pe conturul deschis, de la a la b. Semnul termenilor ri din suma din membrul stîng se obține prin compararea sensului circulației cu sensul curentului i. Cînd aceste sensuri coincid, termenul respectiv are semnul $+$, iar în caz contrar semnul $-$.

Denumim, în general, tensiune la borne u_{ab} tensiunea efectuată de la borna a la borna b, prin dielectricul care separă cele două borne (*nu* de-a lungul conductoarelor).

2.1.1. Tensiunea la borne

Să aplicăm (2-1) la cazul unor dipoli simpli formați dintr-un rezistor, o bobină sau un condensator.

Tensiunea la bornele unui rezistor

Aici considerăm că $\bar{E}_s = 0$, deși rezistorul este parcurs de un curent variabil; aceasta este echivalent cu a neglija inductivitatea. Dacă neglijăm și capacitatea rezistorului, dipolul este caracterizat exclusiv prin parametrul R (fig. 2-1). Atunci, relația (2-1) devine:

$$\rho J = \bar{E}_e.$$

De aici rezultă că tensiunea la borne (efectuată cum indică săgeata pe figura 2-1) este egală cu tensiunea efectuată de-a lungul conductorului de la a la b, deoarece E_e este un cîmp potențial și tensiunea nu depinde de drumul parcurs. Vom avea deci:

$$Ri = u_{ab} \tag{2-2}$$

sau:

$$i = Gu_{ab}. \tag{2-3}$$

Evident, dacă parcurgem circuitul de la b la a, vom avea:

$$-Ri = u_{ba}, \text{ adică } u_{ab} = -u_{ba}.$$

Aici am ținut seama de regula de asociere a sensului tensiunii la borne și a curentului (enunțată la 1.2.1).

Termenul Ri se numește și *cădere de tensiune rezistivă*.

Tensiunea la bornele unui condensator

Condensatorul este considerat perfect, fără pierderi. Vom accepta definiția dată capacității condensatorului în regim electrostatic:

$$q = Cu \text{ — v. (1-12)}.$$

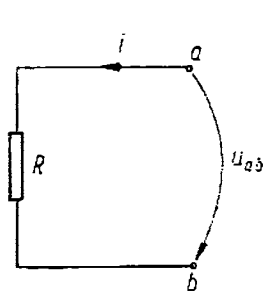


Fig. 2-1

De asemenea, considerăm peste tot $\rho = 0$ în conductor și presupunem că prin variația cîmpului electric nu apar pierderi în dielectric. Totodată vom neglija efectul variației cîmpului magnetic. În rezumat, considerăm că dipolul este caracterizat numai prin capacitatea condensatorului C și că R și L sînt neglijabile (fig. 2-2).

Conform legii conservării sarcinii (1-23), în suprafața închisă Σ care înconjură complet condensatorul intră (și iese) curentul de conducție $i = dq/dt$.

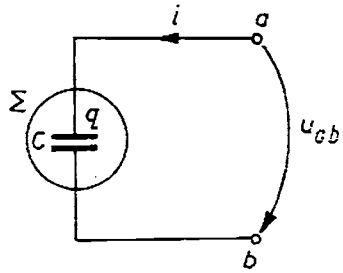


Fig. 2-2

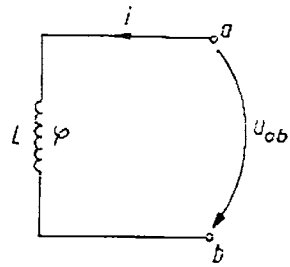


Fig. 2-3

Considerăm deci că în afara dielectricului condensatorului, densitatea curentului de deplasare * este nulă. În aceste condiții simplificate, tensiunea la bornele condensatorului este egală cu tensiunea efectuată prin dielectric, între armăturile condensatorului, în condițiile unui cîmp potențial. Rezultă deci: $q = C\,u_{ab} = \int i\,dt + const.$ de unde:

$$u_{ab} = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt, \tag{2-4}$$

care este tensiunea la bornele condensatorului, asociată cu sensul curentului de la *a* la *b*.

Dacă este dată tensiunea la borne, curentul va fi:

$$i = C\frac{du_{ab}}{dt}, \tag{2-5}$$

deoarece C este un parametru constant.

Tensiunea la bornele unei bobine

Considerăm o bobină perfectă, fără pierderi și cu capacitate neglijabilă (fig. 2-3). Deci dipolul este caracterizat exclusiv prin parametrul L. Considerăm, de asemenea, cîmpul magnetic concentrat numai în bobină și că pe traseul pe care determinăm tensiunea la borne nu există cîmp magnetic variabil ($\bar{E}_s = 0$).

În conductorul bobinei (presupus perfect), legea curentului de conducție ia forma: $0 = \bar{E}_c + \bar{E}_s$, deoarece $\rho = 0$.

Efectuînd circulația în lungul conductorului vom avea: $0 = u_{ab} - \frac{d\varphi}{dt}$ (conform legii inducției electromagnetice, cunoscută de la „Fizică" — v. 4.1.3.

Notăm că $\int_{ab} \bar{E}_c \cdot d\bar{l}$ nu depinde de drum. Din această ultimă relație rezultă:

$$u_{ab} = \frac{d\varphi}{dt} \text{ unde } -\frac{d\varphi}{dt} = e_L \text{ și } \varphi = Li.$$

---

* Prin condensator în curentul variabil se stabilește un *curent de deplasare* (v. „Fizica"): $i = i_D = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_\Sigma \bar{D}\cdot d\bar{A}$ în care: Σ — o suprafață închisă ce cuprinde în interior armătura condensatorului pe care există sarcina q și $\bar{D}$ — inducția cîmpului electric dintre armăturile condensatorului.

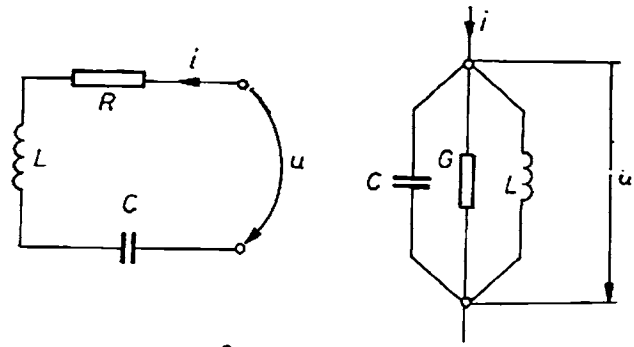


Fig. 2-4

Sensurile lui e_L și i sînt asociate cu φ după regula burghiului drept. Rezultă:

$$u_{ab} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{2-6}$$

Dacă este cunoscută tensiunea la bornele bobinei, atunci curentul care o parcurge e dat de relația:

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t u_{ab}\,\mathrm{d}t, \tag{2-7}$$

deoarece pe L l-am considerat un parametru constant.

Regulă de dualitate

Dacă centralizăm formulele de mai sus în tabela următoare:

$$u_R = Ri \qquad i_G = Gu$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad i_c = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$u_c = \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t \qquad i_L = \frac{1}{L}\int u\,\mathrm{d}t,$$

observăm că există o analogie formală între relațiile care dau pe u și cele care dau pe i. De aici rezultă o regulă de dualitate pentru circuitele care sînt exprimate prin relații analoge. De exemplu, acesta este cazul circuitelor din figura 2-4.

2.1.2. Teoremele energiei

Să considerăm circuitul din figura 2-5 și să-l analizăm sub aspectul energiei electromagnetice produsă de sursă în acest caz.

Vom considera circuitul imobil (deci nu apare lucru mecanic), parcurs de un curent i_0. Corespunzător acestui curent, prin fiecare spiră a bobinei se va

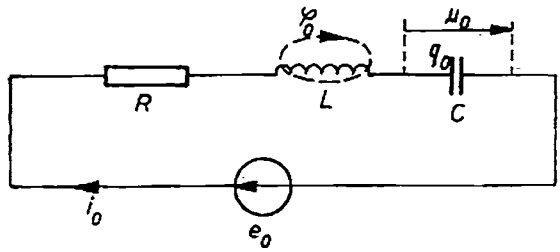


Fig. 2-5

stabili un flux magnetic φ_0 (v. 4.1.3), iar armăturile condensatorului se vor încărca cu o sarcină electrică q_0 și vor avea o tensiune u_0. Pentru a realiza această situație, să presupunem că dăm curentului din circuit o creștere lentă, pornind de la zero, prin creșterea corespunzătoare a t.e.m. a sursei din circuit; la un moment dat avem:

t.e.m.	$e = \lambda e_0$,
curentul	$i = \lambda i_0$,
fluxul	$\varphi = \lambda \varphi_0$,
sarcina	$q = \lambda q_0$,
tensiunea	$u = \lambda u_0$,

unde λ este un coeficient care crește de la 0 la 1. Relațiile de mai sus presupun că permeabilitatea mediului în care se află bobina și permitivitatea dielectricului condensatorului sînt constante.

Creșterile elementare ale mărimilor de mai sus vor fi:

$$de = e_0 d\lambda, \quad di = i_0 d\lambda, \quad d\varphi = \varphi_0 \, d\lambda, \, dq = q_0 d\lambda \text{ și } du = u_0 d\lambda.$$

Conform relației din figura 2-4,*a*, la momentul t vom avea:

$$e = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i \, dt = Ri + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{q}{C}$$

și înmulțind cu $i\,dt$ obținem:

$$ei \, dt = Ri^2 \, dt + i \, d\varphi + \frac{q}{C} i \, dt = Ri^2 \, dt + i \, d\varphi + \frac{q}{C} dq,$$

știind că $idt = dq$, unde: $eidt$ reprezintă energia debitată de sursă în intervalul de timp dt, Ri^2dt este energia transformată în căldură prin efect Joule (v. 1.2.2), $id\varphi$ reprezintă creșterea energiei cîmpului magnetic și $\frac{q}{C} i \, dt = u \, dq$ este creșterea energiei cîmpului electric din dielectricul condensatorului.

Deci, energia produsă de sursă într-un interval de timp dt ($eidt$) se „distribuie" în circuit astfel: o parte (Ri^2dt) „părăsește" ireversibil circuitul transformîndu-se într-o altă formă de energie (calorică, chimică, lucru mecanic etc.), conform efectului electrocinetic din consumatorul reprezentat prin rezistorul cu rezistența R; altă parte ($id\varphi$) se „înmagazinează" în mediul

în care bobina a produs cîmpul magnetic (reprezintă energia magnetică dW_m), iar alta (udq) se „înmagazinează" în dielectricul condensatorului, reprezentînd energia cîmpului electric produs în dielectric (dW_e).

Prin urmare: $dW_m = id\varphi$ și $dW_e = udq$. În cazul mai multor spire, bobine, condensatoare, circuite etc., energiile respective se adună și vom avea:

$$dW_m = \sum_{k=1}^{n} i_k \, d\varphi_k \tag{2-8}$$

și

$$dW_e = \sum_{k=1}^{n} u_k \, dq_k. \tag{2-9}$$

Cînd λ crește de la 0 la 1, aceste energii sînt:

$$W_m = \int_0^1 \lambda i_0 \, d\lambda\varphi_0 = i_0\varphi_0 \int_0^1 \lambda \, d\lambda,$$

$$W_e = \int_0^1 u \, dq = \int_0^1 \lambda u_0 \, d\lambda q_0 = u_0 q_0 \int_0^1 \lambda \, d\lambda.$$

Rezultă:

$$W_m = \frac{1}{2} \varphi_0 i_0 \tag{2-10}$$

și

$$W_e = \frac{1}{2} q_0 u_0. \tag{2-11}$$

În cazul mai multor spire sau bobine și condensatoare, deoarece energiile se conservă (se adună), vom putea scrie:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{0k} i_{0k} \text{ și } W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} q_{0k} u_{0k}.$$

Din cele de mai sus rezultă:

— energia magnetică proprie a unei bobine (cu $\mu = const.$) în care s-a produs fluxul magnetic total Φ (v. 4.1.3) este:

$$W_m = \frac{1}{2} \Phi i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}, \tag{2-12}$$

care se înmagazinează în materialul în care s-a produs cîmpul (în miezul bobinei):

— energia cîmpului electric din dielectricul unui condensator (localizată în interiorul acestui dielectric cu $\varepsilon = const.$) încărcat cu sarcină electrică q este:

$$W_e = \frac{1}{2} qu = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \tag{2-13}$$

Pentru descrierea repartiției acestor energii în materialul mediului magnetizat, sau în care s-a produs cîmpul electric, este necesar să determinăm densitatea de volum a acestor energii:

$$w_m = \frac{dW_m}{dv} \text{ și } w_e = \frac{dW_e}{dv},$$

unde v reprezintă volumul materialului în care s-a acumulat energia magnetică W_m sau electrică W_e.

Pentru aceasta să considerăm cazul unei bobine înfășurată uniform pe un suport foarte lung situat într-un mediu izotop cu permeabilitate constantă. Atunci, în interiorul bobinei, din motive de simetrie, intensitatea cîmpului electric este constantă și din legea circuitului magnetic (4-5,*a*) rezultă: $Hl = Nli$, adică $H = Ni$ (aici N este numărul de spire pe unitatea de lungime a bobinei și l — lungimea ei). Pentru un volum $v = Al$ delimitat în interiorul bobinei (de arie transversală A) și știind (v. 4.1.3) că fluxul total al bobinei se poate calcula cu formula $\Phi = BANl$, rezultă ca expresie a energiei magnetice din materialul cu volumul v:

$$W_m = \frac{1}{2}\Phi \cdot i = \frac{1}{2} BANl \cdot \frac{H}{N} = \frac{BH}{2} Al = \frac{BH}{2} v$$

și atunci $w_m = dW_m/dv = W_m/v = \frac{BH}{2}$.

Expresia de mai sus a fost obținută într-un caz particular, dar se dovedește (v. „Fizica") că ea este valabilă în orice mediu, chiar cu cîmp neuniform (însă cu $\mu = const.$) și are forma generală:

$$w_m = \frac{\bar{B} \cdot \bar{H}}{2}.$$

Atunci, pentru a afla energia cîmpului magnetic dintr-un material cu volumul v, calculăm integrala:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_v \bar{B} \cdot \bar{H}\, dv.$$

Densitatea de volum a energiei cîmpului electric din dielectricul unui condensator se poate calcula și într-un caz particular, ca de exemplu: condensator plan (cu suprafața armăturilor A și distanța dintre ele d), cu $\varepsilon = const.$ și cîmp electric uniform. Obținem:

$$w_e = \frac{W_e}{v} = \frac{\frac{1}{2} qu}{Ad} = \frac{\frac{1}{2} qEd}{Ad} = \frac{1}{2}\frac{q}{A} E = \frac{1}{2} DE,$$

unde D este inducția electrică și E intensitatea cîmpului electric. Conform legii fluxului electric (v. „Fizica") $\oint_\Sigma \bar{D} \cdot d\bar{A} = q$ și din definiția tensiunii

electrice (v. „Fizica") $u_{ab} = \int_{a \to b} \bar{E} \cdot d\bar{l}$, a rezultat în acest caz particular că $u = Ed$ și $\frac{q}{A} = D$.

Se dovedește (v. „Fizica") faptul că expresia densității de volum a energiei electrice $w_e = \frac{1}{2} DE$, stabilită în cazul particular al condensatorului plan, este valabilă și în cazul general al unui cîmp electric în medii anizotrope (însă cu $\varepsilon = const.$) sub forma:

$$w_e = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E},$$

astfel că energia totală a cîmpului electric dintr-un mediu cu volumul v se poate determina prin integrala $W_e = \frac{1}{2} \int_v \bar{D} \cdot \bar{E} \, dv$.

2.2. REGIMUL SINUSOIDAL AL CIRCUITELOR ELECTRICE

În circuitele de curent alternativ acționcază tensiuni electromotoare, tensiuni și curenți care sînt funcții periodice de timp:

$$e(t) = e(t + KT); \quad u(t) = u(t + KT); \quad i(t) = i(t + KT),$$

în care: T este *perioada funcției* (adică intervalul de timp cel mai scurt în care funcția își „consumă" toate valorile, după care se repetă în aceeași ordine), iar K un număr întreg oarecare.

Numărul de perioade cuprinse în unitate de timp reprezintă *frecvența funcției* (f), iar produsul: $\omega = 2\pi f$ reprezintă *pulsația funcției*. Pentru funcțiile periodice există, deci, relațiile:

$$f = \frac{1}{T} \text{ și } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Perioada se măsoară în secunde iar frecvența în hertzi (Hz).

În circuitele practice de c.a. întîlnim tensiuni și curenți cu frecvențe cuprinse într-un domeniu foarte larg. Astfel centralele electrice de mare putere produc tensiuni cu frecvența de 50 Hz în Europa și 60 Hz în America; circuitele de telecomunicații funcționează cu frecvențe de ordinul kiloherților, iar cele de radiocomunicații cu frecvențe de ordinul megaherților (MHz).

În capitolul de față vom prezenta circuitele de c.a. de frecvență industrială (50 Hz), care corespund rețelelor electroenergetice cu răspîndirea cea mai mare.

Generatoarele de c.a. se construiesc în așa fel încît forma de variație în timp a tensiunilor produse să se apropie de o sinusoidă, motiv pentru care în circuitele de c.a. se poate considera cu bună aproximație că acționează tensiuni sinusoidale.

În cele ce urmează, vom considera elementele de circuit în c.a. (R, L, C) invariabile în raport cu tensiunea de la bornele lor și cu intensitatea curentului ce le străbate (circuite liniare). De asemenea, vom considera fiecare element de circuit ca acționînd în anumite puncte ale circuitului (circuite cu parametri localizați).

Restricțiile impuse mai sus se pot aplica cu rezultate bune la o mare parte a circuitelor practice. Alte stări de existență a circuitelor electrice vor face obiectul capitolului 3.

2.2.1. Caracteristicile mărimilor alternative sinusoidale

Așa cum am arătat, în marea majoritate a circuitelor de c.a. acționează tensiuni și curenți alternativi sinusoidali de forma:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u); \quad i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i), \tag{2-14}$$

în care: u și i sînt *valorile instantanee*; U_m și I_m sînt *valorile maxime* sau amplitudinile mărimilor sinusoidale; $(\omega t + \varphi_u)$ și $(\omega t + \varphi_i)$ — argumentul funcției sinusoidale care se numește *faza funcției*, mărimea variabilă în timp; φ_u și φ_i — *faza inițială* a funcției sinusoidale. În calculul circuitelor de c.a. se utilizează și alte mărimi caracteristice ale funcțiilor sinusoidale:

— *valoarea medie* pe o perioadă;

$$\widetilde{i} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} I_m \sin(\omega t + \varphi_i)\, dt = 0; \tag{2-15}$$

— *valoarea medie pe o semiperioadă*:

$$I_{med} = \frac{2}{T}\int_t^{t+\frac{T}{2}} I_m \sin(\omega t + \varphi_i)\, dt = \frac{2}{\pi} I_m; \tag{2-16}$$

— *valorile efective (eficace)*:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} U_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_u)\, dt}; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} I_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_i)\, dt},$$

adică:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \text{ și } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \tag{2-17}$$

Semnificația mărimilor caracteristice ale funcțiilor sinusoidale alternative este prezentată în figura 2-6.

Defazajul reprezintă diferența dintre fazele inițiale a două mărimi sinusoidale. Pentru două mărimi sinusoidale de forma:

$$u_1 = U_m \sin(\omega t + \varphi_{u1}) \text{ și } u_2 = U_m \sin(\omega t + \varphi_{u2}),$$

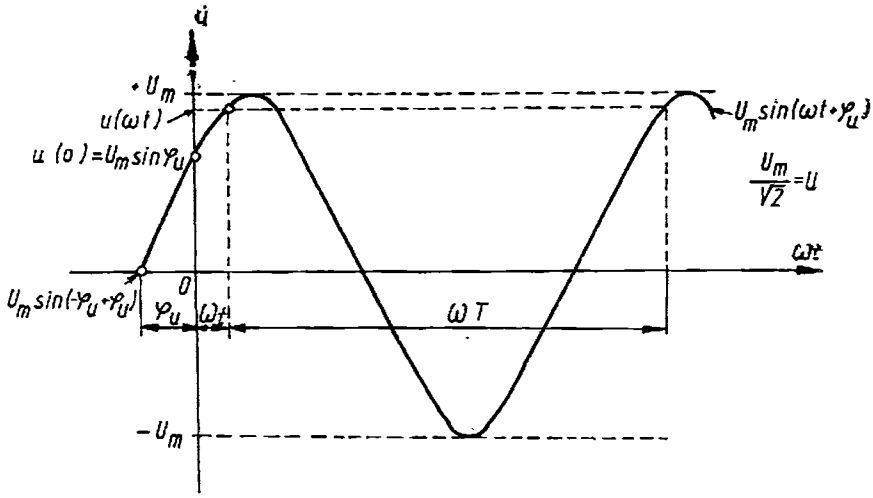


Fig. 2-6

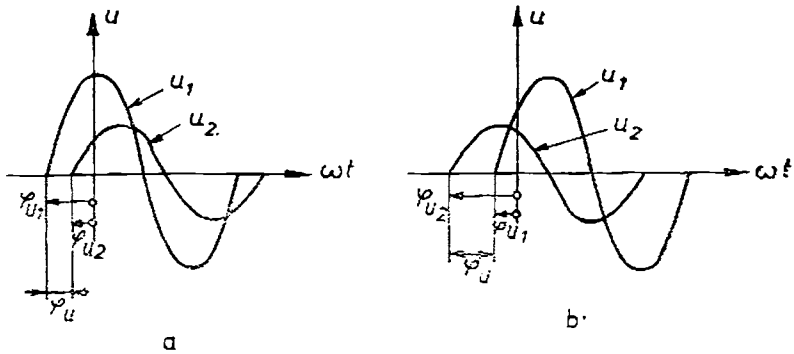


Fig. 2-7

defazajul este:

$$\varphi_u = \varphi_{u1} - \varphi_{u2} \tag{2-18}$$

Defazajul poate fi pozitiv sau negativ. Dacă $\varphi_{u1} - \varphi_{u2} > 0$ atunci u_1 este defazată înaintea lui u_2 (fig. 2-7, *a*), iar dacă $\varphi_{u1} - \varphi_{u2} < 0$, atunci u_1 este defazată în urma lui u_2 (fig. 2-7, *b*).

În cazurile particulare cînd: $\varphi_{u1} - \varphi_{u2} = 0$ mărimile sînt în fază, cînd $\varphi_{u1} - \varphi_{u2} = \frac{\pi}{2}$ mărimile sînt în cuadratură, iar cînd $\varphi_{u1} - \varphi_{u2} = \pi$ mărimile sînt în opoziție.

2.2.2. Reprezentarea mărimilor sinusoidale prin fazori

Mărimilor sinusoidale de timp li se poate atașa un pseudovector numit *fazor* (deoarece ocupă o poziție în spațiu corespunzător fazei funcției), în vederea transferării calculului cu mărimi sinusoidale asupra fazorilor.

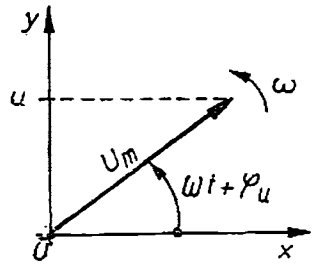


Fig. 2-8

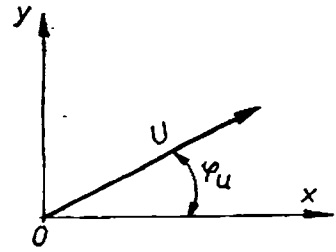


Fig. 2-9

Dacă avem o mărime sinusoidală de forma: $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, atunci i se poate ataşa un fazor definit astfel: faţă de o direcţie de referinţă (spre exemplu axa ox — fig. 2-8) se ia o direcţie la un unghi care corespunde fazei funcţiei la momentul respectiv. Pe această direcţie se ia un modul egal cu valoarea maximă a funcţiei. Fazorul se roteşte în spaţiu cu o viteză unghiulară egală cu pulsaţia funcţiei, ω.

Într-adevăr, proiecţia fazorului pe axa oy ne dă valoarea instantanee a funcţiei sinusoidale. Această reprezentare a funcţiilor sinusoidale prin fazori rotitori poartă denumirea de *reprezentare cinematică.*

În practica calculului circuitelor de c.a. în regim sinusoidal de obicei toate mărimile din circuit au aceeaşi pulsaţie, motiv pentru care se foloseşte o *reprezentare statică* prin fazorii de la momentul $t = 0$ (fig. 2-9). Întrucît calculul se face cu ajutorul mărimilor efective, modulul fazorului se ia egal cu valoarea efectivă. În acest caz, cînd se trece de la fazor la valoarea instantanee, se ţine seama de relaţia dintre valoarea efectivă şi cea maximă $\left(U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\right)$

În calculul circuitelor de c.a., adesea avem de reprezentat prin fazori derivata şi integrala unei funcţii sinusoidale.

Fazorul derivatei. Luînd funcţia: $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, atunci $\frac{du}{dt} = \omega U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right)$. După cum se vede, fazorul derivatei are modul mai mare de ω ori faţă de cel al funcţiei, iar faza înainte cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 2-10).

Fazorul integralei. Pentru aceeaşi funcţie integrala este:

$$\int u\,dt = \frac{U_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right).$$

Fazorul integralei se obţine din fazorul funcţiei, avînd modulul de ω ori mai mic, iar faza în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 2-10).

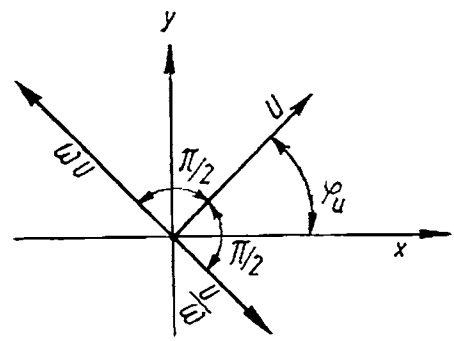


Fig. 2-10

2.2.3. Reprezentarea mărimilor sinusoidale, de timp, în complex (reprezentarea simbolică)

La calculul circuitelor electrice de anvergură în regim sinusoidal metoda fazorilor devine laborioasă. În acest caz o simplificare a calculelor se obține reprezentînd funcțiile sinusoidale de timp prin funcții în planul complex. În cazul reprezentării statice prin fazori în planul complex, unei funcții sinusoidale îi va corespunde un număr complex.

Dacă se ia funcția sinusoidală $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ aceasta va fi reprezentată în planul complex de fazorul din figura 2-11 căruia îi corespunde funcția complexă:

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}, \tag{2-19}$$

unde j este unitatea imaginară ($j = \sqrt{-1}$) ce reprezintă un operator de rotație cu $\pi/2$.

În circuitele la care toate mărimile sinusoidale au aceeași pulsație se folosește reprezentarea statică a fazorului în planul complex (fig. 2-12); în acest caz funcției sinusoidale îi corespunde un număr complex care este valoarea efectivă complexă a funcției:

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u}. \tag{2-20}$$

În acest fel se poate stabili o relație biunivocă între funcțiile sinusoidale de timp și funcțiile complexe. Trecerea de la funcțiile sinusoidale la cele complexe și invers se face cu ușurință.

Reprezentarea în complex „algebrizează" calculul cu mărimile sinusoidale, făcînd studiul circuitelor de c.a. în regim sinusoidal la fel de simplu ca al circuitelor de curent continuu.

Numărul complex al derivatei:

$$\frac{du}{dt} = \omega U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) \text{ este } \underline{U}_d = \omega U e^{j\left(\varphi_u + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega U e^{j\varphi_u} = j\omega \underline{U} \tag{2-21}$$

și se obține din cel al funcției multiplicat cu operatorul $j\omega$.

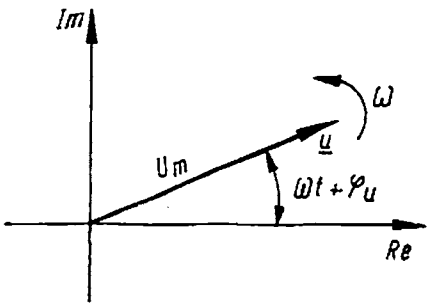


Fig. 2-11

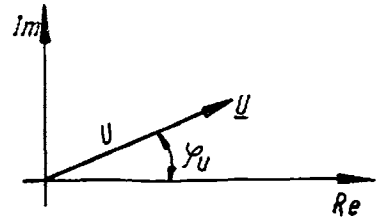


Fig. 2-12

Numărul complex al integralei:

$$\int u\,dt = \frac{U_m}{\omega}\sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\underline{U}_i = \frac{U}{\omega}e^{j\left(\varphi_u - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{U}{j\omega}e^{j\varphi_u} = \frac{\underline{U}}{j\omega} \qquad (2\text{-}22)$$

se obține din cel al funcției împărțit la operatorul $j\omega$.

2.2.4. Elemente de circuit în regim sinusoidal

Pentru un prim studiu, în regim sinusoidal circuitele de curent alternativ uzuale pot fi aproximate prin circuite ideale avînd ca elemente componente: rezistorul ideal, bobina ideală, condensatorul ideal, sursa ideală de tensiune și sursa ideală de curent (v. cap. 1).

Folosind elementele ideale de circuit se poate prezenta cu ușurință teoria circuitelor liniare de c.a. cu parametri localizați.

Rezistorul ideal

Este realizat dintr-un fir conductor la care întreaga energie electrică se transformă în căldură (se neglijează inductivitatea și curenții de deplasare care circulă prin capacitățile dintre spire: $L \to 0$ și $C \to \infty$).

Dacă $u = U_m \sin \omega t$, legea conducției aplicată rezistorului (fig. 2-13, *a*) ne dă:

$$u = Ri, \quad i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R}\sin\omega t = I_m \sin\omega t \left(I_m = \frac{U_m}{R} \text{ sau } I = \frac{U}{R}\right). \qquad (2\text{-}23)$$

Din relațiile (2-23) rezultă că dacă tensiunea la bornele rezistorului este sinusoidală și curentul care străbate conductorul este sinusoidal și în fază cu tensiunea. În figurile 2-13, *b* și 2-13, *c* sînt reprezentate grafic și prin fazori cele două mărimi.

Puterea electrică primită de rezistor pe la borne este:

$$p = ui = Ri^2 \qquad (2\text{-}24)$$

și caracterizează transformarea energiei electrice în energie termică.

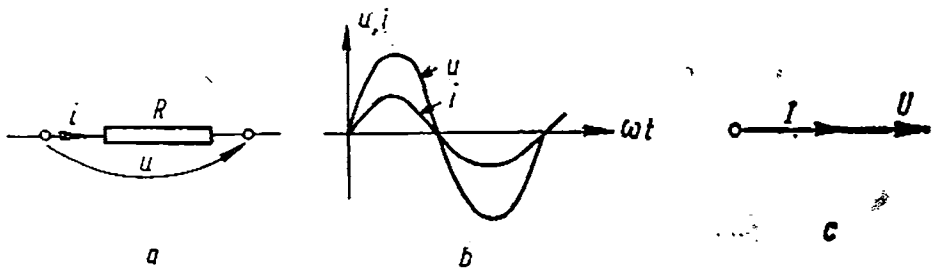


Fig. 2-13

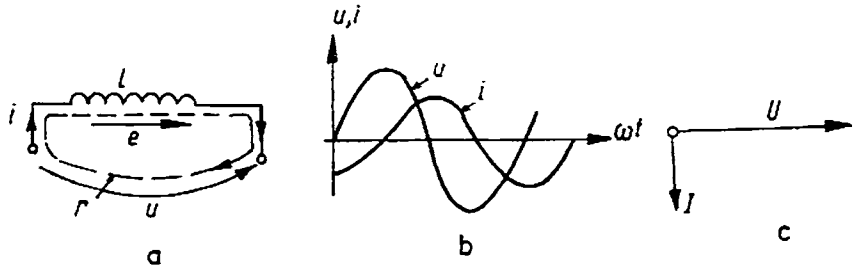


Fig. 2-14

Bobina ideală

Este realizată dintr-un fir conductor la care rezistența R este neglijabilă iar curenții de deplasare nuli ($C \to \infty$), fiind caracterizată de inductivitatea proprie L_{jj} și mutuală L_{jk}.

T.e.m. indusă de-a lungul conturului Γ (fig. 2-14, *a*) pentru cazul în care se consideră bobina numai cu inductivitate proprie (cuplaje magnetice slabe), conform relațiilor (2-1) și (2-6) este:

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{2-25}$$

De aici:

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t u\,\mathrm{d}t + i(0). \tag{2-26}$$

Relația (2-26) ne arată că pentru a cunoaște curentul care apare într-o bobină ca răspuns la aplicarea tensiunii u la borne, nu este suficient să se cunoască tensiunea de la borne ci și valoarea curentului la momentul inițial.

Dacă $u = U_m \sin \omega t$ și $i(0) = 0$ atunci:

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t U_m \sin \omega t\,\mathrm{d}t = \frac{U_m}{L\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Notînd: $L\omega = X_L$ — *reactanța inductivă* a bobinei ($X_L = L\omega = 2\pi fL$), mărime de natura unei rezistențe, și $I_m = \frac{U_m}{X_L}$ sau $I = \frac{U}{X_L}$, atunci:

$$i = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{2-27}$$

Rezultă că, în cazul bobinei ideale, intensitatea curentului este defazată în urmă față de tensiunea de la borne cu un unghi de $\frac{\pi}{2}$ sau altfel spus la aplicarea tensiunii la borne u, curentul întîrzie cu un timp: $t_i = \frac{\pi}{2\omega}$. Această întîrziere se datorește fenomenului de autoinducție.

Puterea electrică instantanee schimbată de bobina ideală pe la borne este:

$$p = ui = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) = \frac{dW_m}{dt}. \qquad (2\text{-}28)$$

În cazul în care se ia în considerare cuplajul magnetic al bobinei cu alte bobine, atunci luînd cazul a două bobine (fig. 2-15) se obține:

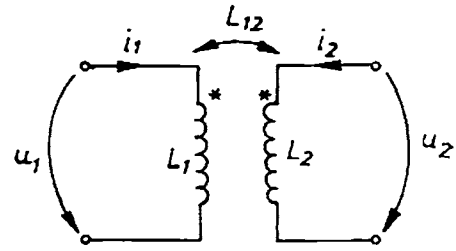


Fig. 2-15

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt},$$
$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} \qquad (2\text{-}29)$$

(sensurile pozitive corespund aceleiași orientări a sensurilor de referință față de bornele omoloage notate cu asterisc).

Condensatorul ideal

Este caracterizat prin capacitatea C avînd rezistența conductoarelor de conexiune nulă și inductivitatea acestora și a armăturilor nulă (fig. 2-16, *a*). Aplicînd legea conducției (2-1) se obține relația (2-5) adică:

$$i = C \frac{du}{dt} \qquad (2\text{-}30)$$

și dacă $u = U_m \sin \omega t$, atunci:

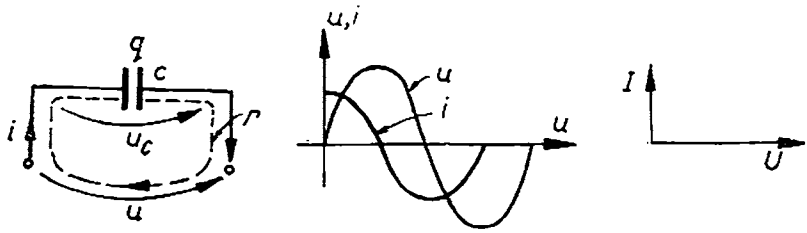
$$i = C\omega U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2\text{-}31)$$

Notînd: $\frac{1}{C\omega} = X_C$ — *reactanță capacitivă*, mărime de natura unei rezistențe electrice:

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi f C}, \qquad (2\text{-}32)$$

atunci:

$$i = \frac{U_m}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (2\text{-}33)$$



a *b* *c*

Fig. 2-16

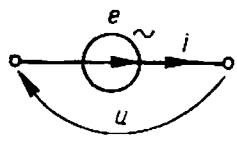


Fig. 2-17

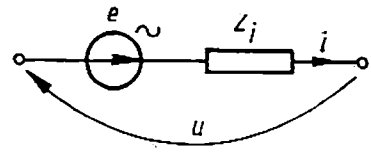


Fig. 2-18

Relația (2-33) ne arată că în cazul capacității ideale curentul din circuit este defazat înaintea tensiunii cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 2-16, *a* și *b*)

Tensiunea la bornele condensatorului din (2-30) este dată de relația:

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t + u(0). \tag{2-34}$$

Această relație ne arată că pentru a determina tensiunea la bornele condensatorului la un moment oarecare, pe lîngă cunoașterea curentului, trebuie cunoscută și tensiunea la momentul inițial.

Puterea electrică instantanee schimbată pe la bornele condensatorului este:

$$p = ui = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Cu^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t}. \tag{2-35}$$

Sursa ideală de tensiune

Este o sursă de energie electromagnetică care are proprietatea că tensiunea la bornele sale este independentă de curentul produs. Această sursă are impedanța interioară nulă ($Z_i = 0$). Aplicînd legea conducției în acest caz (fig. 2-17) obținem:

$$e = u. \tag{2-36}$$

Sursele reale de tensiune în c.a. posedă o impedanță inductivă interioară diferită de zero. Schema echivalentă a unei surse reale de tensiune în c.a. este reprezentată în figura 2-18.

Sursa ideală de curent

Este sursa la care curentul debitat este independent de rețeaua pe care se conectează (de tensiunea de la borne).

Sursele ideale de curent au o admitanță internă nulă, $Y_i = 0$ (fig. 2-19).

Sursele reale de curent în c.a. au o admitanță în serie (fig. 2-20).

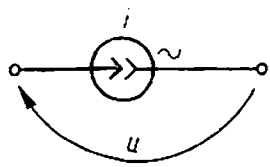


Fig. 2-19

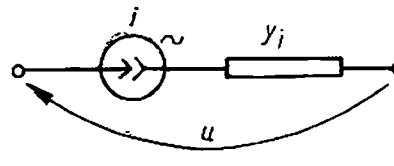


Fig. 2-20

2.2.5. Circuite simple de curent alternativ sinusoidal

Vom prezenta circuitele care conțin toate elementele de circuit (R, L, C) n conexiunea serie și paralel.

Circuit serie R, L, C. Impedanța

Considerăm circuitul serie din figura 2-21, alimentat de la o tensiune alternativă sinusoidală cu tensiunea la borne $u = U_m \sin \omega t$. Aplicînd legea conducției (2-1) se poate afla curentul i din circuit $u_R + u_L + u_C - u = 0$ sau:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = U_m \sin \omega t. \tag{2-37}$$

După cum se vede din relația (2-37), funcționarea circuitului R, L, C serie este descrisă de o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți (circuitul este liniar). Pentru a afla expresia curentului din circuit trebuie să rezolvăm ecuația (2-37). Rezolvarea se poate face, fie aplicînd metoda fazorilor, fie metoda în complex, evident admițînd că soluția este sinusoidală.

Metoda fazorilor. Dacă soluția ecuației este:

$$i = I_m \sin(\omega t \pm \varphi), \tag{2-38}$$

pentru ca această expresie să fie determinată trebuie aflate mărimile: I_m și φ. Reprezentînd ecuația (2-37) prin fazori se obține diagrama din figura 2-22, în care s-a presupus că reactanța inductivă X_L este mai mare decît cea capacitivă: $X_L > X_C$ sau $U_L > U_C$. Din figura 2-22 se poate deduce:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}; \quad I_m = \sqrt{2}\, I, \tag{2-39}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R}. \tag{2-40}$$

Relațiile (2-39) și (2-40) determină cele două mărimi necesare aflării curentului i.

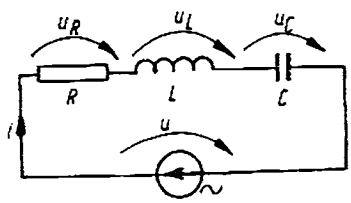


Fig. 2-21

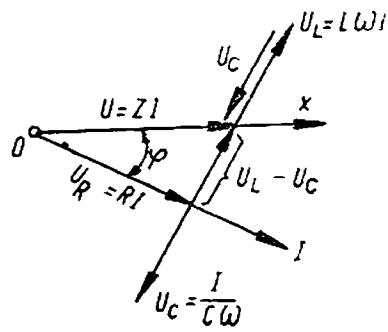


Fig. 2-22

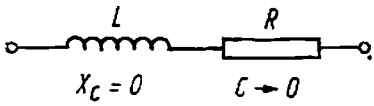


Fig. 2-23

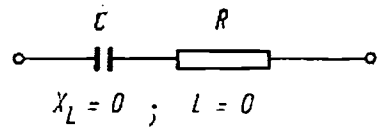


Fig. 2-24

Expresia: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ care intră în relația (2-39) poartă denumirea de *impedanță.*

Expresia impedanței unui dipol serie R, L, C, poate fi particularizată:

— în cazul bobinelor reale (fig. 2-23):

$$Z_L = \sqrt{R^2 + X_L^2}; \tag{2-41}$$

— în cazul capacităților cu pierderi (fig. 2-24):

$$Z_C = \sqrt{R^2 + X_C^2}. \tag{2-42}$$

Observație. În circuitele R, L, C serie curentul este defazat față de tensiune cu un unghi dat de relația (2-40). Caracterul acestui defazaj depinde de relația dintre cele două reactanțe: X_L și X_C. Dacă $X_L > X_C$ circuitul are caracter inductiv (predomină inductivitatea) și curentul este defazat în urma tensiunii, iar dacă $X_C > X_L$ circuitul are caracter capacitiv și curentul este defazat înaintea tensiunii.

Metoda reprezentării în complex. Dacă se reprezintă relația (2-38) și $u = U_m \sin \omega t$ în complex avem:

$$\underline{I} \equiv I e^{j\varphi} \text{ și } \underline{U} \equiv U. \tag{2-43}$$

Ecuația (2-37) în complex va deveni:

$$R\underline{I} + j\omega L\,\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \underline{U} \tag{2-44}$$

și de aici:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}, \tag{2-45}$$

unde $R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = \underline{Z}$ este *impedanța complexă* a dipolului R, L, C serie. Relația (2-45) se va scrie:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}, \tag{2-46}$$

care reprezintă teorema conducției în complex (cunoscută și sub numele de teorema lui Joubert).

Relația (2-46) permite aflarea lui $\underline{I}$, apoi a modulului său I și în final pe $I_m = \sqrt{2}\, I$.

Defazajul φ se determină cu:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})}. \tag{2-47}$$

Astfel soluția ecuației (2-37) este determinată.

Observație. Impedanța complexă are ca parte reală rezistența R a rezistorului, iar ca parte imaginară reactanța totală:

$$X = X_L - X_C \tag{2-48}$$

Circuit derivație R, L, C. Admitanța

Se consideră circuitul din figura 2-25, alimentat de la o sursă de tensiune alternativă sinusoidală $u = U_m \sin \omega t$. Aplicînd relația din figura 2-4, *b* la o suprafață închisă care cuprinde unul dintre cele două noduri ale circuitului se obține:

$$i = i_R + i_L + i_C \tag{2-49}$$

sau:

$$i = \frac{u}{R} + \frac{1}{L}\int u\,dt + C\frac{du}{dt}. \tag{2-50}$$

Funcționarea circuitului este descrisă de ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți (2-50), a cărei soluție ne dă curentul din circuit. Deoarece tensiunea aplicată circuitului este sinusoidală iar elementele de circuit sînt liniare, curentul din circuit va fi tot sinusoidal de forma: $i = I_m \sin(\omega t \pm \varphi)$.

Pentru a determina această expresie se impune a afla mărimile: I_m și φ. Acest lucru se poate face prin: metoda fazorilor sau metoda complexă.

Metoda fazorilor. Diagrama de fazori care reprezintă mărimile sinusoidale din ecuația (2-50) este reprezentată în figura 2-26. Din diagramă rezultă:

$$I = U\sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}, \tag{2-51}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B_L - B_C}{G}. \tag{2-52}$$

Cu relațiile (2-51) și (2-52) se pot determina cele două mărimi I_m și φ deci se poate afla soluția ecuației (2-50).

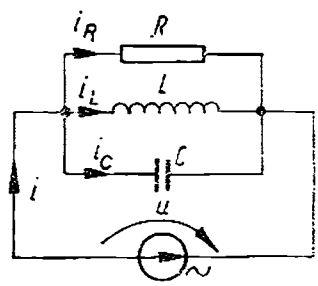


Fig. 2-25

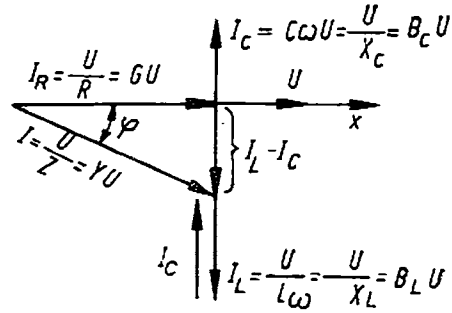


Fig. 2-26

În relația (2-51) s-a notat cu:

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{L\omega} \text{ și } B_C = \frac{1}{X_C} = C\omega \tag{2-53}$$

respectiv *susceptanța inductivă* și *capacitivă.*

Aceste două mărimi sînt inversul reactanțelor respective, deci au ca unitate de măsură Ω^{-1} (numită siemens, cu simbolul S).

Expresia:

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \frac{1}{Z} \tag{2-54}$$

poartă denumirea de *admitanță* care este inversul impedanței; deci are, de asemenea, ca unitate de măsură Ω^{-1} (siemens).

Relația (2-51) se mai scrie:

$$I = YU, \tag{2-55}$$

care reprezintă teorema conducției din circuitele derivație simple.

Admitanța ca și impedanța reprezintă o expresie generală care poate fi particularizată pentru diverse cazuri (scheme).

Metoda complexă. Dacă se reprezintă în complex tensiunea de la bornele circuitului și curentul din circuit, avem:

$$\underline{U} \equiv U \text{ și } \underline{I} \equiv I\, e^{j\varphi}. \tag{2-56}$$

Ecuația (2-50) transpusă în complex se scrie:

$$\underline{I} = \underline{U}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right) \tag{2-57}$$

sau:

$$\underline{I} = \underline{U}\,[(C + j(B_C - B_L)]. \tag{2-58}$$

Notînd:

$$G + j(B_C - B_L) = \underline{Y}, \tag{2-59}$$

unde $\underline{Y}$ este admitanța complexă, avem:

$$\underline{I} = \underline{U}\,_. \tag{2-60}$$

Relația (2-60) exprimă, în complex, legea lui Ohm pentru circuite în c.a. sinusoidal (în cazul de față circuite R, L, C derivație).

Cu ajutorul relației (2-60) se poate determina $I = |_|$ și $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{B_C - B_L}{G}$ și deci se află soluția ecuației (2-50).

2.2.6. Puteri în curent alternativ sinusoidal

În curent alternativ sinusoidal se pot defini puterile: instantanee, activă, reactivă și aparentă.

Puterea instantanee

Se transmite prin bornele unui circuit și este dată de relația:

$$p = ui. \tag{2-61}$$

Deoarece $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ și $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ atunci:

$$p = 2\,UI \sin(\omega t + \varphi_u) \sin(\omega t + \varphi_i) \tag{2-62}$$

În figura 2-27 se reprezintă grafic variația puterii instantanee pentru un defazaj oarecare φ între tensiune și curent ($\varphi = \varphi_u - \varphi_i$).

Relația (2-62) se mai poate scrie:

$$p = UI\,[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]. \tag{2-63}$$

Atît relația (2-63) cît și reprezentarea grafică din figura 2-27 ne arată că puterea instantanee de la bornele circuitului oscilează cu dublul frecvenței tensiunii și curentului avînd atît valori pozitive cît și negative, dacă $\cos\varphi < 1$. Ca urmare, puterea instantanee nu se transmite într-un singur sens; ea este transmisă atît de la receptor către sursă cît și invers. Puterea se consideră pozitivă cînd se transmite de la sursă la receptor și negativă cînd se transmite în sens invers.

Puterea activă

În circuitele de c.a. adesea interesează puterea medie din circuit în decurs de o perioadă, care poartă denumirea de *putere activă:*

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt. \tag{2-64}$$

Înlocuind expresia puterii instantanee din (2-63), după efectuarea integralei, se obține:

$$P = UI\cos\varphi \geqslant 0. \tag{2-65}$$

Unitatea de măsură a puterii active în SI este wattul (W).

Cos φ, care intră în expresia puterii active, poartă denumirea de *factor de putere.*

Se vede că în c.a. puterea activă este maximă pentru $\cos\varphi = 1$, adică atunci cînd circuitul conține numai rezistor (R) sau reactanțele sînt compensate (la rezonanță).

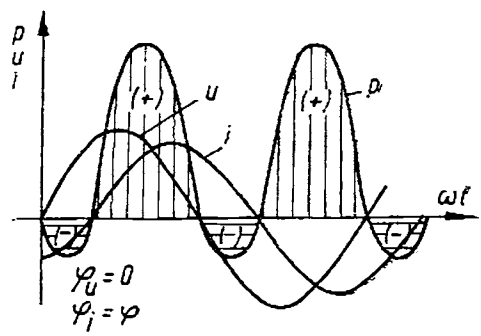


Fig. 2-27

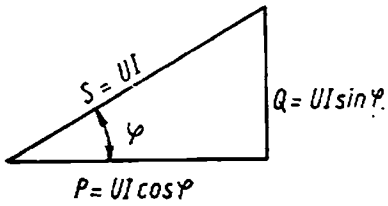


Fig. 2-28

Expresia (2-65) a puterii active se mai poate scrie și sub forma:

$$P = RI^2,$$

deoarece $U \cos \varphi = U_R$(v. fig. 2-22), iar $U_R = RI$.

Relația (2-65) ne arată că puterea activă se transformă în putere termică pe un rezistor.

Din relația (2-65) se poate defini rezistența și conductanța echivalentă unui consum de putere activă P:

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{U}{I} \cos \varphi \text{ și } G = \frac{I^2}{P}. \tag{2-66}$$

Puterea reactivă

Putem multiplica laturile triunghiului dreptunghic din figura 2-22, care sînt tensiuni, cu aceeași mărime I. Astfel, se obține triunghiul dreptunghic din figura 2-28 care are ca laturi puteri. Puterea:

$$Q = UI \sin \varphi \tag{2-67}$$

poartă denumirea de *putere reactivă*. Deoarece $U \sin \varphi = U_L - U_C = I(X_L - X_C) = IX$, atunci:

$$Q = (X_L - X_C) I^2 = XI^2. \tag{2-68}$$

Relația (2-68) ne arată că puterea reactivă este înmagazinată în cîmpul electromagnetic (cîmpul electric al condensatoarelor și cel magnetic al bobinelor).

În fapt, puterea reactivă $Q = U I \sin \varphi$ reprezintă valoarea maximă a componentei fluctuante a puterii instantanee din relația (2-63), adică a componentei $UI \cos (2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$ de pulsație dublă.

În SI puterea reactivă se măsoară în voltamper reactiv (cu simbolul var).

Puterea aparentă

Ipotenuza triunghiului dreptunghic din figura 2-28 reprezintă puterea aparentă:

$$S = UI. \tag{2-69}$$

Cum $U = ZI$, atunci:

$$S = ZI^2. \tag{2-70}$$

Relația (2-69) ca și relația (2-70) ne arată că puterea aparentă are un caracter mai general „incluzînd" și puterea activă și reactivă.

Între cele trei puteri S, P și Q există relația:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{2-71}$$

unde: $P = S \cos \varphi$ și $Q = S \sin \varphi$.

În curent alternativ, indiferent de felul regimului (sinusoidal sau nesinusoidal) factorul de putere se definește mai general prin:

$$K_p = \frac{P}{S}. \tag{2-72}$$

Puterea aparentă în SI se măsoară în voltamper (VA).

În metoda de calcul în complex a circuitelor de c.a. se folosește *puterea aparentă complexă:*

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*, \tag{2-73}$$

unde: $\underline{U}$ este valoarea efectivă a tensiunii în complex și $\underline{I}^*$ — valoarea efectivă a curentului în complex conjugat.

Deoarece $\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$ și $\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$, rezultă:

$$\underline{S} = UI e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UI e^{j\varphi} = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi$$

sau:

$$\underline{S} = P + \mathrm{j}\,Q. \tag{2-74}$$

2.2.7. Îmbunătățirea factorului de putere

Marea majoritate a receptoarelor de c.a. au caracter inductiv (motoare, transformatoare etc.). Aceste circuite „consumă" de la rețea energie reactivă pentru producerea cîmpurilor magnetice.

Din expresia puterii active, pentru o tensiune de alimentare constantă și aceeași putere, se obține:

$$P = UI \cos\varphi; \quad I \cos\varphi = \text{const.} \tag{2-75}$$

Relația (2-75) arată că la un factor de putere scăzut (deci la un consum crescut de energie reactivă), curentul absorbit de la rețea este mare și, corespunzător cu aceasta, pierderile în rețeaua de alimentare ($R_l I^2$, R_l — rezistența liniei) sînt mari.

Datorită acestor cauze, în practică se urmărește funcționarea receptoarelor la un factor de putere cît mai aproape de 1; astfel se reduce curentul absorbit pe linia de alimentare și, ca urmare, se reduc pierderile și căderile de tensiune.

Aceasta se realizează prin măsuri de „îmbunătățire" a factorului de putere, fie pe „cale naturală", fie prin compensarea puterii reactive, așa cum vom arăta în capitolul 7.

2.3. METODE DE CALCUL AL REȚELELOR LINIARE DE CURENT ALTERNATIV SINUSOIDAL

Rețelele de curent alternativ ca și cele de curent continuu pot fi descrise cu două specii de mărimi:

— mărimi topologice: laturi, noduri și ochiuri;

— mărimi electrice: curenții laturilor, potențialele nodurilor, t.e.m. ale surselor, la care se adaugă parametrii de circuit (impedanțele).

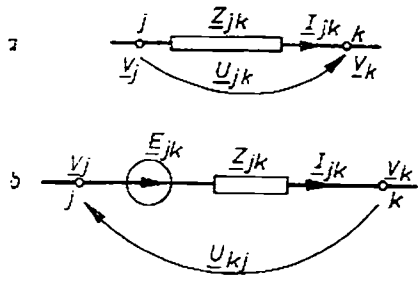


Fig. 2-29

Studiul rețelelor liniare de c.a. în regim sinusoidal se face cu ajutorul teoremelor lui Joubert și Kirchhoff. Dacă aceste relații se scriu în complex ele capătă forme asemănătoare cu cele din curent continuu.

2.3.1. Forma complexă a legii lui Ohm generalizate

Pentru un circuit format prin legarea în serie a mai multor elemente (v. fig. 2—4, *a*) expresia $u = Ri + L\,di/dt + \frac{1}{C}\int i\,dt$ reprezintă legea lui Ohm generalizată, în valori instantanee. Pentru un dipol pasiv (ca cel din figura 2-29, *a*) în regim sinusoidal, legea lui Ohm generalizată, în complex se scrie, conform (2-46), sub forma teoremei lui Joubert, adică:

$$\underline{U}_{jk} = \underline{Z}_{jk}\underline{I}_{jk} = \underline{V}_j - \underline{V}_k. \tag{2-76}$$

Dipolul pasiv pentru care se scrie relația (2-76), reprezentat în figura 2-29, *a*, are două borne, *j* și *k*, ce sînt nodurile rețelei din care face parte latura *jk*.

Pentru un dipol activ (fig. 2-29, *b*) legea lui Ohm generalizată, în complex, capătă forma:

$$\underline{V}_j - \underline{V}_k + \underline{E}_{jk} = \underline{Z}_{jk}\underline{I}_{jk} \tag{2-77}$$

și deoarece $\underline{V}_j - \underline{V}_k = \underline{U}_{jk} = -\underline{U}_{kj}$ se poate scrie:

$$\underline{E}_{jk} = \underline{U}_{kj} + \underline{Z}_{jk}\underline{I}_{jk}. \tag{2-78}$$

Pentru scrierea corectă a relației (2-78) se folosește regula asocierii sensurilor pozitive (v. 1.2.1)

2.3.2. Teoremele lui Kirchhoff în formă complexă

Teorema întîi a lui Kirchhoff. Se referă la nodurile rețelei și se obține aplicînd legea conservării sarcinii electrice (v. 1.2.2), care, pentru valorile instantanee ale curenților, are forma:

$$\sum_{jk \in m} i_{jk} = 0 \tag{2-79}$$

(simbolul $jk \in m$ ne arată că laturile *jk* aparțin nodului *m*).

Relația (2-79) se poate scrie direct în complex:

$$\sum_{jk \in m} \underline{I}_{jk} = 0. \tag{2-80}$$

Pentru scrierea corectă a acestei relații se aleg sensurile pozitive arbitrare ale curenților din laturile rețelei. Pentru nodul *m* (fig. 2-30) se scrie:

$$\underline{I}_{1m} - \underline{I}_{m2} - \underline{I}_{m3} - \underline{I}_{m4} + \underline{I}_{5m} = 0.$$

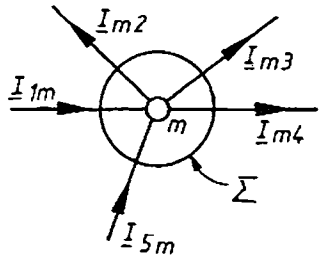


Fig. 2-30

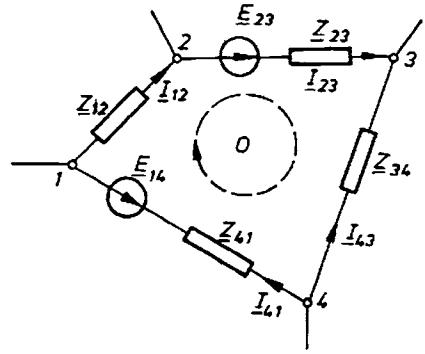


Fig. 2-31

Teorema a doua a lui Kirchhoff. Se referă la ochiurile de rețea și se obține aplicînd (2-77) pentru laturile care compun ochiul de rețea, exprimîndu-se sub forma:

$$\sum_{jk \in 0} \underline{E}_{jk} = \sum_{jk \in 0} \underline{Z}_{jk}\underline{I}_{jk} \text{ sau } \sum_{jk \in 0} \underline{U}_{jk} = 0 \qquad (2.81)$$

(simbolul $jk \in 0$ ne arată că latura jk aparține ochiului o).

Pentru scrierea corectă a teoremei a II-a a lui Kirchhoff se asociază sensurile pozitive ale t.e.m. și căderile de tensiune pe impedanțele laturilor cu sensul pozitiv arbitrar de parcurgere a ochiului.

În cazul ochiului din figura 2-31 teorema a doua a lui Kirchhoff (2-81) se scrie:

$$\underline{E}_{23} - \underline{E}_{14} = \underline{Z}_{12}\underline{I}_{12} + \underline{Z}_{23}\underline{I}_{23} - \underline{Z}_{34}\underline{I}_{43} + \underline{Z}_{41}\underline{I}_{41}.$$

2.3.3. Metode de rezolvare a rețelelor liniare de curent alternativ sinusoidal

Rezolvarea rețelelor de c.a. se face ca și în curent continuu, utilizînd teoremele fundamentale ale rețelelor (teoremele lui Kirchhoff) și celelalte teoreme ale rețelelor (teorema superpoziției, a curenților de contur, a transfigurării, a generatoarelor echivalente, teorema potențialelor nodurilor etc.).

În cele ce urmează nu vom lua în considerație cuplajele magnetice dintre laturile rețelelor.

Metoda aplicării directe a teoremelor lui Kirchhoff

Considerînd o rețea care are l laturi și n noduri, numărul necunoscutelor, în caz general, coincide cu numărul laturilor (spre exemplu curenții din laturi, dacă se cunosc restul mărimilor electrice ale rețelei și parametrii de circuit).

Pentru rezolvarea rețelei este necesar să se scrie un sistem de ecuații algebrice care are l ecuații cu l necunoscute. Din prima teoremă a lui Kirchhoff se pot scrie un număr de $n-1$ ecuații independente. Restul de ecuații ale sistemului, $l-(n-1)$, se scriu din teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată la $O = l-n+1$ ochiuri.

Această metodă se aplică mai ales la rețelele cu o configurație mai simplă.

Metoda aplicării teoremei superpoziției

Această metodă folosește teorema superpoziției, teoremă aplicabilă numai rețelelor liniare care au cel puțin două laturi active.

Conform teoremei superpoziției, curentul dintr-o latură oarecare a unei rețele se obține din suprapunerea curenților din acea latură produși pe rînd de fiecare sursă din rețea în lipsa celorlalte (scurtcircuitate sau înlocuite cu impedanța internă):

$$\underline{I}_{jk} = \sum_{s=1}^{n} \underline{I}_{jk}^{(s)}, \tag{2-82}$$

unde s este numărul surselor din rețea.

În esență aplicarea teoremei superpoziției înseamnă suprapunerea a s rețele, fiecare cu o singură sursă. Se obține, deci, o simplificare a rețelelor componente și un calcul mai simplu cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff, Joubert și impedanțelor echivalente.

Această metodă se aplică la rețele cu 2÷3 surse; la rețelele cu multe surse calculul devine voluminos.

Metoda curenților de contur

În această metodă drept variabile se folosesc curenții de contur ai ochiurilor independente în număr de $l-n+1$. Acești curenți au aceeași valoare în toate laturile ochiului, ochiul considerîndu-se deci ca un circuit separat. Considerînd lucrurile în acest mod teorema I a lui Kirchhoff este satisfăcută și deci pentru aflarea celor $l-n+1$ necunoscute care sînt curenții de contur se va folosi teorema a II-a a lui Kirchhoff, ținînd seama de toți curenții de contur care aparțin ochiurilor și care străbat aceeași latură comună mai multor ochiuri independente.

După aflarea curenților de contur: $\underline{I}_{c1}$, $\underline{I}_{c2}$, ..., $\underline{I}_{co}$ (unde o este numărul ochiurilor independente) se află curenții reali prin suprapunerea curenților de contur:

$$\underline{I}_{jk} = \sum_{jk \in o} \underline{I}_{co}. \tag{2-83}$$

Sistemul de $l - n + 1$ ecuații, care permit aflarea curenților de contur, se obțin cu ajutorul teoremei a II-a a lui Kirchhoff, și capătă forma:

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}\underline{I}_{c1} - \underline{Z}_{12}\underline{I}_{c2} - \ldots \underline{Z}_{1o}\underline{I}_{co} = \underline{E}_{11} \\ -\underline{Z}_{21}\underline{I}_{c1} + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{c2} - \ldots \underline{Z}_{2o}\underline{I}_{co} = \underline{E}_{22} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -Z_{o1}\underline{I}_{c1} - \underline{Z}_{o2}\underline{I}_{c2} - \ldots - \underline{Z}_{oo}\underline{I}_{co} = \underline{E}_{oo} \end{cases} \tag{2-84}$$

în care: $\underline{Z}_{jj}$ este suma impedanțelor laturilor ochiului j, $\underline{Z}_{jk}$ — impedanța laturii comune ochiului j și k iar $\underline{E}_{jj}$ — suma algebrică a t.e.m. din ochiul j.

Observație. Termenii de pe diagonala sistemului (2-84) sînt pozitivi, iar restul negativi, atunci cînd se respectă același sens de parcurgere a ochiurilor pentru toate ochiurile independente.

Metoda curenților de contur este foarte des utilizată la rezolvarea rețelelor.

Sistemul (2-84) poate fi scris matriceal („concentrat") sub forma:

$$[\underline{Z}] \cdot [\underline{I}_C] = [\underline{E}], \tag{2-85}$$

de unde rezultă:

$$[\underline{I}_C] = [\underline{Z}]^{-1} \cdot [\underline{E}]. \tag{2-86}$$

De asemenea, (2-83) se poate scrie matriceal sub forma:

$$[\underline{I}] = [C] \cdot [\underline{I}_c]. \qquad (2\text{-}87)$$

în care:

$[\underline{I}]$ este matricea curenților reali, $\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_l \end{bmatrix}$;

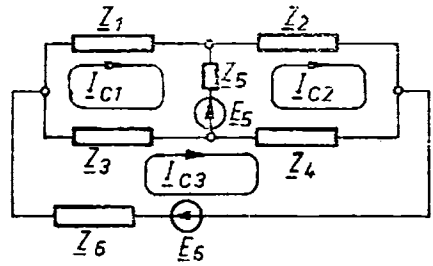


Fig. 2-32

$[C]$ — *matricea de conexiune*, o matrice pătratică care are ca elemente: 0, 1, —1 (zero cînd latura nu face parte din ochiul respectiv, +1 cînd curentul de contur al ochiului k coincide cu cel al ochiului j și —1 cînd este în sens contrar).

Dacă în (2-87) se înlocuiește $[\underline{I}_c]$ din sistemul (2-86) se obține:

$$[\underline{I}] = [C] \cdot [\underline{Z}]^{-1} \cdot [\underline{E}]. \qquad (2\text{-}88)$$

Sistemul (2-88) poate fi ușor rezolvat cu ajutorul sistemelor de calcul automat, așa ca în exemplul ce urmează.

Se dă rețeaua din figura 2-32, în care:

$$\underline{Z}_1 = (5{,}1 - j2)\ \Omega; \quad \underline{Z}_2 = 2\ \Omega;$$

$$\underline{Z}_3 = 0{,}1 + j\ 0{,}5\ \Omega; \quad \underline{Z}_4 = 0{,}5 + j\ 0{,}25\ \Omega;$$

$$\underline{Z}_5 = 6{,}1 + j\ 7{,}2\ \Omega; \quad \underline{Z}_6 = 3{,}2 + j\ 5{,}5\ \Omega \text{ și}$$

două t.e.m. sinusoidale:

$$e_5 = \sqrt{2} \cdot 220 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \text{V},$$

$$e_6 = \sqrt{2} \cdot 380 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{V},$$

adică:

$$\underline{E}_5 = 220\ e^{j\frac{\pi}{3}} = 220\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\underline{E}_6 = 380\ e^{j\frac{\pi}{6}} = 380\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right).$$

Să se afle curenții din laturile rețelei folosind metoda curenților de contur.

Rețeaua are $l = 6$ laturi, $n = 4$ noduri și deci va fi necesar un număr de $o = l - n + 1 = 3$ curenți de contur. Sistemul (2-84), în care se înlocuiesc:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_3 = 11{,}3 + j\,5{,}7; \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_5 = 6{,}1 + j\,7{,}2;$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_3 = 0{,}1 + j\,0{,}5; \quad \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 = 8{,}6 + j\,7{,}45;$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_4 = 0{,}5 + j\,0{,}25; \quad \underline{Z}_{33} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6 = 3{,}8 + j\,6{,}25;$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 = 0{,}1 + j\,0{,}5; \quad \underline{Z}_{32} = \underline{Z}_4 = 0{,}5 + j\,0{,}25;$$

$$\underline{E}_{11} = -\underline{E}_5 = -110 - j\,190{,}52; \quad \underline{E}_{22} = \underline{E}_5 = 100 + j\,190{,}52;$$

$$\underline{E}_{33} = \underline{E}_6 = 328{,}7 + j\,190.$$

devine:

$$\begin{cases} (11{,}3 + j\,5{,}7)\,\underline{I}_{c1} + (6{,}1 + j\,7{,}8)\,\underline{I}_{c2} + (0{,}1 + j\,0{,}5)\,\underline{I}_{c3} = -110 - j\,190{,}52 \\ (6{,}1 + j\,7{,}2)\,\underline{I}_{c1} + (8{,}6 + j\,7{,}45)\,\underline{I}_{c2} + (0{,}5 + j\,0{,}25)\,\underline{I}_{c3} = 110 + j\,190{,}52 \\ (0{,}1 + j\,0{,}5)\,\underline{I}_{c1} + (0{,}5 + j\,0{,}25)\,\underline{I}_{c2} + (3{,}8 + j\,6{,}25)\,\underline{I}_{c3} = 328{,}7 + j\,190 \end{cases}$$

Acest sistem are trei necunoscute complexe de forma:

$$\underline{I}_{c1} = y_1 + jy_2; \quad \underline{I}_{c2} = y_3 + jy_4; \quad \underline{I}_{c3} = y_5 + jy_6,$$

ce se transformă într-un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute după ce se egalează părțile reale și imaginare din membrii stîng și drept ale fiecăreia dintre cele trei ecuații:

$$\begin{cases} (11{,}3 + j5{,}7)\,(y_1 + jy_2) + (6{,}1 + j\,7{,}2)\,(y_3 + jy_4) + (0{,}1 + j0{,}5)\,(y_5 + \\ \qquad + jy_6) = -110 - j190{,}52 \\ (6{,}1 + j7{,}2)\,(y_1 + jy_2) + (8{,}6 + j\,7{,}45)\,(y_3 + j\,y_4) + (0{,}5 + j0{,}25)\,(y_5 + \\ \qquad + jy_6) = 110 + j\,190{,}52 \\ (0{,}1 + j\,0{,}5)\,(y_1 + jy_2) + (0{,}5 + j\,0{,}25)\,(y_3 + jy_4) + (3{,}8 + j\,6{,}25)\,(y_5 + \\ \qquad + jy_6) = 328{,}7 + j\,190 \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} 11{,}3y_1 - 5{,}7y_2 + 6{,}1y_3 - 7{,}2y_4 + 0{,}1y_5 - 0{,}5y_6 + j(5{,}7y_1 + 11{,}3y_2 + \\ \qquad + 7{,}2y_3 + 6{,}1y_4 + 0{,}5y_5 + 0{,}1y_6) = -110 - j\,190{,}52. \\ 6{,}1y_1 - 7{,}2y_2 + 8{,}6y_3 - 7{,}45y_4 + 0{,}5y_5 - 0{,}25y_6 + j(7{,}2y_1 + 6{,}1y_2 + \\ \qquad + 7{,}45y_3 + 8{,}6y_4 + 0{,}25y_5 + 0{,}5y_6) = 110 + j\,190{,}52 \\ 0{,}1y_1 - 0{,}5y_2 + 0{,}5y_3 - 0{,}25y_4 + 3{,}8y_5 - 6{,}25y_6 + j(0{,}5y_1 + 0{,}1y_2 + \\ \qquad + 0{,}25y_3 + 0{,}5y_4 + 6{,}25y_5 + 3{,}8y_6) = 328{,}7 + j\,190. \end{cases}$$

sau, încă:

$$\begin{cases} 11{,}3y_1 - 5{,}7y_2 + 6{,}1y_3 - 7{,}2y_4 + 0{,}1\,y_5 - 0{,}5\,y_6 = -110 \\ 5{,}7y_1 + 11{,}3y_2 + 7{,}2y_3 + 6{,}1y_4 + 0{,}5y_5 + 0{,}1\,y_6 = -190{,}52 \\ 6{,}1y_1 - 7{,}2y_2 + 8{,}6y_3 - 7{,}45y_4 + 0{,}5y_5 - 0{,}25y_6 = 110 \\ 7{,}2y_1 + 6{,}1y_2 + 7{,}45y_3 + 8{,}6y_4 + 0{,}25y_5 + 0{,}5y_6 = 190{,}52 \\ 0{,}1y_1 - 0{,}5y_2 + 0{,}5y_3 - 0{,}25y_4 + 3{,}8y_5 - 6{,}25y_6 = 328{,}7 \\ 0{,}5y_1 + 0{,}1y_2 + 0{,}25y_3 + 0{,}5y_4 + 6{,}25y_5 + 3{,}8y_6 = 190 \end{cases}$$

adică un sistem de forma:

$$[A] \cdot [Y] = [B].$$

Pentru rezolvarea acestui sistem putem utiliza un subprogram de bibliotecă MATHLIB a sistemului FELIX şi anume:

RESOL (A, B, N, KOD, EPS)

care utilizează metoda Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuaţii algebrice liniare.

Programul, cuprinzînd citirea, tipărirea datelor şi apelarea subprogramului RESOL, este prezentat în „listing"-ul din figura 2-33 cu soluţiile pentru reţeaua din figura 2-32 aleasă ca exemplu.

```
      C   PROGRAM FORTRAN PENTRU CALCULUL CURENTILOR IN REGIM SINUSOIDAL
      C   DIN CIRCUITUL REPREZENTAT IN FIGURA 2-32
      C
      C        ALOCAREA MEMORIEI
            DIMENSION A(6,6),B(6)
      C
      C        CITIREA DATELOR
            READ(105,100)N,((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
            READ(105,101)(B(I),I=1,N)
      C
      C        TIPARIREA DATELOR
            WRITE(108,102)((A(I,J),J=1,N),I=1,N)
            WRITE(108,103)(B(J),I=1,N)
      C
      C        APELAREA SUBPROGRAMULUI DE BIBLIOTECA MATHLIB
            EPS=1.E-4
            CALL RESOL(A,B,N,KOD,EPS)
      C
      C        SCRIEREA SOLUTIILOR (CURENTII DE CONTUR)
            WRITE(108,104) (I,B(I),I=1,N,2),(I,B(I),I=2,N,2)
            STOP
      C
      C        FORMATUL DE CITIRE SI SCRIERE
        100 FORMAT(I2/(10F8.4))
        101 FORMAT(6F8.3)
        102 FORMAT(20X,'MATRICEA SISTEMULUI '/19X,21('*')//(2X,6(F8.4,2X)))
        103 FORMAT(/20X,'VECTORUL TERMENILOR LIBERI '/19X,28('*')//(2X,
           *6(F8.3,2X)))
        104 FORMAT(/20X,'CURENTII DE CONTUR '/19X,20('*')/20X,'COMPONENTELE AC
           *TIVE '/19X,21('-')/3(15X,'Y',I1,2X,F8.3)/20X,'COMPONENTELE REACTIV
           *E '/19X,23('-')/3(15X,'Y',I1,2X,F8.3))
            END
```

```
                    MATRICEA SISTEMULUI
                  **********************

  11.3000    -5.7000     6.1000    -7.2000      .1000     -.5000
   5.7000    11.3000     7.2000     6.1000      .5000      .1000
   6.1000    -7.2000     8.6000    -7.4500      .5000     -.2500
   7.2000     6.1000     7.4500     8.6000      .2500      .5000
    .1000     -.5000      .5000     -.2500     3.8000     -6.2500
    .5000      .1000      .2500      .5000     6.2500     3.8000

                    VECTORUL TERMENILOR LIBERI
                  ******************************

-110.000   -190.520    110.000    190.520    328.700    190.000

                    CURENTII DE CONTUR
                  **********************
                   COMPONENTELE ACTIVE
                  ---------------------
                Y1   -16.162              Y3    22.900              Y5    41.602
                   COMPONENTELE REACTIVE
                  -----------------------
                Y2   -54.403              Y4    54.595              Y6   -23.556
```

Fig. 2-33

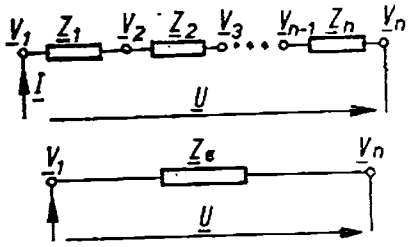
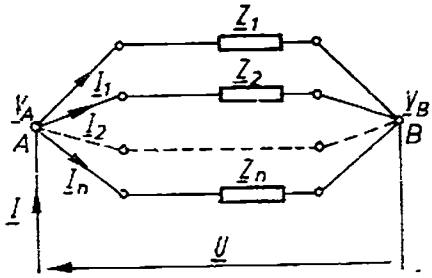


Fig. 2-34



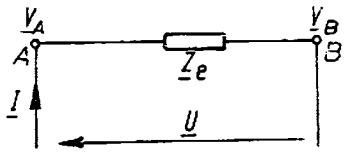


Fig. 2-35

Metoda aplicării teoremei transfigurării

În scopul simplificării rețelelor mai mari acestea se transformă în rețele mai simple dar *echivalente*. Două rețele sînt echivalente dacă au aceleași potențiale ale nodurilor și aceiași curenți care intră în noduri.

Pentru transformarea (transfigurarea) rețelelor complexe se folosesc mai multe teoreme.

Teorema legării în serie a dipolilor. La legarea în serie a n dipoli pasivi (fig. 2-34), impedanța echivalentă complexă este egală cu suma impedanțelor complexe:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \ldots + \underline{Z}_n. \quad (2\text{-}89)$$

Într-adevăr din figura 2-34 se poate scrie:

$$\underline{V}_1 - \underline{V}_2 + \underline{V}_2 - \underline{V}_3 + \ldots + \underline{V}_{n-1} - \underline{V}_n = \underline{U} \quad (2\text{-}90)$$

și cum:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 - \underline{V}_2 &= \underline{Z}_1 \underline{I}, \\ \underline{V}_2 - \underline{V}_3 &= \underline{Z}_2 \underline{I}, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ \underline{V}_{n-1} - \underline{V}_n &= \underline{Z}_n \underline{I}, \\ \underline{V}_1 - \underline{V}_n &= \underline{Z}_e \underline{I}, \end{aligned} \quad (2\text{-}91)$$

înlocuind expresiile (2-91) în (2-90) se obține, după simplificare, relația (2-89).

Teorema legării în derivație a dipolilor. Dacă se consideră n dipoli legați în derivație (fig. 2-35), teorema legării dipolilor în derivație ne dă:

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\underline{Z}_n} \quad (2\text{-}92)$$

sau:

$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \ldots + \underline{Y}_n \quad (2\text{-}93)$$

Aceste relații rezultă din:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \ldots + \underline{I}_n$$

(prima teoremă a lui Kirchhoff în unul din cele două noduri).

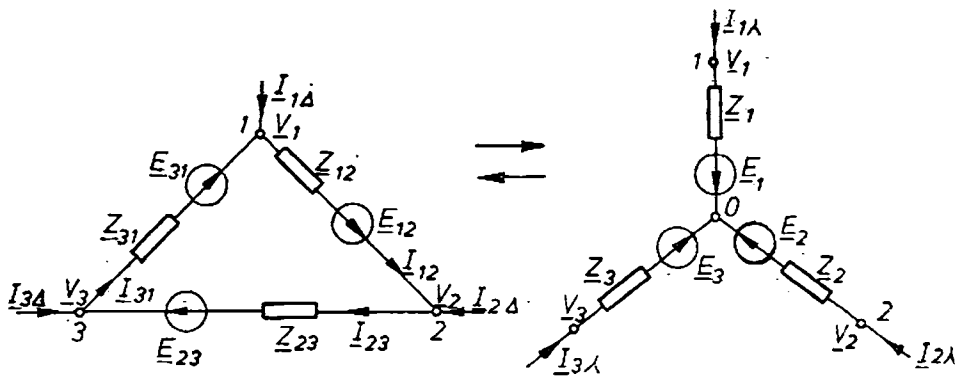


Fig. 2-36

Teorema transfigurării stea-triunghi. În rețelele cu conexiuni mai complicate adesea există grupaje de dipoli legați în stea cu mai multe ramuri și în poligon cu mai multe laturi. Adesea rețeaua se poate simplifica înlocuind conexiunea stea cu conexiunea poligonală sau invers. În practică se întîlnește mai des conexiunea stea cu trei brațe și poligonul cu trei laturi (triunghi). Deci se pune problema transfigurării stea-triunghi și invers. Considerînd cazul general al dipolilor activi (fig. 2-36) și punînd condiția de echivalență (potențialele nodurilor să fie egale la cele două conexiuni și curenții din laturile exterioare să nu se modifice), putem scrie:

— pentru conexiunea în stea:

$$\underline{I}_{1\lambda}=(\underline{V}_1-\underline{V}_0+\underline{E}_1)\underline{Y}_1;\quad \underline{I}_{2\lambda}=(\underline{V}_2-\underline{V}_0+\underline{E}_2)\underline{Y}_2;\quad \underline{I}_{3\lambda}=(\underline{V}_3-\underline{V}_0+\underline{E}_3)\underline{Y}_3 \tag{2-94}$$

și (cu prima teoremă a lui Kirchhoff aplicată în nodul *0*):

$$\underline{I}_{1\lambda}+\underline{I}_{2\lambda}+\underline{I}_{3\lambda}=0, \tag{2-95}$$

rezultînd, înlocuind curenții din (2-94) în (2-95):

$$\underline{V}_0=\frac{\underline{Y}_1\underline{V}_1+\underline{Y}\underline{V}_2+\underline{Y}_3\underline{V}_3+\underline{E}_1\underline{Y}_1+\underline{E}_2\underline{Y}_2+\underline{E}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}; \tag{2-96}$$

— pentru conexiunea triunghi:

$$\underline{I}_{12}=(\underline{V}_1-\underline{V}_2+\underline{E}_{12})\underline{Y}_{12};\quad \underline{I}_{23}=(\underline{V}_2-\underline{V}_3+\underline{E}_{23})\underline{Y}_{23};\quad \underline{I}_{31}=$$
$$=(\underline{V}_3-\underline{V}_1+\underline{E}_{31})\underline{Y}_{31} \tag{2-97}$$

și (aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul *1*):

$$\underline{I}_{1\Delta}=\underline{Y}_{12}(\underline{V}_1-\underline{V}_2+\underline{E}_{12})+\underline{Y}_{13}(\underline{V}_1-\underline{V}_3+\underline{E}_{13}). \tag{2-98}$$

Punînd condiția ca: $\underline{I}_{1\lambda}=\underline{I}_{1\Delta}$; $\underline{I}_{2\lambda}=\underline{I}_{2\Delta}$; $\underline{I}_{3\lambda}=\underline{I}_{3\Delta}$; prin identificarea relațiilor (2-94) în care s-a înlocuit $\underline{V}_0$ din (2-96) cu relațiile (2-98) se obține:

$$\underline{Y}_{12}=\frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3};\quad \underline{Y}_{23}=\frac{\underline{Y}_2\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3};\quad \underline{Y}_{31}=\frac{\underline{Y}_3\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3}; \tag{2-99}$$

$$\underline{E}_{12}=\underline{E}_1-\underline{E}_2;\quad \underline{E}_{23}=\underline{E}_2-\underline{E}_3;\quad \underline{E}_{31}=\underline{E}_3-\underline{E}_1.$$

Relațiile (2-99) reprezintă teorema transfigurării stea-triunghi avînd ca laturi dipoli activi.

Adesea în rețelele de c.a. laturile stelei și triunghiului sînt dipoli pasivi; în acest caz relațiile (2-99) iau următoarele forme particulare:

— dacă se cunosc impedanțele laturilor triunghiului $\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{23}, \underline{Z}_{31}$, impedanțele laturilor stelei se găsesc cu relațiile:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \tag{2-100}$$

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_2 = \underline{E}_3 = 0;$$

— dacă se cunosc impedanțele laturilor stelei: $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, impedanțele laturilor triunghiului echivalent se află cu relațiile:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \tag{2-101}$$

$$\underline{E}_{12} = \underline{E}_{23} = \underline{E}_{31} = 0.$$

Metoda potențialelor nodurilor

În această metodă se iau ca necunoscute potențialele a $n - 1$ noduri ale rețelei față de unul din noduri care se ia ca referință. Deci necunoscutele sînt: $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \ldots, \underline{V}_{n-1}$ ($\underline{V}_n = 0$).

Cunoscînd potențialele acestor noduri curenții din laturi se află cu ajutorul legii lui Ohm generalizate pentru un dipol:

$$\underline{I}_{jk} = (\underline{V}_j - \underline{V}_k + \underline{E}_{jk})\, \underline{Y}_{jk} \text{ la dipolul activ,} \tag{2-102}$$

$$\underline{I}_{jk} = (\underline{V}_j - \underline{V}_k)\, \underline{Y}_{jk} \text{ la dipolul pasiv.} \tag{2-103}$$

Aflarea celor n-1 potențiale se face cu ajutorul unui sistem de ecuații algebrice care se obțin cu ajutorul teoremei I a lui Kirchhoff scrisă la cele $n-1$ noduri:

$$\begin{cases} \underline{I}_{12} + \underline{I}_{13} + \ldots + \underline{I}_{1n} + \underline{I}_{10} = 0 \\ \underline{I}_{21} + \underline{I}_{23} + \ldots \underline{I}_{2n} + \underline{I}_{20} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{I}_{n-1.1} + \underline{I}_{n-1.2} + \ldots + \underline{I}_{n-1,n} + \underline{I}_{n-1.0} = 0 \end{cases} \tag{2-104}$$

La scrierea sistemului (2-104) s-au considerat pozitivi curenții în ordinea indicilor (pentru un nod toți curenții „pleacă" din el). De asemenea, s-a notat cu indicele 0 nodul cu potențialul de referință.

Înlocuind expresiile de forma (2-102) în sistemul (2-104) și ordonînd, obținem:

$$\begin{cases} \underline{Y}_{11}\underline{V}_1 - \underline{Y}_{12}\underline{V}_2 - \ldots\ldots\ldots - \underline{Y}_{1,n-1}\underline{V}_{n-1} = \underline{I}_{11}^{(sc)} \\ -\underline{Y}_{21}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 - \ldots\ldots\ldots - \underline{V}_{2,n-1}\underline{V}_{n-1} = \underline{I}_{22}^{(sc)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\underline{Y}_{n-1}\underline{V}_1 - \underline{Y}_{n-2}\underline{V}_2 - \ldots\ldots\ldots + \underline{Y}_{n-1,n-1}\underline{V}_{n-1} = \underline{I}_{n-1,n-1}^{(sc)} \end{cases} \quad (2\text{-}105)$$

în care: $\underline{Y}_{jj}$ este suma admitanțelor laturilor conectate la nodul j ($\underline{Y}_{jj} = \underline{Y}_{j1} + \underline{Y}_{j2} + \ldots + \underline{Y}_{j,n-1} + \underline{Y}_{j,0}$), $\underline{Y}_{jk}$ — admitanța laturii cuprinsă între nodul j și k și:

$$\underline{I}_{jj}^{(sc)} = -\underline{Y}_{j1}\underline{E}_{j1} - \underline{Y}_{j2}\underline{E}_{j2} - \ldots - \underline{Y}_{j,n-1}\underline{E}_{j,n-1} - \underline{Y}_{j,0}\underline{E}_{j0}. \quad (2\text{-}106)$$

Relația (2-106) reprezintă suma curenților de scurtcircuit din laturile care sînt conectate la nodul j.

După rezolvarea sistemului (2-105) se determină potențialele celor $n-1$ noduri și apoi cu relații de tipul (2-102) sau (2-103) se găsesc curenții laturilor.

Observație. Teorema potențialelor nodurilor este dual㠠 teoremei curenților de contur. Mărimile duale sînt:

$$\underline{I} \to \underline{U}; \quad \underline{Z} \to \underline{Y}; \quad \underline{E} \to \underline{I}^{(sc)}; \; nod \to buclă; \; buclă \to nod.$$

Această observație provine din dualitatea teoremelor lui Kirchhoff, deoarece pentru noduri se scrie: $\sum_{jk \in m} \underline{I}_{jk} = 0$, iar pentru bucle: $\sum_{jk \in 0} \underline{U}_{jk} = 0$, conform (2-80) și (2-81).

Sistemul (2-105) poate fi transpus matriceal și utilizat în vederea calculului automat.

2.3.4. Conservarea puterilor în curent alternativ sinusoidal

În curent alternativ sinusoidal se poate enunța următoarea *teoremă de conservare a puterilor: suma puterilor aparente complexe generate de sursele din rețea este egală cu suma puterilor aparente complexe de la bornele receptoarelor:*

$$\sum_{jk \in l} \underline{S}_{jk}^{(g)} = \sum_{jk \in l} \underline{S}_{jk}^{(r)} \quad (2\text{-}107)$$

În relația (2-107) s-a notat cu $S_{jk}^{(g)}$ și $S_{jk}^{(r)}$ puterea aparentă a generatorului și respectiv a receptorului din latura jk. Simbolul $jk \in l$ arată că suma se efectuează asupra tuturor celor l laturi ale rețelei.

Relația (2-107) se mai poate scrie:

$$\sum_{jk \in l} (P_{jk}^{(g)} + jQ_{jk}^{(g)}) = \sum_{jk \in l} (P_{jk}^{(r)} + jQ_{jk}^{(r)}), \quad (2\text{-}108)$$

de unde rezultă două egalități:

$$\sum_{jk \in l} P_{jk}^{(g)} = \sum_{jk \in l} P_{jk}^{(r)} \text{ și } \sum_{jk \in l} Q_{jk}^{(g)} = \sum_{jk \in l} Q_{jk}^{(r)}, \quad (2\text{-}109)$$

ceea ce înseamnă că pe de o parte suma puterilor active ale surselor din rețea este egală cu suma puterilor active disipate pe rezistoarele rețelei, iar pe de altă parte suma puterilor reactive ale surselor este egală cu suma puterilor reactive ale bobinelor și condensatoarelor din rețea.

Pe cînd puterile active sînt numai pozitive, puterile reactive sînt și pozitive (la bobine) și negative (la condensatoare).

Teorema conservării puterilor în c.a. folosește la întocmirea *bilanțului puterilor* rețelei în vederea verificării rezultatelor obținute în calculul circuitelor printr-o metodă oarecare.

2.4. CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM SINUSOIDAL CU CUPLAJE MAGNETICE

La unele rețele de c.a. între două sau mai multe laturi există cuplaje magnetice „strînse". Așa se întîmplă în rețelele care conțin transformatoare electrice, mașini electrice etc.

2.4.1. Inductivități mutuale

În figura 2-37 se reprezintă două bobine reale cuplate magnetic și separate galvanic, avînd fiecare rezistențele R_1 și R_2 și inductivitățile proprii L_1 și L_2. Între laturi există un cuplaj magnetic dat de inductivitatea mutuală L_{12}. Dacă notăm cu (v. cap. 1 și cap. 4):

φ_{11} — fluxul inductiei magnetice produs de către curentul i_1 printr-o suprafață care se sprijină pe o spiră a primei bobine (flux fascicular — v. cap. 4);

$\Phi_{11} = N_1\varphi_{11}$ — fluxul total din prima bobină;

φ_{22} — fluxul fascicular printr-o spiră produs de curentul i_2 prin a doua bobină;

$\Phi_{22} = N_2\varphi_{22}$ — fluxul total din a doua bobină;

atunci: $K\Phi_{11} = \Phi_{21}$ este partea din fluxul primei bobine care străbate a doua bobină, și $K\Phi_{22} = \Phi_{12}$ este partea din fluxul bobinei a doua care străbate prima bobină în care $K \leqslant 1$ și poartă denumirea de *coeficient de cuplaj magnetic*. Expresia lui K este dată de relația (1-11) care — cu notațiile folosite aici — devine:

$$K = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}. \tag{2-110}$$

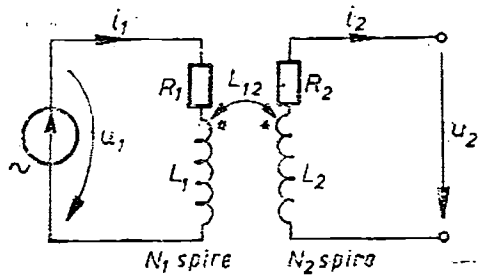


Fig. 2-37

Pentru $K > 0{,}7$ se spune că cuplajul magnetic este strîns și în mod necesar la calculul circuitelor magnetice se ia în evidență inductivitatea mutuală.

Pentru $K < 0{,}2$ cuplajul magnetic este slab și se pot neglija inductivitățile mutuale.

La relația (2-110) se ajunge dacă se notează cu eL_1 și eL_2 t.e.m. de inducție proprie din cele două bobine și cu e e_{12}, e_{21} t.e.m. de inducție mutuală și dacă se scriu expresiile lor:

$$e_{L1} = -N_1 \frac{d\varphi_{11}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt}, \tag{2-111}$$

$$e_{12} = -N_1 \frac{d\varphi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{di_2}{dt}, \tag{2-112}$$

$$e_{L2} = -N_2 \frac{d\varphi_{22}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt}. \tag{2-113}$$

$$e_{21} = -N_2 \frac{d\varphi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{di_1}{dt}. \tag{2-114}$$

Împărțind (2-111) la (2-114), (2-112) la (2-113) și ținînd seama de: $\varphi_{12} = K\varphi_{22}$ și $\varphi_{21} = K\varphi_{11}$ se obține:

$$\frac{N_1}{KN_2} = \frac{L_1}{L_{12}} \text{ și } \frac{N_1}{KN_2} = \frac{L_2}{L_{21}}.$$

Cum $L_{12} = L_{21}$ se obține (2-110) prin înmulțirea, membru cu membru, a egalităților de mai sus.

2.4.2. Ecuațiile circuitelor cuplate magnetic

Dacă se scrie legea conducției pentru cele două laturi ținînd seama de t.e.m. de inducție mutuală se obține:

$$\begin{aligned} e_{L1} + e_{12} &= R_1 i_1 - u_1, \\ e_{L2} + e_{21} &= R_2 i_2 + u_2. \end{aligned} \tag{2-115}$$

Luînd în considerație relațiile (2-111), ... (2-114) și faptul că tensiunile și curenții sînt sinusoidali, ecuațiile (2-115) se pot scrie în complex:

$$\begin{aligned} -j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega L_{12} \underline{I}_2 &= R_1 \underline{I}_1 - \underline{U}_1, \\ -j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega L_{12} \underline{I}_1 &= R_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2. \end{aligned} \tag{2-116}$$

sau:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 (R_1 + j\omega L_1) + j\omega L_2 \underline{I}_2, \\ -j\omega L_{12} \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 (R_2 + j\omega L_2) + U_2. \end{aligned} \tag{2-117}$$

Se notează: $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$; $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$, care sînt impedanțele celor două laturi și: $j\omega L_{12} = \underline{Z}_m$ care este *impedanța de cuplaj magnetic* a celor două circuite.

Cu aceste notații relațiile (2-116) se mai scriu:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m, \\ -\underline{Z}_m \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Relațiile (2-118) arată că prezența cuplajelor magnetice face să apară o impedanță suplimentară ($\underline{Z}_m$) care modifică impedanța laturii respective.

La calculul circuitelor de c.a. cu cuplaje magnetice trebuie să se țină seama de această impedanță de cuplaj.

Dacă cele două laturi cuplate magnetic sînt conectate și galvanic în serie, atunci, $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$ și $\underline{Z}_m$ se adună la impedanța laturii respective.

2.5. CIRCUITE TRIFAZATE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM SINUSOIDAL

2.5.1. Elemente introductive

Un ansamblu de circuite electrice în care acționează trei tensiuni electromotoare alternative de aceeași frecvență dar de faze diferite formează un sistem trifazat de circuite electrice. Unul dintre cele trei circuite formează o *fază* a sistemului trifazat.

În circuitele electrice trifazate acționează un *sistem trifazat de t.e.m.* rezultînd un sistem trifazat al tensiunilor la borne și un *sistem trifazat de curenți electrici.*

Sistemul trifazat al tensiunilor sau al curenților poate fi simetric sau nesimetric. *Sistemul trifazat simetric* conține trei tensiuni (sau trei curenți) cu aceeași amplitudine (sau valoare efectivă) și defazate între ele cu același unghi, $\frac{2\pi}{3}$.

Sistemul trifazat nesimetric conține trei tensiuni sau trei curenți care au în general valori efective diferite și defazaje diferite.

În sistemele trifazate există receptoare trifazate compuse din dipoli pasivi, fiecare dipol — care are o anumită impedanță — reprezintă o fază a receptorului. Dacă impedanțele în complex pe cele trei faze sînt egale sistemul trifazat de la receptor este *echilibrat;* cînd nu sînt egale despre sistemul trifazat se spune că este *dezechilibrat.* Noțiunea de sistem trifazat echilibrat sau dezechilibrat se referă la sistemul trifazat al impedanțelor (mărimi invariabile în timp).

Sursele și impedanțele de pe cele trei faze care formează circuitele trifazate pot fi legate galvanic între ele sau nu. Legarea se face în două moduri: stea sau triunghi. În practică se utilizează sistemele trifazate legate care reduc numărul de conductoare ale liniei ce conectează sursa trifazată de receptor.

Sistemele trifazate sînt utilizate în transportul energiei electrice pentru reducerea numărului de conductoare ale liniei de transport (de la 6 la 3 conductoare) și în mașinile electrice rotative și liniare pentru obținerea cîmpurilor magnetice învîrtitoare sau progresive.

2.5.2. Sisteme trifazate simetrice

Din definiția dată la 2.5.1. sistemelor simetrice trifazate, rezultă că un sistem simetric trifazat de tensiuni poate fi scris:

$$\begin{aligned} u_A &= U_m \sin(\omega t + \varphi_u), \\ u_B &= U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{2\pi}{3}\right), \\ u_C &= U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{2-119}$$

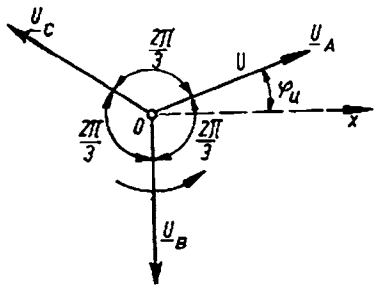


Fig. 2-38

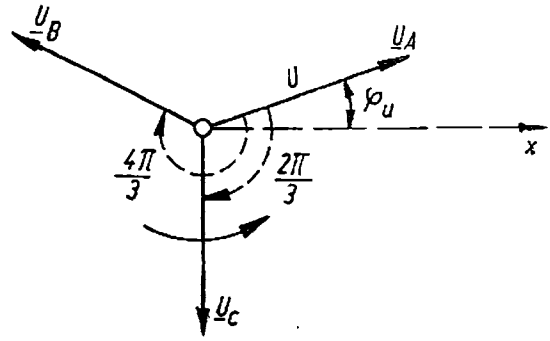


Fig. 2-39

Reprezentarea fazorială a sistemului (2-119) este arătată în figura 2-38.

Sistemele simetrice trifazate pot fi de succesiune: *directă, inversă* şi *omopolară.*

Dacă succesiunea fazorilor care formează sistemul trifazat este în sens trigonometric direct (ca în figura 2-38) sistemul simetric este direct. Expresiile (2-119) reprezintă un sistem simetric direct de tensiuni. Deci, ordinea fazelor în sistemul simetric direct este: *A, B, C.*

Dacă succesiunea fazorilor unui sistem simetric se face în sens trigonometric invers el este un sistem simetric invers. Sistemul trifazat de tensiuni:

$$\begin{aligned} u_A &= U_m \sin(\omega t + \varphi_u), \\ u_B &= U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{4\pi}{3}\right), \\ u_C &= U_m \sin\left(\omega t + \varphi_u - \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{2-120}$$

formează un sistem simetric invers de tensiuni; el este reprezentat fazorial în figura 2-39. Ordinea fazelor în sistemul simetric invers este: *A, C, B.*

Expresiile (2-119) şi (2-120) se pot scrie în complex:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= U e^{j\varphi_u}, \\ \underline{U}_B &= U e^{j\left(\varphi_u - \frac{2\pi}{3}\right)}, \\ \underline{U}_C &= U e^{j\left(\varphi_u - \frac{4\pi}{3}\right)} \end{aligned} \tag{2-121}$$

şi

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= U e^{j\varphi_u}, \\ \underline{U}_B &= U e^{j\left(\varphi_u - \frac{4\pi}{3}\right)}, \\ \underline{U}_C &= U e^{j\left(\varphi_u - \frac{2}{3}\right)}. \end{aligned} \tag{2-122}$$

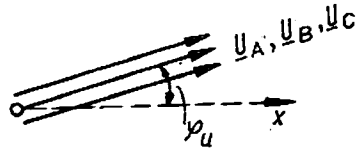


Fig. 2-40

Să notăm $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ — un număr complex cu modulul 1 și cu faza $\frac{2\pi}{3}$, numit *operator de rotație* (pentru 120°) deoarece dacă se înmulțește cu un fazor în planul complex nu-i schimbă modulul, dar îl rotește în sens trigonometric cu un unghi de $\frac{2\pi}{3}$. Cu această notație expresiile (2-121) și (2-122) devin:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= U e^{j\varphi_u} = \underline{U}, \\ \underline{U}_B &= \underline{a}^2 \underline{U}, \\ \underline{U}_C &= \underline{a}\,\underline{U}, \end{aligned} \tag{2-123}$$

care este sistemul simetric direct, și respectiv:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{U}, \\ \underline{U}_B &= \underline{a}\underline{U}, \\ \underline{U}_C &= \underline{a}^2 \underline{U}, \end{aligned} \tag{2-124}$$

care reprezintă sistemul invers.

Se poate ușor verifica relația:

$$1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0. \tag{2.125}$$

Dacă se face suma fazorilor care compun cele două sisteme simetrice se obține:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C &= \underline{U}\,(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) = 0, \\ \underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C &= \underline{U}\,(1 + \underline{a} + \underline{a}^2) = 0, \end{aligned} \tag{2-126}$$

adică suma fazorilor care reprezintă un sistem simetric direct sau invers este nulă. Această relație este valabilă și pentru valorile instantanee

$$u_A + u_B + u_C = 0. \tag{2-127}$$

Sistemul simetric homopolar se obține în cazul cînd diferența fazelor dintre două mărimi succesive este nulă, cei trei fazori care reprezintă sistemul simetric homopolar fiind în fază (fig. 2-40). În complex sistemul homopolar se scrie:

$$\underline{U}_A = \underline{U}; \quad \underline{U}_B = \underline{U}; \quad \underline{U}_C = \underline{U}. \tag{2-128}$$

2.5.3. Producerea t.e.m. trifazate simetrice

Cel mai simplu generator de t.e.m. trifazate se poate obține cu ajutorul a trei spire ale căror plane fac unghiuri de $\frac{2\pi}{3}$ radiani și care se rotesc cu viteză constantă într-un cîmp de inducție magnetică uniformă $\vec{B}$ (fig. 2-41).

În spira A se va induce o t.e.m. dată de relația: $e_A = -\frac{d\Phi}{dt}$, unde fluxul magnetic Φ printr-o arie ce se sprijină pe spira A se poate scrie: $\Phi = \bar{B} \cdot \bar{A}$, în care $\bar{A}$ este vectorul arie orientat (normal pe suprafața spirei). Deoarece $\Phi = \bar{B} \cdot \bar{A} = BA \cos \alpha$ (fig. 2-41) atunci $e_A = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} BA \cos \alpha = BA \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$; cum $\alpha = \omega t + \varphi_e$ se obține în final: $e_A = \omega BA \cdot \sin(\omega t + \varphi_e) = E_m \sin(\omega t + \varphi_e)$.

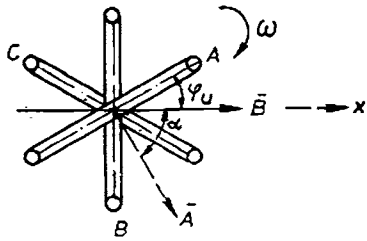


Fig. 2-41

În mod similar, pentru celelalte două spire obținem:

$$e_B = E_m \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$e_C = E_m \sin\left(\omega t + \varphi_e - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Astfel se obține un sistem trifazat de t.e.m.

În practică acest procedeu de a obține t.e.m. trifazate este greu de realizat, deoarece nu se pot crea cîmpuri magnetice omogene și suficient de intense în aer. Din acest motiv generatoarele practice de c.a. au o construcție diferită care va fi prezentată în § 6.4.

2.5.4. Conexiuni în sistemele trifazate

Să considerăm un generator de t.e.m. alternative simetrice nelegat galvanic și un receptor trifazat compus din trei dipoli cu impedanțe identice (receptor echilibrat), de asemenea nelegate între ele (fig. 2-42). Fiecare fază a generatorului este legată cu faza respectivă a receptorului.

Sistemul trifazat reprezentat în figura 2-42 este nelegat electric, pentru transportul energiei de la sursă la receptor fiind nevoie de 6 conductoare pe linia de transport. Dacă se conectează atît sursa cît și receptorul în stea sau în triunghi, numărul de conductoare se reduce.

Conectarea în stea

În figura 2-43 este reprezentată conectarea în stea a sursei și receptorului. Conductoarele de linie se reduc la 3 (AA', BB' și CC'). Conductorul OO' care leagă „centrele" celor două grupări poartă denumirea de *nul* sau *neutru*.

La sistemele trifazate legate apar două feluri de mărimi: mărimi electrice de fază și de linie:

— tensiuni de fază și linie,

— curenți de fază și linie.

În figura 2-43 tensiunile de fază sînt: $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$ și $\underline{U}_C$, iar tensiunile de linie $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$, $\underline{U}_{CA}$. Curenții de fază sînt: $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$ și $\underline{I}_C$ care coincid la legarea în stea cu cei de linie.

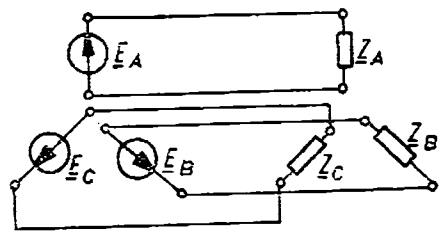


Fig. 2-42

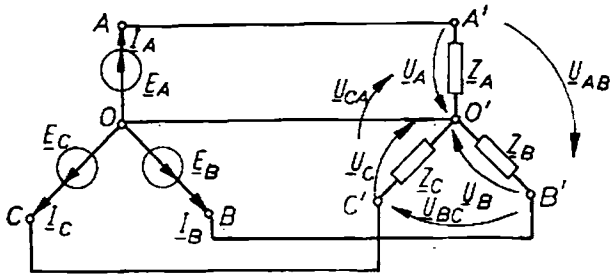


Fig. 2-43

Din figura 2-43 se pot deduce relațiile dintre mărimile de fază și linie. Pentru curenți, evident:

$$I_f = I_l = I, \tag{2-129}$$

iar pentru tensiuni se poate scrie:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = \underline{U}(1 - \underline{a}^2) = \underline{U}\sqrt{3}\, e^{j\frac{\pi}{6}}. \tag{2-130}$$

Cum valorile efective $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_l = U$ și $U_A = U_B = U_C = \underline{U}_f$, rezultă că relația dintre valorile efective este:

$$U = \sqrt{3}\, U_f. \tag{2-131}$$

Deci, tensiunile de linie la legarea în stea au valorile efective mai mari decît cele de fază cu $\sqrt{3}$ ori; de asemenea, sînt defazate cu $\frac{\pi}{6}$ radiani înaintea celor de fază.

Conexiunea în triunghi

Această conexiune este prezentată în figura 2-44. După cum vedem, aici nu mai există firul de nul, transportul energiei electrice de la sursă la receptor făcîndu-se numai cu 3 conductoare ale liniei.

În practică generatorul nu se leagă în triunghi, receptorul însă se leagă adesea în triunghi. Între mărimile de linie și fază în acest caz există relațiile:

$$U_f = U_l = U, \tag{2-132}$$

$$I_l = I = \sqrt{3}\, I_f. \tag{2-133}$$

Relația (2-133) rezultă din aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff în unul din nodurile rețelei; de exemplu, în nodul A' (știind că $I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = I_f$):

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = \underline{I}_f(1 - \underline{a}^2) = \underline{I}_f\sqrt{3}\, e^{j\frac{\pi}{6}}.$$

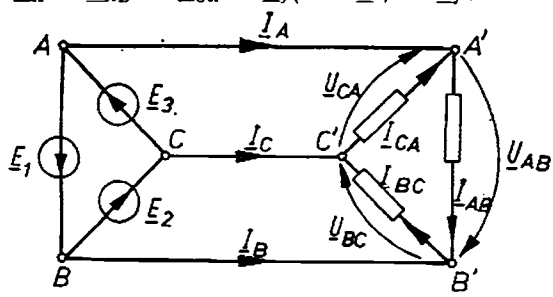


Fig. 2-44

2.5.5. Rezolvarea rețelelor de curent alternativ trifazat

Problema rezolvării rețelelor de curent alternativ trifazat se pune, de obicei, sub forma: cunoscîndu-se sistemul trifazat de tensiuni și impedanțele receptorului să se determine curenții din rețea. Ținînd seama de existența în rețelele trifazate a sistemelor simetrice sau nesimetrice de tensiuni sau de curenți și de existența receptoarelor cu impedanțe echilibrate sau neechilibrate, se pot ivi următoarele cazuri de rețele trifazate;

— rețele alimentate cu tensiuni simetrice cu receptor echilibrat (rezultă un sistem de curenți simetrici);

— rețele alimentate cu tensiuni simetrice cu receptor dezechilibrat (rezultă curenți nesimetrici);

— rețele alimentate cu tensiuni nesimetrice cu receptor echilibrat (rezultă curenți nesimetrici);

— rețele cu tensiuni nesimetrice, receptor dezechilibrat (rezultă curenți nesimetrici).

Circuite trifazate alimentate cu tensiuni simetrice și cu receptor echilibrat

Receptorul legat în stea (fig. 2-45). Să considerăm sistemul simetric de tensiuni de fază a generatorului $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ care alimentează receptorul echilibrat legat în stea cu impedanțele: $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$.

Dacă se notează impedanța conductorului de nul cu $\underline{Z}_0$ și tensiunea dintre punctele de nul ale generatorului și receptorului cu $\underline{U}_0$, curenții din rețea sînt dați de:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{U}_A - \underline{U}_0}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_f - \underline{U}_0}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_B = \frac{a^2\underline{U}_f - \underline{U}_0}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_C = \frac{a\underline{U}_f - \underline{U}_0}{\underline{Z}} \tag{2-134}$$

Aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul O' se scrie:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_0. \tag{2-135}$$

Înlocuind în relația (2-135) expresiile (2-134), se obține:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_0 = 0 \text{ și } \underline{U}_0 = 0. \tag{2-136}$$

Curenții:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_f}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_B = a^2\frac{\underline{U}_f}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_C = \frac{a\underline{U}_f}{\underline{Z}}, \tag{2-137}$$

formează un sistem simetric.

Reprezentarea fazorială a curenților și tensiunilor este dată în figura 2-46.

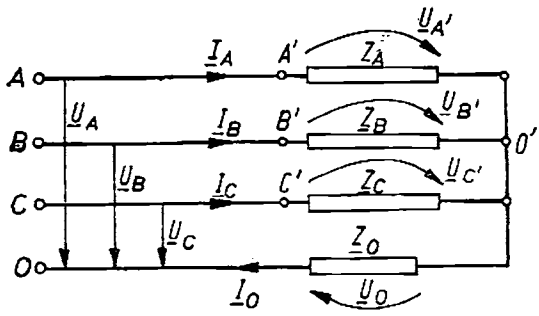


Fig. 2-45

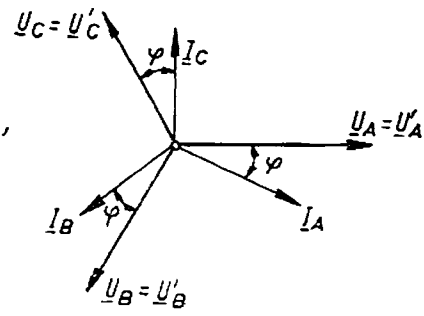


Fig. 2-46

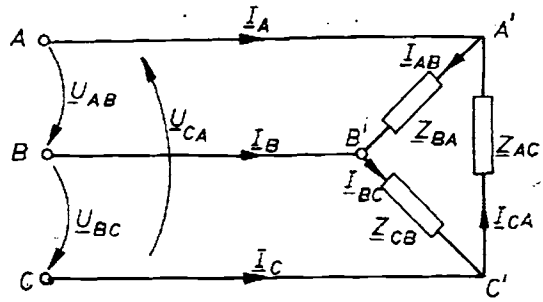


Fig. 2-47

Din cele prezentate rezultă că în cazul unui receptor trifazat echilibrat legat în stea, alimentat cu un sistem simetric de tensiune, firul de nul poate lipsi. Curenții pe fiecare fază pot fi calculați ca și într-un circuit monofazat care are la borne tensiunea de fază (aplicată între un conductor de linie și conductorul de nul):

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}} = \frac{U_f}{Z} e^{-j\varphi}.$$

Receptorul legat în triunghi (fig. 2-47). Să considerăm sistemul tensiunilor de linie simetrice care alimentează receptorul echilibrat legat în triunghi:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U},\ \underline{U}_{BC} = \underline{a}^2\underline{U};\quad \underline{U}_{CA} = \underline{a}\,\underline{U},$$

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z} = Z e^{j\varphi}.$$

Curenții din fază ai receptorului se pot determina cu relațiile:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{Z} e^{-j\varphi};\quad \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}} = a^2 \frac{\underline{U}}{Z} e^{-j\varphi};\quad \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}} = \underline{a}\frac{\underline{U}}{Z} e^{-j\varphi}. \tag{2-138}$$

După cum rezultă din relația (2-138), curenții de fază formează un sistem simetric.

Curenții de linie se determină aplicînd teorema întîi a lui Kirchhoff în cele trei noduri ale receptorului:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = (1 - \underline{a})\frac{\underline{U}}{\underline{Z}} e^{-j\varphi} = \sqrt{3}\frac{\underline{U}}{Z} e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)},$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB} = (\underline{a}^2 - 1)\frac{\underline{U}}{\underline{Z}} e^{-j\varphi} = \underline{a}^2\sqrt{3}\frac{\underline{U}}{Z} e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)}, \tag{2-139}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC} = (\underline{a} - \underline{a}^2)\frac{\underline{U}}{\underline{Z}} e^{-j\varphi} = \underline{a}\sqrt{3}\frac{\underline{U}}{Z} e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Aceste relații ne arată că și curenții de linie formează un sistem simetric; între valorile efective ale curenților de linie și fază există relația:

$$I = \sqrt{3}\, I_f. \tag{2-140}$$

Puteri în rețelele de curent alternativ echilibrate cu tensiuni simetrice

Deoarece în acest caz valorile efective ale tensiunilor și curenților de fază au aceeași valoare, cele trei puteri se pot scrie:

$$P = 3\,U_f I_f \cos\varphi; \quad Q = 3\,U_f I_f \sin\varphi; \quad S = 3\,U_f I_f. \tag{2-141}$$

Utilizînd pentru exprimarea puterilor mărimile de linie se obține:
— la legarea în stea a receptorului (fig. 2-45):

$$P = 3\frac{U}{\sqrt{3}} I \cos\varphi = \sqrt{3}\,UI\cos\varphi,\ Q = \sqrt{3}UI\sin\varphi,\ S = \sqrt{3}\,UI; \tag{2-142}$$

— la legarea în triunghi a receptorului (fig. 2-47):

$$P = 3U\frac{I}{\sqrt{3}}\cos\varphi = \sqrt{3}\,UI\cos\varphi; \quad Q = \sqrt{3}\,UI\sin\varphi; \quad S = \sqrt{3}\,U\,I. \tag{2-143}$$

Observăm că, indiferent de modul de legare a receptorului, puterile au aceeași expresie dacă se utilizează pentru scrierea lor mărimile de linie.

Circuite trifazate alimentate cu tensiuni nesimetrice și cu receptor dezechilibrat

La aceste rețele sistemul tensiunilor de fază care alimentează receptoarele dezechilibrate formează un sistem nesimetric încît față de conductorul de nul se poate scrie:

$$\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C \neq 0. \tag{2-144}$$

Sistemul tensiunilor de linie însă satisface egalitatea:

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0. \tag{2-145}$$

Receptorul dezechilibrat este descris de relațiile:

$$\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C \text{ (stea)}; \quad \underline{Z}_{AB} \neq \underline{Z}_{BC} \neq \underline{Z}_{CA} \text{ (triunghi)}.$$

Rezolvarea acestor rețele se face tot cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff precum urmează.

Receptorul cu conexiune în stea (fig. 2-48). Curenții de linie, care coincid cu cei de fază, se calculează cu relațiile:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}'_A}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{U}_A - \underline{U}_0}{\underline{Z}_A} = (\underline{U}_A - \underline{U}_0)\,\underline{Y}_A,$$

$$\underline{I}_B = (\underline{U}_B - \underline{U}_0)\,\underline{Y}_B, \tag{2-146}$$

$$\underline{I}_C = (\underline{U}_C - \underline{U}_0)\,\underline{Y}_C.$$

Cum: $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ și $\underline{Y}_A$, $\underline{Y}_B$, $\underline{Y}_C$ sînt cunoscute, pentru a afla curenții trebuie determinată tensiunea

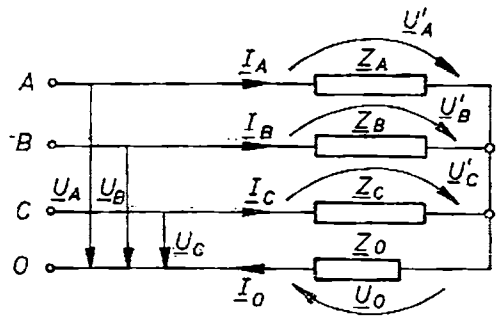


Fig. 2-48

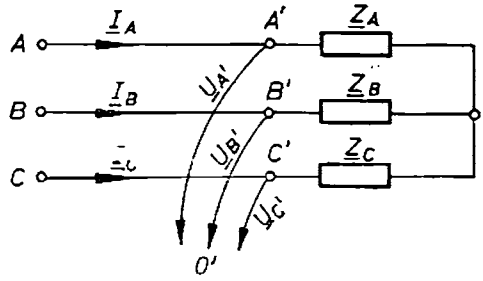


Fig. 2-49

dintre cele două puncte de nul $\underline{U}_0$. Din teorema întîi a lui Kirchhoff aplicată în punctul O' rezultă:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_0. \tag{2-147}$$

Înlocuind expresiile (2-146) în (2-147) și ținînd cont că:

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}_0\underline{I}_0 \text{ și } \underline{I}_0 = \underline{U}_0\underline{Y}_0$$

obținem:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_A\underline{Y}_A + \underline{U}_B\underline{Y}_B + \underline{U}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_0}. \tag{2-148}$$

Cu ajutorul relației (2-148) se determină $\underline{U}_0$ *(tensiunea de deplasare a nulului)* și apoi cu relațiile (2-46) se calculează curenții. Relația (2-148) poartă denumirea de *teorema tensiunii punctelor neutre*. Această teoremă stă la baza rezolvării rețelelor de c.a. trifazat cu receptorul în stea indiferent dacă generatorul are sau nu nulul accesibil. Dacă nulul nu este accesibil, se alege un nul „artificial" arbitrar (fig. 2-49). În acest caz $\underline{Y}_0 = 0$ și deci:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_A\underline{Y}_A + \underline{U}_B\underline{Y}_B + \underline{U}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \tag{2-149}$$

Alegerea punctului de nul artificial se face în așa fel încît exprimarea tensiunilor $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ să fie cît mai simplă. De exemplu, se poate alege ca nul artificial punctul B din figura 2-49, caz în care:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_{AB}; \quad \underline{U}_B = 0; \quad \underline{U}_C = \underline{U}_{CA}$$

și deci:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_{AB}\underline{Y}_A + \underline{U}_{CA}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}.$$

Receptorul trifazat cu conexiunea în triunghi (fig. 2-50). Aici este valabilă relația (2-145) și curenții de fază se calculează direct cu ajutorul formei

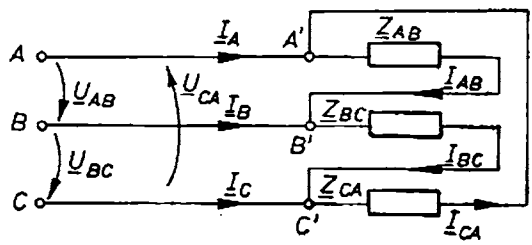


Fig. 2-50

complexe a legii lui Ohm generalizate:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \quad \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \quad \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}, \tag{2-150}$$

iar curenții de linie cu:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB};$$
$$\underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}. \tag{2-151}$$

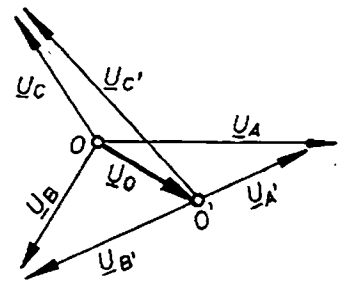


Fig. 2-51

În cazul rețelelor mai complicate, calculul curenților în regim nesimetric se face prin metoda componentelor simetrice (v. 2.5.6).

În practică, receptoarele dezechilibrate (spre exemplu receptoarele de iluminat care sînt conectate în mod aleator) produc curenți inegali, ca modul și fază, pe cele trei faze și ca urmare tensiunile acestor receptoare vor fi nesimetrice — pe unele faze apar supratensiuni, iar pe altele tensiuni sub cele nominale (fig. 2-51). Din acest motiv în rețelele de curent alternativ cu receptoare dezechilibrate se iau măsuri de reducere a nesimetriei tensiunilor la receptoare. În cazul receptoarelor dezechilibrate legate în stea o posibilitate de micșorare a acesteia este folosirea conductorului de nul (Y_0 mare) care duce la micșorarea tensiunii de deplasare a nulului (U_0).

Puteri în rețelele trifazate dezechilibrate. La aceste rețele puterile pe cele trei faze sînt inegale, însă pe baza principiului conservării puterilor putem scrie.

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C,$$
$$Q = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C,$$
$$\underline{S} = \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^* = P + jQ,$$

unde φ_A, φ_B, φ_C sînt unghiurile de defazaj dintre mărimile: U_A, I_A; $U_B I_B$ și respectiv U_C, I_C.

2.5.6. Metoda componentelor simetrice

Această metodă de calcul a circuitelor trifazate constă în descompunerea unui sistem nesimetric de tensiuni sau de curenți în trei sisteme simetrice, conform *teoremei componentelor simetrice.* Se calculează circuitul ca în cazul sistemelor simetrice (v. 2.5.5) și apoi se suprapun regimurile produse de fiecare sistem simetric. Evident, această metodă se poate aplica numai la circuitele liniare unde este valabilă metoda superpoziției.

Teorema componentelor simetrice

Un sistem nesimetric de tensiuni sau curenți se poate descompune în trei sisteme simetrice: direct, invers și homopolar.

Luînd sistemul nesimetric de tensiuni, se poate scrie:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_o + \underline{U}_d + \underline{U}_i,$$
$$\underline{U}_B = \underline{U}_o + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i, \tag{2-152}$$
$$\underline{U}_C = \underline{U}_o + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i.$$

Mărimile fundamentale $\underline{U}_0$, $\underline{U}_d$, $\underline{U}_i$ se numesc respectiv componenta homopolară, componenta directă și componenta inversă. În relația (2-152) se remarcă că sistemul nesimetric $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ s-a descompus în trei sisteme simetrice:

$\underline{U}_o$, $\underline{U}_o$, $\underline{U}_o$ — sistemul homopolar,

$\underline{U}_d$, $\underline{a}^2\underline{U}_d$, $\underline{a}\underline{U}_d$ — sistemul direct și

$\underline{U}_i$, $\underline{a}\underline{U}_i$, $\underline{a}^2\underline{U}_i$ — sistemul invers.

Deoarece se cunosc componentele sistemului nesimetric, se impune aflarea componentelor simetrice în funcție de acestea; din relațiile (2-152) se obține:

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C),$$

$$\underline{U}_d = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{a}\underline{U}_B + \underline{a}^2\underline{U}_C), \qquad (2\text{-}153)$$

$$\underline{U}_i = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{a}^2\underline{U}_B + \underline{a}\underline{U}_C).$$

Cu ajutorul relațiilor (2-153) se pot determina componentele simetrice ale unui sistem nesimetric.

Filtre de componente simetrice

În mod practic componentele simetrice ale unui sistem nesimetric pot fi separate dintr-o rețea cu ajutorul *filtrelor de componente simetrice.*

Filtrul de componentă homopolară a unui sistem de tensiuni sau curenți nesimetrici se realizează cu ajutorul transformatoarelor de tensiune (fig. 2-52, *a*) sau, respectiv, de curent (fig. 2-52, *b*).

Dacă transformatoarele au rapoarte de transformare egal cu 1, atunci la cele două aparate de măsurat se obține:

$$\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C = 3\underline{U}_0 \text{ și } \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 3\underline{I}_o.$$

Deci, la voltmetru și ampermetru se măsoară componenta homopolară.

Filtrul pentru componenta directă și inversă se obține cu ajutorul a trei impedanțe legate în stea sau în triunghi. În figura 2-53 este reprezentată

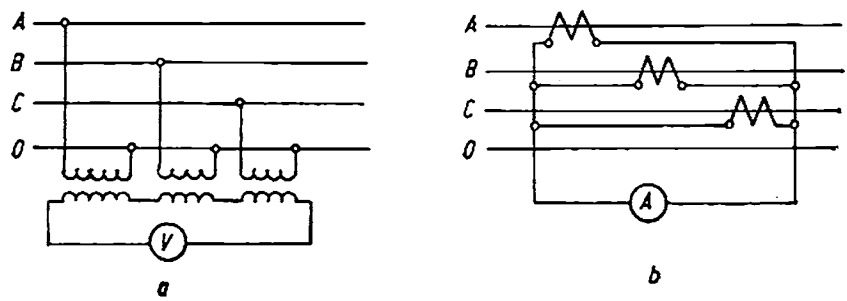


Fig. 2-52

schema unui filtru de curent. Se poate arăta că curentul care străbate impedanța $\underline{Z}_{AC}(\underline{I}_{CA})$ poate fi proporțională cu componenta directă sau inversă a sistemului nesimetric de curenți: $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$, în funcție de alegerea convenabilă a structurii impedanțelor $\underline{Z}_{CB}$ și $\underline{Z}_{BA}$.

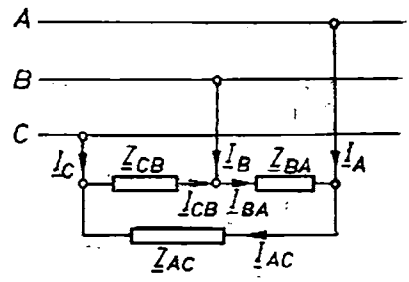


Fig. 2-53

Dacă se scriu ecuațiile din teoremele lui Kirchhoff:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_{BA} - \underline{I}_{AC} = 0,$$
$$\underline{I}_B + \underline{I}_{CB} - \underline{I}_{BA} = 0,$$
$$\underline{I}_C + \underline{I}_{AC} - \underline{I}_{CB} = 0,$$
$$\underline{Z}_{CB}\underline{I}_{CB} + \underline{Z}_{BA}\underline{I}_{BA} + \underline{Z}_{AC}\underline{I}_{AC} = 0,$$

atunci rezolvîndu-le în raport cu $\underline{I}_{AC}$, obținem:

$$\underline{I}_{AC} = \frac{\underline{I}_A\underline{Z}_{BA} - \underline{I}_C\underline{Z}_{CB}}{\underline{Z}_{CB} + \underline{Z}_{AC} + \underline{Z}_{BA}}.$$

Cum: $\underline{I}_A = \underline{I}_d + \underline{I}_i$; $\underline{I}_C = a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i$ și considerînd sistemul trifazat fără nul (deci lipsește componenta homopolară) rezultă:

$$\underline{I}_{AC} = \frac{\underline{I}_d(\underline{Z}_{BA} - a\underline{Z}_{CB}) + \underline{I}_i(\underline{Z}_{BA} - a^2\underline{Z}_{CB})}{\underline{Z}_{CB} + \underline{Z}_{AC} + \underline{Z}_{BA}}.$$

Pentru a separa componenta directă se impune ca $\underline{Z}_{BA} + a^2\underline{Z}_{CB} = 0$, iar pentru a separa componenta inversă, trebuie ca $\underline{Z}_{BA} - a\underline{Z}_{CB} = 0$.

Practic, se aleg în mod convenabil structura impedanțelor $\underline{Z}_{BA}$ și $\underline{Z}_{CA}$ încît să se realizeze aceste condiții.

Nesimetria unui sistem se apreciază prin:

— *gradul de disimetrie* definit prin raportul valorilor efective ale componentelor inversă și directă de tensiune:

$$\varepsilon_d = \frac{U_i}{U_d};$$

— *gradul de asimetrie* dat de raportul valorilor efective ale componentei homopolare și directe de tensiune:

$$\varepsilon_a = \frac{U_o}{U_d}.$$

Practic un sistem se consideră simetric dacă ε_d și $\varepsilon_a < 5\%$.

Circuite trifazate alimentate cu tensiuni nesimetrice și cu receptoare echilibrate

Să considerăm un circuit trifazat echilibrat (impedanțele egale) legate în stea și alimentat cu sistemul de tensiuni nesimetrice: $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C$ (fig. 2-54),

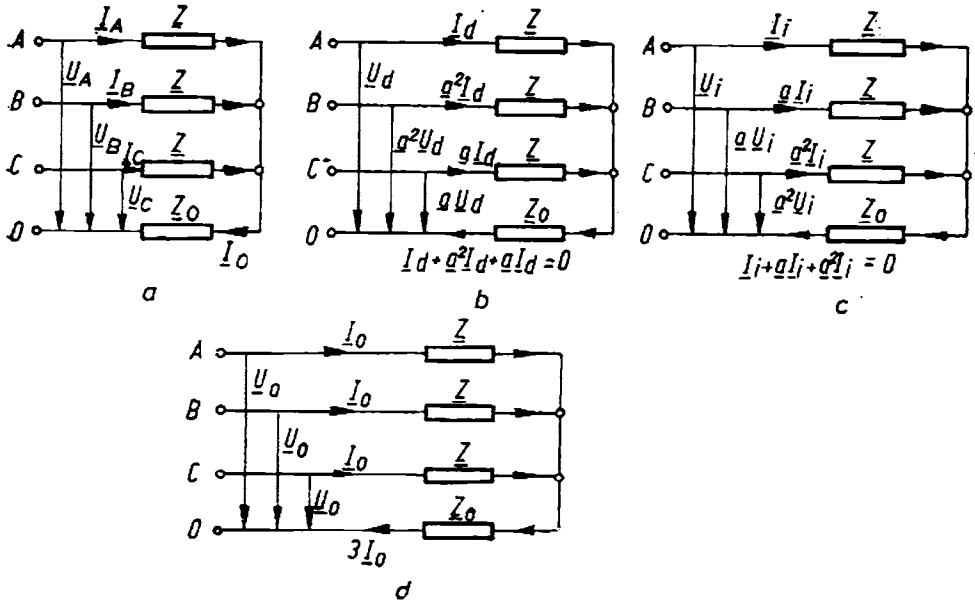


Fig. 2-54

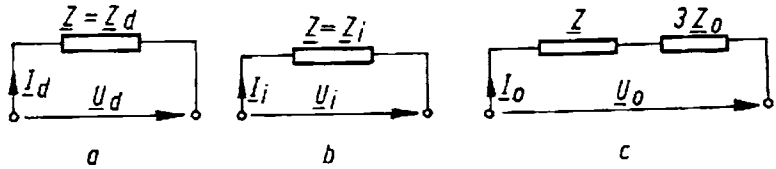


Fig. 2-55

Conform relațiilor (2-153) sistemul de tensiune nesimetrice se poate descompune în trei sisteme simetrice care acționează în circuitele din figurile 2-54, *b*, *c* și *d*, circuite care suprapuse dau regimul de funcționare al circuitului din figura 2-54, *a*.

Din schemele reprezentate în figurile 2-54, *b*, *c* și *d* se deduc componentele fundamentale:

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_o = \frac{\underline{U}_o}{\underline{Z} + 3\underline{Z}_0} \tag{2-154}$$

Relațiilor (2-154) le corespund trei circuite monofazate reprezentate în figura 2-55 și în care s-a notat:

$\underline{Z}_d = \underline{Z}$ — impedanța directă,

$\underline{Z}_i = \underline{Z}$ — impedanța inversă,

$\underline{Z}_o = \underline{Z} + 3Z_0$ — impedanța homopolară.

Cunoscînd componentele fundamentale ale sistemelor simetrice se pot calcula componentele nesimetrice ale curenților:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_o + \underline{I}_d + \underline{I}_i,$$
$$\underline{I}_B = \underline{I}_o + \underline{a}^2\underline{I}_d + \underline{a}\underline{I}_i,$$
$$\underline{I}_C = \underline{I}_o + \underline{a}\underline{I}_d + \underline{a}^2\underline{I}_i.$$

Capitolul 3

CHESTIUNI SPECIALE ÎN STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE

În cadrul acestui capitol (cu o denumire cam convențională!) vom prezenta unele elemente relative la studiul circuitelor electrice și anume pe cele care au importanță pentru pregătirea altor discipline prevăzute în planul de învățămînt (mai ales pentru cursul de „Elemente de electronică industrială și automatizări") *. De aceea, procedînd în concordanță cu „aparatura" de studiu obișnuită în tratarea chestiunilor de electronică și automatică, vom utiliza aici metode moderne de calcul bazate pe aplicarea teoriei distribuțiilor.

3.1. REGIMUL TRANZITORIU AL CIRCUITELOR ELECTRICE

Utilizarea metodelor de calcul al regimului tranzitoriu din circuitele electrice, rezultate prin aplicarea unor elemente de teoria distribuțiilor, este justificată aici deoarece, în acest caz, în circuite apar funcții cu discontinuități și derivatele acestora și se caută soluția unor ecuații diferențiale în aceste condiții. Aceste metode sînt în și mai mare măsură necesare la studiul fenomenelor din schemele electronice și la studiul sistemelor automate. În general, pentru schemele în care apare un contact ce acționează „instantaneu", se utilizează pentru modelarea acestui contact funcția treaptă Heaviside definită astfel:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

unde t este timpul. O astfel de idealizare este întotdeauna justificată atunci cînd, pe scara timpului cu care studiem fenomenul, durata de acționare a contactului este neglijabilă. Cînd acest semnal este derivat, apare în mod natural derivarea în punctul de discontinuitate, ceea ce implică utilizarea unor noțiuni din teoria distribuțiilor.

3.1.1. Elemente introductive

La conectarea circuitelor la surse de tensiune (continuă sau sinusoidală) nu se stabilesc instantaneu curenții (continui sau — respectiv — sinusoidali); în acest caz, în circuite apare un regim electrocinetic variabil denumit *regim tranzitoriu*. După cum vom arăta, durata regimurilor tranzitorii este,

* În mod special, acest capitol se adresează studenților Facultății de aeronave în vederea inițierii lor pentru cursul de „Elemente de electronică și automatică în aviație".

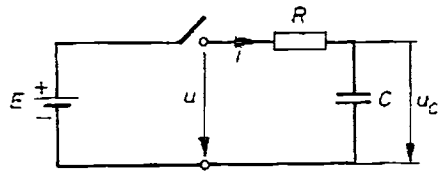


Fig. 3-1

teoretic, infinită; practic, însă, după un timp finit (de obicei de ordinul fracțiunilor de secundă) valorile curenților sau tensiunilor se apropie atît de mult de valorile regimului permanent final încît regimul tranzitoriu se consideră că a luat sfîrșit.

Calculul circuitelor electrice în regim tranzitoriu se face cu ajutorul legii lui Ohm generalizate (2-1) și a teoremelor lui Kirchhoff în curent variabil.

Să considerăm exemplul din figura 3-1. Presupunem că acțiunea contactului este foarte rapidă și are loc la $t = 0$. Atunci u este funcția:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E & t > 0 \end{cases} \qquad \text{deci} \quad u = Eh,$$

adică este treapta Heaviside multiplicată cu E. Cu sensurile de referință din figura 3-1 rezultă ecuația:

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = Eh(t), \tag{3-1}$$

unde q este sarcina electrică a condensatorului. Împărțind cu $R \neq 0$ se obține:

$$\dot{q} + \frac{q}{\tau} = \frac{E}{R} h,$$

unde $\tau = RC$ (secunde) este *constanta de timp* a circuitului*. Pentru $t > 0$ soluția este dată imediat (problema Cauchy cu condiții inițiale). Soluția ecuației omogene:

$$\dot{q} + \frac{q}{\tau} = 0$$

este:

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

unde q_0 este o constantă arbitrară, determinată prin condiția inițială. Soluția ecuației (3-1) este dată de soluția ecuației omogene plus soluția particulară a ecuației neomogene; așadar:

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + CE.$$

---

* Într-adevăr, dimensional: $[R] \cdot [C] = \frac{[U]}{[I]} \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[I] \cdot [t]}{[I]} = [t]$.

Notăm acum $CE = Q$ și considerăm cazul cînd la $t = 0$ avem $q(t = 0) = 0$, ceea ce ne permite să determinăm pe q_0. Rezultă:

$$q = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); \qquad t > 0.$$

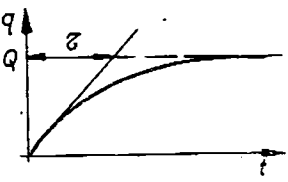


Fig. 3-2

Reprezentarea grafică a soluției este dată în figura 3-2; așadar condensatorul se încarcă exponențial, viteza de încărcare depinzînd de constanta de timp τ.

Propunem cititorului două exerciții simple:

— să evalueze $q(t = 3\tau)$ și să se exprime în procente raportul $q_{3\tau}/Q$;

— să interpreteze geometric, pe figura 3-2, semnificația constantei de timp τ.

Considerăm din nou schema din figura 3-1, în care $R = 0$. Atunci avem: $u(t) = Eh$ și prin urmare:

$$q = Cu = CEh = Qh,$$

pentru cazul cînd $q(t < 0) = 0$. Așadar condensatorul se încarcă brusc cu Q, la $t = 0$. Deci $q(t)$ este de forma treptei Heaviside, cu saltul Q în origine. Se pune acum problema să determinăm curentul cu care se încarcă acest condensator. Avem:

$$i = \frac{dq}{dt} = Q\frac{dh}{dt}. \tag{3-2}$$

Așadar, pentru $t = 0$ avem $i = 0$, iar pentru $t > 0$ avem de asemenea $i = 0$. În origine $h(t)$ nu este derivabilă. Se presupune atunci că i este zero peste tot, cu excepția originii, unde ia o valoare infinită. Acest răspuns nu este satisfăcător, deoarece dacă înlocuim pe E cu $2E$, atunci sarcina electrică devine $2Q$, ca și saltul în origine al lui $q(t)$ care este acum $2Q$. În acest caz curentul este „infinit" în origine, exact ca în cazul precedent? Iată deci că este necesar să generalizăm noțiunea de derivată, astfel încît o funcție cu salt să fie derivabilă în punctul de salt, iar derivata să exprime și mărimea saltului. În acest scop introducem cîteva elemente de teoria distribuțiilor.

3.1.2. Noțiuni de bază din teoria distribuțiilor

Spații fundamentale în distribuții

Considerăm funcții reale φ de o variabilă reală t, care au următoarele proprietăți:

$\varphi(t)$ are suport compact,

$\varphi(t)$ este indefinit derivabilă.

Notăm spațiul acestor funcții cu $\mathcal{D}$, astfel încît orice funcție cu proprietățile de mai sus aparține lui $\mathcal{D}$: $\varphi \in \mathcal{D}$. Un exemplu de astfel de funcție este:

$$\varphi(t; a, b) = \begin{cases} \exp\dfrac{ab}{(t-a)(t-b)} & t \in [a, b] \\ 0 & t \notin [a, b] \end{cases}$$

Se observă că suportul acestei funcții este intervalul mărginit și închis $[a, b]$, prin urmare această funcție are suport compact. Faptul că este indefinit derivabilă se verifică fără dificultate; ordinul de derivare poate fi oricît de mare, dar finit. De asemenea observăm că orice derivată a lui φ are de asemenea suport compact, deci și $\varphi^k \in \mathcal{D}$, unde $k \in N$ (număr natural).

Spațiul $\mathcal{D}$ al funcțiilor indefinit derivabile și cu suport compact se organizează ca spațiu vectorial, normat și complet, deci este un spațiu Banach. Există multe alte spații fundamentale în distribuții, dar pentru aplicațiile care urmează este suficient spațiul $\mathcal{D}$.

Distribuții

Avem în vedere numai distribuțiile definite pe spațiul fundamental $\mathcal{D}$; acestea sînt funcționalele liniare și continue definite pe $\mathcal{D}$ și cu valori numere reale (sau complexe). De exemplu, aplicația care fiecărei funcții $\varphi \in \mathcal{D}$ face să îi corespundă numărul $\varphi(0)$ este o funcțională liniară și continuă pe $\mathcal{D}$. Această funcțională se numește *distribuția lui Dirac* și se notează cu $\delta(t)$. Așadar:

$$\varphi(t) \overset{\delta}{\longmapsto} \varphi(0).$$

Un alt exemplu de distribuții este clasa distribuțiilor generate de funcții locale integrabile, adică de funcții care sînt absolut integrabile pe orice interval mărginit (a, b) de pe axa reală. Funcția treaptă Heaviside este o funcție locală integrabilă, deoarece este absolut integrabilă pe orice interval (a, b). *Distribuția Heaviside* este dată de funcționala:

$$\int_R h(t)\,\varphi(t)\,dt = \int_0^\infty \varphi(t)dt.$$

Această funcțională are ca valoare întotdeauna un număr finit, deoarece φ are suport compact, prin urmare integrala are întotdeauna limite finite, oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$. Așadar, orice funcție local integrabilă $f(t)$ generează o distribuție prin funcționala:

$$\int_R f(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

valoarea acestei integrale fiind întotdeauna un număr finit. Aceste distribuții se numesc *distribuții de tip funcție*. Să arătăm acum că $\delta(t)$ nu este o distribuție de tip funcție. Să presupunem că ar exista o funcție local integrabilă $x(t)$ care ar genera distribuția lui Dirac. Atunci ar fi necesar ca oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}$ să avem:

$$\int_R x(t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0).$$

În particular să considerăm funcția:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1/n^2}{1/n^2 - t^2}\right); & |t| < \dfrac{1}{n}; \quad \forall n \in N \\ 0 \quad ; & |t| \geqslant \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Avem atunci:

$$\varphi(0) = \frac{1}{e}.$$

Avem de asemenea:

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{+\frac{1}{n}} x(t) \exp\left(-\frac{1/n^2}{1/n^2 - t^2}\right) dt = \frac{1}{e}.$$

Se obține o contradicție, deoarece membrul stîng tinde către zero cînd n crește indefinit, iar membrul drept este o constantă. Așadar, distribuția Dirac $\delta(t)$ nu este de tip funcție. Ca notație pentru distribuții se utilizează scrierea:

$$< f, \varphi > \text{ sau } f(\varphi) \text{ etc.},$$

ceea ce conduce la:

$$< \delta(t), \varphi(t) > = \varphi(0)$$

$$< h(t), \varphi(t) > = \int_0^\infty \varphi$$

Cînd argumentul integralei este cunoscut și nu există ambiguități, scriem integrala în modul cel mai simplu:

$$\int \varphi(t)\, dt = \int \varphi$$

Funcționalele care definesc distribuțiile sînt aplicații; se știe că mulțimea aplicațiilor definite pe $\mathfrak{D}$ cu valori în R este denumită mulțimea „duală". Notăm această mulțime cu $\mathfrak{D}'$ (spațiul dual lui $\mathfrak{D}$); orice distribuție f este un element al lui $\mathfrak{D}'$. Vom nota în continuarea distribuțiile f și g prin $f, g \in \mathfrak{D}'$.

Egalitatea a două distribuții

Două distribuții sînt egale pe un interval T de pe axa reală dacă pentru orice $\varphi \in \mathfrak{D}$ pe T:

$$< f, \varphi > = < g, \varphi >,$$

sau, echivalent:

$$< f - g, \varphi > = 0.$$

Pentru două distribuții f și g de tip funcție, egalitatea distribuțiilor generate de ele nu înseamnă și egalitatea funcțiilor respective decît în sensul „aproape peste tot", adică ele pot diferi pe o mulțime neglijabilă. De exemplu distribuția $h(t)$ a lui Heaviside este dată de:

$$< h, \varphi > = \int_0^\infty \varphi.$$

Să considerăm acum funcția:

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \text{ și } t \in N \\ 1; & t > 0, \quad t \notin N \end{cases}$$

Această funcție ia valoarea zero pentru orice t număr natural. Distribuția generată de această funcție este:

$$< \tilde{h},\ \varphi > = \int_0^{\infty} \varphi = < h,\ \varphi >.$$

Cele două distribuții sînt egale, dar funcțiile care le-au generat nu sînt egale decît în sensul „aproape peste tot".

Suma și produsul cu o constantă rezultă imediat, deoarece funcționala este liniară:

$$< f,\ \varphi > + < g,\ \varphi > = < f + g,\ \varphi >$$

$$< af,\ \varphi > = < f,\ a\ \varphi > = a\ < f,\ \varphi >;\ a \in R \text{ (constantă)}.$$

Recomandăm ca exercițiu, verificarea acestor proprietăți.

Translația distribuțiilor

Suportul unei distribuții f este complementara mulțimii deschise pe care distribuția f se anulează; așadar suportul unei distribuții f este o mulțime închisă. De exemplu, distribuția Dirac $\delta\ (t)$ are ca suport punctul $t = 0$, deoarece δ se anulează pe toată axa reală, cu excepția punctului $t = 0$. Distribuția Heaviside are ca suport semiaxa pozitivă R_+ etc.

Translația unei distribuții cu un interval τ pe axa reală se scrie convențional astfel:

$$f(t) \to f(t + \tau).$$

Prin definiție, translația distribuției $f(t)$ cu τ este dată de:

$$< f(t + \tau),\ \varphi(t) > = < f(t),\ \varphi(t - \tau) >.$$

Pentru distribuțiile de tip funcție, aplicarea acestei formule este imediată:

$$< f(t + \tau),\ \varphi(t) > = \int_R f(t + \tau)\ \varphi(t)\ \mathrm{d}t.$$

Notăm $t + \tau = \sigma$ și avem $t = \sigma - \tau$; așadar:

$$\int_R f(t + \tau)\ \varphi(t)\ \mathrm{d}t = \int_R f(\sigma)\ \varphi(\sigma - \tau)\ \mathrm{d}\sigma.$$

ceea ce verifică formula dată pentru translație.

În particular, translația distribuției Dirac este:

$$< \delta(t + \tau),\ \varphi(t) > = < \delta(t),\ \varphi(t - \tau) > = \varphi(-\tau).$$

De asemenea:

$$< \delta(t - \tau),\ \varphi(t) > = \varphi(\tau).$$

Așadar suportul distribuției $\delta(t - \tau)$ este punctul τ

Derivarea distribuțiilor

Prin definiție, derivata unei distribuții f se calculează cu formula:

$$< Df,\ \varphi > = < f,\ -D\varphi >,$$

adică se derivă $\varphi(t)$ și se schimbă semnul în funcțională. De exemplu, derivata distribuției Heaviside este:

$$< Dh,\ \varphi > = < h,\ -D\varphi > = -\int_0^{\infty} \varphi = \varphi(0).$$

Dar pe de altă parte:

$$\varphi(0) = < \delta,\ \varphi > ;$$

așadar:

$$< Dh,\ \varphi > = < \delta,\ \varphi >,$$

adică derivata distribuției Heaviside este distribuția Dirac. Dacă saltul în origine este E, atunci avem:

$$< DEh,\ \varphi > = < EDh,\ \varphi > = E < Dh,\ \varphi > = E\delta;$$

prin urmare derivata în sens distribuții conține și valoarea saltului.

Ca exercițiu, să calculăm acum derivata în sens distribuții, a unei funcții derivabile $f(t)$, cu excepția unui punct t_0 în care funcția f are un salt egal cu σ. Rezultă deci:

$$< f,\ \varphi > = \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi,$$

$$< Df,\ \varphi > = < f,\ -\varphi' > = -\int_{-\infty}^{t_0-0} f\varphi' -$$

$$-\int_{t_0+0}^{+\infty} f\varphi' = -f\varphi\Big|_{+\infty}^{t_0-0} - f\varphi\Big|_{t_0+0}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'\varphi$$

Aici am integrat prin părți și am ținut seama de faptul că φ este continuă. Deoarece φ are suport compact, la infinit se anulează, iar $\varphi\ (t_0 + 0) = \varphi(t_0 - 0)$; așadar:

$$-f\varphi\Big|_{-\infty}^{t_0-0} - f\varphi\Big|_{t_0+0}^{\infty} = [f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0)]\ \varphi(t_0) = \sigma\varphi(t_0),$$

unde $\varphi\ (t_0)$ reprezintă însă distribuția lui Dirac translatată în punctul t_0, ceea ce se scrie astfel: $< \delta\ (t - t_0),\ \varphi(t) > = \varphi\ (t_0)$.

Atunci avem:

$$< Df,\ \varphi > = < \sigma\delta\ (t - t_0),\ \varphi(t) > + < f',\ \varphi >,$$

sau:

$$< Df,\ \varphi > = (f' + \sigma\delta_{t_0},\ \varphi >.$$

Se poate scrie și prescurtat, subînțelegînd funcționalele:

$$Df = f' + \sigma\delta_{t_0}.$$

Această relație se citește astfel: derivata distribuției de tip funcție f este egală cu distribuția generată de derivata clasică a funcției f, cu excepția punctului de salt unde apare distribuția Dirac cu suportul în acel punct, înmulțită cu valoarea saltului.

Revenind acum la exemplul condensatorului C care este pus brusc sub tensiune constantă E la $t = 0$, pentru $t < 0$ condensatorul fiind descărcat. Atunci sarcina sa electrică este:

$$q = ECh(t) = Qh(t).$$

Curentul prin condensator este atunci:

$$Dq = Q\,Dh = \theta\delta$$

și se vede că depinde de valoarea saltului Q.

Deși distribuția Dirac nu este de tip funcție, se poate calcula cu funcții care sînt denumite *șiruri reprezentative Dirac* și care converg slab către distribuția Dirac. Convergența slabă face metoda inutilizabilă la calcul numeric. Pentru exemplul condensatorului avem:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{Q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Dacă aici facem ca $R \to 0$, atunci $\tau \to 0$ și obținem șirul reprezentativ:

$$\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}.$$

Pentru R foarte mic avem $i(+0) = \frac{E}{R}$ foarte mare, iar τ devine foarte mic deci exponențiala tinde rapid către zero. Acest exemplu este intuitiv, dar nu este riguros, deoarece soluția am obținut-o pentru $R \neq 0$ (am împărțit cu R ecuația diferențială). Dealtfel pentru $\tau \to 0$ rezultă nedeterminare în expresia de mai sus.

Observație. Recapitulînd, putem acum afirma că funcțiile φ au rolul de „funcții test". Astfel:

1) înmulțirea unei distribuții cu o constantă este echivalentă cu înmulțirea lui φ cu această constantă;

2) derivarea unei distribuții este echivalentă cu derivarea lui φ și schimbarea semnului;

3) translația unei distribuții cu τ este echivalentă cu translația lui φ cu $-\tau$.

Vom vedea că și alte operații cu distribuțiile se transferă asupra funcțiilor fundamentale φ.

Multiplicatorii pe $\mathcal{D}'$

Considerăm funcțiile ψ indefinit derivabile și cu suport oarecare. În acest caz produsul $\psi\varphi$ unde $\varphi \in \mathcal{D}$ are suport compact și este indefinit derivabil. Așadar se poate defini produsul dintre o distribuție $f \in \mathcal{D}'$ și o funcție $\psi \in C^\infty$ după formula:

$$\langle \psi f, \varphi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle; \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

În particular, produsul dintre distribuția Heaviside și o funcție $\psi \in C^\infty$ este definit și avem:

$$\psi h \in \mathcal{D}',$$

adică rezultă o distribuție cu suport pozitiv. Observăm că multiplicarea unei distribuții cu o funcție indefinit derivabilă este echivalentă cu multiplicarea lui φ cu acea funcție, astfel încît și în acest caz φ are rolul de funcție test.

Distribuții cu suport pozitiv, spațiul $\mathcal{D}'_+$

Distribuțiile care au suportul mărginit la stînga (în particular cele care au suport pozitiv) formează o clasă importantă de distribuții, cu proprictăți remarcabile. Pentru sistemele fizice, cauzalitatea conduce adesea la reprezentări prin distribuții cu suport pozitiv. Aceste distribuții sînt elemente ale spațiului notat cu $\mathcal{D}'_+$.

Produsul de convoluție

Produsul de convoluție a două distribuții f și g este prin definiție funcționala compusă:

$$<f * g,\ \varphi> = <f(t),\ <g(\tau),\ \varphi(t+\tau)>>.$$

Astfel, se calculează mai întîi funcționala:

$$<g(\tau),\ \varphi(t+\tau)> = \psi(t),$$

după care se calculează funcționala:

$$<f(t),\ \psi(t)>,$$

cu condiția ca $\psi(t)$ să aparțină lui $\mathcal{D}$. Aceasta nu se întîmplă decît sub anumite condiții, deci produsul de convoluție nu există întotdeauna.

Produsul de convoluție există întotdeauna în următoarele cazuri:

1) f sau g are suport compact;

2) f și g au suportul mărginit de aceeași parte.

Prin urmare în $\mathcal{D}'_+$ produsul de convoluție există întotdeauna; în plus, produsul de convoluție este comutativ și asociativ în $\mathcal{D}'_+$.

Derivata produsului de convoluție se obține derivînd numai unul din factorii produsului, indiferent care. Deci:

$$D(f * g) = (Df) * g = f * (Dg).$$

Algebra $(\mathcal{D}'_+,\ +,\ *)$

1) $(\mathcal{D}'_+,\ +)$ este un grup abelian,

2) $(\mathcal{D}'_+,\ *)$ este un monoid cu element unitate.

Pentru orice $x, y, z \in \mathcal{D}'_+$ au loc egalitățile:

$$x * (y + z) = x * y + x * z,$$

$$(x + y) * z = x * z + y * z$$

În plus, inelul obținut astfel este un domeniu de integritate deoarece:

1) inelul este comutativ,

2) $\delta \neq 0$ (unitatea diferită de zero),

3) inelul nu are divizori ai lui zero. Într-adevăr, în $\mathcal{D}'_+$ din

$$f * g = 0$$

se deduce sau $f = 0$ sau $g = 0$. Așadar se poate simplifica:

$$x * f = x * g \Rightarrow f = g \text{ (în sensul distribuțiilor)}$$

Deoarece orice inel integru admite o scufundare într-un corp, denumit „corpul fracțiilor", vom considera $(\mathcal{D}'_+, +, *)$ drept un corp de fracții în care introducem și „împărțirea" în sensul inversului de convoluție.

De exemplu, să arătăm că inversul lui δ' este h; deci ar trebui ca: $\delta' * h = \delta$. Într-adevăr:

$$D\delta * h = \delta * Dh = \delta * \delta = \delta.$$

Aceasta este valabil pentru orice derivată de ordin m a lui δ, în produs de convoluție cu primitiva de ordin m a lui h; așadar:

$$\delta^m * h^m = D^m\delta * h^m = \delta * D^m h^m = \delta * \delta = \delta.$$

Reținem faptul arătat anterior că:

$$h^m = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\, h.$$

Transformata Laplace a distribuțiilor (în $\mathcal{D}'_+$)

Reamintim că transformata Laplace a unei funcții $f(t)$ este dată de:

$$(\mathfrak{L}f)(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt,$$

unde numărul complex $s = \alpha + i\omega$ devine „variabila" de care depinde $\mathfrak{L}f$. Din condițiile de existență ale transformatei $\mathfrak{L}f$ reținem faptul că ea admite o abscisă de convergență absolută $\beta < \infty$; de exemplu, pentru treapta Heaviside avem:

$$(\mathfrak{L}f)(s) = \int_0^\infty h(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}.$$

Integrala nu converge însă decît pentru $\mathrm{Re}\, s > 0$ (partea reală a lui s pozitivă), așadar $(\mathfrak{L}f)$ ca funcție de s nu este definită decît pentru abscisa de convergență absolută $\mathrm{Re}\, s > 0$.

Integrînd prin părți rezultă că derivata unei funcții $f(t)$ are ca transformată:

$$(\mathfrak{L}f')(s) = \int_0^\infty f'(t)\, e^{-st}\, dt = f(t)\, e^{-st}\Big|_0^\infty + s\mathfrak{L}f.$$

Rezultă și de aici o condiție: produsul $e^{-st}f(t) = 0$ pentru $t \to \infty$, ceea ce impune un indice de creștere al lui $f(t)$ astfel încît aceasta să aibă loc. Așadar:

$$(\mathfrak{L}f')(s) = s\mathfrak{L}f - f(0).$$

unde $f(0)$ este limita la dreapta în origine. Reținem condiția impusă originalului: $f(t < 0) = 0$.

Pentru funcția treaptă Heaviside rezultă:

$$(\mathfrak{L}h')(s) = s\frac{1}{s} - 1 = 0.$$

Într-adevăr, $h(t)$ are derivata nulă, cu excepția originii unde nu este derivabilă. Dacă notăm cu $g(t) = f'(t)$, atunci f este primitiva lui $g(t)$ și avem:

$$\mathfrak{L}f = \frac{1}{s}[\mathfrak{L}g + f(0)].$$

Prin urmare, derivarea originalului corespunde cu înmulțirea cu s a imaginii (și scăderea saltului din origine), iar integrarea originalului corespunde cu împărțirea cu s a imaginii (dar și cu considerarea saltului din origine). Transformata Laplace a distribuțiilor simplifică calculul. Pentru introducerea transformatei Laplace a distribuțiilor este recomandabilă o definiție simplă și care nu reduce din generalitate în aplicații. Considerăm distribuțiile care reprezintă derivata de un ordin oarecare m a unor funcții care posedă transformata Laplace:

$$F(t) = \mathrm{D}^m f(t);$$

prin definiție, transformata Laplace a distribuției $F(t)$ este:

$$(\mathfrak{L}F)(s) = s^m \mathfrak{L}f.$$

Acum corespondența dintre operațiile cu original și imagine este simplă: derivarea originalului corespunde cu înmulțirea cu s a imaginii, iar primitiva originalului se obține prin împărțirea cu s a imaginii. Pentru distribuția Heaviside avem:

$$\mathrm{D}h = \delta.$$

Prin urmare, conform definiției rezultă:

$$\mathfrak{L}(\mathrm{D}h) = s\mathfrak{L}h = s\frac{1}{s} = 1 = \mathfrak{L}\delta.$$

Nu trebuie uitat că distribuția $h(t)$ este mică, pentru clasa de echivalență a funcțiilor $h(t)$ egale aproape peste tot. De exemplu funcțiile:

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}; \qquad h_2 = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geqslant 0 \end{cases}; \qquad h(t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \text{ etc.},$$

au aceeași transformată Laplace a distribuției $h(t)$, adică $\mathfrak{L}h = \frac{1}{s}$, de unde rezultă întotdeauna $\mathfrak{L}\delta = 1$. Improvizațiile care se fac cu $\mathfrak{L}h$, considerînd transformata Laplace $\int_{-0}^{\infty}$ pentru a rezulta $\mathfrak{L}\delta = 1$ trebuie evitate.

Teoremele referitoare la transformata Laplace a funcțiilor se regăsesc în distribuții. Dintre acestea reamintim teorema lui Borel:

$$\mathfrak{L}(f * g) = \mathfrak{L}(f) \cdot (\mathfrak{L}g).$$

Pentru distribuțiile $F(t) = \mathrm{D}^m f(t)$ și $G(t) = \mathrm{D}^n g(t)$ demonstrația este imediată. Conform definiției avem:

$$\mathfrak{L}(F * G) = [\mathrm{D}^m f(t)] * [\mathrm{D}^n g(t)] = s^{m+n}\mathfrak{L}(f * g) = s^{m+n}(\mathfrak{L}f) \cdot (\mathfrak{L}g),$$

$$(s^m \mathfrak{L}f) \cdot (s^n \mathfrak{L}g) = (\mathfrak{L}F) \cdot \mathfrak{L}(G).$$

Așadar produsul de convoluție (întotdeauna în $\mathfrak{D}'$) devine produsul algebric obișnuit. Pentru rețelele descrise de ecuația:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

trecem în distribuții și avem

$$\mathrm{D}x = Ax + Bu + x_0\delta.$$

Aplicînd transformata Laplace rezultă:

$$s\mathfrak{L}x = A\mathfrak{L}x + B\mathfrak{L}u + x_0,$$

de unde avem:

$$(sI - A)\,\mathfrak{L}x = B\mathfrak{L}u + x_0,$$

$$\mathfrak{L}x = (sI - A^{-1})\,[B\mathfrak{L}u + x_0].$$

Revenind la original avem:

$$x = he^{At} * (Bu + x_0\delta),$$

de unde rezultă:

$$\mathfrak{L}[(sI - A)^{-1}] = h\,e^{At}.$$

Calculul numeric al matricei e^{At}

Această formulă este utilă pentru calculul direct al matricei e^{At}; pentru calcul numeric ea nu este recomandabilă. Una din cele mai indicate metode pentru calculul numeric al matricei e^{At} este considerarea unui pas optim de discretizare $t_d = \frac{1}{m}$ și calculul matricei $e^{\frac{A}{m}}$, după care matricea e^{At} la diferiți pași $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$ etc. se calculează prin produse ale matricei $e^{\frac{A}{m}}$, deoarece

$e^{\frac{2A}{m}} = e^{\frac{A}{m}} \cdot e^{\frac{A}{m}}$ etc. Dacă vectorul de stare x al rețelei se poate măsura direct la timpii $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$, atunci avem:

$$x_{\frac{1}{m}} = e^{\frac{A}{m}} x_0,$$

$$x_{\frac{2}{m}} = e^{\frac{2A}{m}} x_0 = e^{\frac{A}{m}} x_{\frac{1}{m}},$$

$$\frac{x_3}{m} = e^{\frac{3A}{m}} x_0 = e^{\frac{A}{m}} x_{\frac{2}{m}} \text{ etc.}$$

Se recurge acum la rezolvarea unui sistem de n^2 ecuații cu n^2 necunoscute, care sînt cele n^2 necunoscute din matricea $e^{\frac{A}{m}}$. În prezent algoritmele pentru rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice liniare sînt foarte bine puse la punct, astfel încît rezultatul depinde în primul rînd de acuratețea măsurătorilor.

3.1.3. Ecuații diferențiale pentru studiul regimului tranzitoriu al circuitelor electrice

Să reluăm ecuația diferențială:

$$\dot{q} + \frac{q}{\tau} = I_0 h \quad \text{unde } I_0 = \frac{E}{R}.$$

Căutăm soluția astfel încît $q(t < 0) = 0$; așadar $q(t)$ este o funcție cu salt în origine. Derivata în sens distribuții a lui $q(t)$ este atunci:

$$Dq = \dot{q} + Q_0 \delta,$$

unde Q este saltul din origine. Înlocuind în precedenta pe q se obține:

$$Dq + \frac{q}{\tau} = I_0 h + Q_0 \delta. \tag{3-3}$$

Se numește „soluție elementară în D'_+" soluția ecuației:

$$Dq_e + \frac{q}{\nu} = \delta$$

sau, sub forma produsului de convoluție:

$$\left(\delta' + \frac{\delta}{\nu}\right) * q_e = \delta.$$

Împărțind în sensul inversului de convoluție se obține:

$$q_e = \frac{\delta}{\delta' + \frac{\delta}{\tau}} = h\left(1 + \frac{t}{\tau} + \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^3}{3!} + \cdots\right) = e^{-\frac{t}{\tau_h}}.$$

Soluția ecuației (3-3) este atunci:

$$q = q_c * (I_0 h + Q_0 \delta) = e^{-\frac{t}{\tau}} h * (I_0 h + Q_0 \delta).$$

Avem însă:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} h * Q_0 \delta = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} h,$$

Deoarece δ este unitate în produsul de convoluție, iar Q_0 este o constantă. Pe de altă parte:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} h * I_0 h = I_0 \int_R e^{-\frac{\sigma}{\tau}} h(\sigma)\, h(t-\sigma))\, d\sigma = I_0 \int_0^t e^{-\frac{\sigma}{\tau}} d\sigma =$$

$$= -I_0 \tau\, e^{-\frac{\sigma}{\tau}} \Big|_0^t = -\tau I_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) h = I_0 \tau h \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = Qh \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Se verifică astfel soluția găsită anterior, dar cu $Q_0 = 0$. Să dăm acum o interpretare fizică soluției găsite pentru ecuația (3-3):

$$q = Qh \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + Q_0 h\, e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{3-4}$$

Observăm că Q_0 are rolul „condiției inițiale" care, în cazul de față, este sarcina inițială a condensatorului. Dacă la $t = 0$ condensatorul este descărcat, atunci $Q_0 = 0$, deci rezultă soluția arătată anterior. Soluția (3-4) este valabilă oricare ar fi Q. În particular să presupunem că inițial condensatorul este încărcat chiar cu Q; atunci avem:

$$q = Q_0 h,$$

adică sarcina electrică a condensatorului rămîne constantă pentru $t > 0$. Încărcarea bruscă a condensatorului cu Q la $t = 0$, adică termenul Q_0 din ecuația (3-3), corespunde unui curent $i_0 = \delta Q_0$, ceea ce se verifică imediat prin derivarea lui $q = Q_0 h$ (sursă instantanee, la $t = 0$).

Să verificăm acum soluția (3-4) în ecuația (3-3). Avem:

$$Dq = Q\delta - Q\delta\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{Q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} h + Q_0 \delta\, e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} h,$$

însă:

$$< Q\delta\, e^{-\frac{t}{\tau}},\ \varphi(t) > = Q < \delta(t),\ e^{-\frac{t}{\tau}} \varphi(t) > = Q\varphi(0) = Q < \delta,\ \varphi >;$$

așadar:

$$Dq = \frac{Q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} h + Q_0 \delta - \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} h.$$

Introducînd în ecuația (3-3) rezultă:

$$\frac{Q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} h + Q_0 \delta - \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} h + \frac{Qh}{\tau} - \frac{Q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} h + \frac{Q_0}{\tau} h\, e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 h + Q_0 \delta.$$

Însă: $\frac{Q}{\tau} = \frac{EC}{RC} = \frac{E}{R} = I_0$ și se obține verificarea.

Să luăm acum un exemplu care conduce la un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi. Se știe de la „Matematică" că sistemele de ecuații de ordin superior (considerăm numai cazul liniar și coeficienții constanți) pot fi aduse întotdeauna la forma unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi (reciproca nu este întotdeauna adevărată). Să ilustrăm aceasta printr-un exemplu. Considerăm schema din figura 3-3; rezultă ecuațiile:

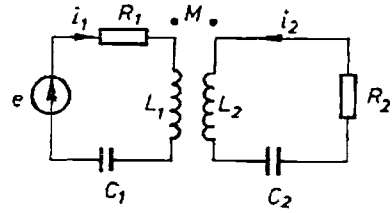


Fig. 3-3

$$\begin{cases} R_1 i_1 + \dfrac{q_1}{C_1} + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = e \\ R_2 i_2 + \dfrac{q_2}{C_2} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

Eliminăm pe $\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ din prima ecuație și pe $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ din a doua ecuație și obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L_2}{L_1L_2 - M^2} e - \dfrac{R_1L_2}{L_1L_2 - M^2} i_1 + \dfrac{R_2M}{L_1L_2 - M^2} i_2 - \\ \qquad - \dfrac{L_2}{C_1(L_1L_2 - M^2)} q_1 + \dfrac{M}{C_2(L_1L_2 - M^2)} q_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{M}{M^2 - L_1L_2} e - \dfrac{MR_1}{M^2 - L_1L_2} i_1 + \dfrac{R_2L_1}{M^2 - L_1L_2} i_2 - \\ \qquad - \dfrac{M}{C_1(M^2 - L_1L_2)} q_1 + \dfrac{L_1}{C_2(M^2 - L_1L_2)} q_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = i_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} = i_2 \end{cases}$$

Introducem notația vectorială:

$$\mathbf{x}' = (i_1,\ i_2,\ q_1,\ q_2)$$

unde x' este transpusul vectorului coloană x. Notăm cu A și B matricele corespunzătoare și obținem:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{e}, \tag{3-5}$$

unde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_1\dfrac{L_2}{L_1L_2-M^2} & R_2\dfrac{M}{L_1L_2-M^2} & -\dfrac{L_2}{C_1(L_1L_2-M^2)} & \dfrac{M}{C_2(L_1L_2-M^2)} \\ R_1\dfrac{M}{L_1L_2-M^2} & -R_2\dfrac{L_1}{L_1L_2-M^2} & \dfrac{M}{C_1(L_1L_2-M^2)} & -\dfrac{L_1}{C_2(L_1L_2-M^2)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_2}{L_1L_2-M^2} \\ -\dfrac{M}{L_1L_2-M^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dacă ar fi fost conectate mai multe surse în circuit, atunci în locul lui e (scalar) ar fi apărut un vector:

$$\mathbf{u}' = (e_1,\ e_2 \ldots,\ e_m),$$

în cazul cînd ar fi existat m surse independente. Dacă circuitul ar fi avut n variabile independente, atunci dimensiunea lui $\mathbf{x}$ ar fi fost n. Cu aceste notații putem rescrie (3-5) în forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad A \in \mathfrak{M}(n,\ n,\ R) \text{ și } \mathbf{B} \in \mathfrak{M}(n,\ m,\ R), \tag{3-6}$$

unde $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}(n, n, \mathrm{R})$ se citește: matricea A are n linii, n coloane, iar elementele a_{ij} sînt numere reale. Introducem acum derivata în sens distribuții (în $\mathfrak{D}'_+$):

$$\mathrm{D}\mathbf{x} = \delta' * \mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0\delta,$$

unde x_0 este vectorul care reprezintă saltul în origine (condițiile inițiale). Înlocuind în (3-6) obținem:

$$(\delta'\mathbf{I} - \delta\mathbf{A}) * \mathbf{x} = \mathbf{Bu} + \mathbf{x}_0\delta, \tag{3-7}$$

unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate pe R^n. Pentru a găsi soluția elementară și soluția ecuației (3-7) procedăm similar cu cazul precedent și anume:

$$(\delta'\mathbf{I} - \delta\mathbf{A}) * \mathbf{x}_e = \mathbf{I}\delta. \tag{3-8}$$

Soluția elementară este matricea pătrată $\mathbf{x}_e$, pe care o calculăm prin „împărțire" în sensul convoluției (în $\mathfrak{D}'_+$):

$$\mathbf{I}\delta \,\big|\, \underline{\delta'\mathbf{I} - \delta\mathbf{A}} \leftarrow$$

$$h\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}t)^3}{3!} + \cdots\right] = h\,e^{\mathbf{A}t},$$

unde h este distribuția Heaviside, iar e^{At} este multiplicată pe $\mathcal{D}'$. Să verificăm această soluție în ecuația (3-8). Verificarea se obține efectuînd produsul de convoluție ca invers al „împărțirii". Avem deci:

$$\delta' \mathbf{I} * he^{At} - \delta \mathbf{A} * h e^{At} = \delta e^{At} + h\mathbf{A} e^{At} - h\mathbf{A} e^{At} = \delta \mathbf{I}$$

și verificarea este imediată. În virtutea faptului că $(\mathcal{D}'_+, +, *)$ nu are divizori ai lui zero, rezultă că soluția găsită este unică. Atunci și soluția ecuației (3-7) este unică și avem:

$$\mathbf{x} = (\delta' \mathbf{I} - \delta \mathbf{A})^{-1} * (\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{x}_0 \delta) = h e^{At} \mathbf{B} * \mathbf{u} + h e^{At} \mathbf{x}_0.$$

Recomandăm, ca exercițiu, verificarea acestei soluții în ecuația (3-7). Cei doi termeni ai soluției au următoarea interpretare fizică: pentru $t < 0$ avem $x(t < 0) = 0$. Dacă rețeaua nu posedă surse, atunci avem $u = 0$ și soluția devine:

$$x_L = h e^{At} x_0.$$

Aceasta este soluția „liberă", ca efect al condițiilor inițiale x_0. Dacă $x_0 = 0$ iar $u \neq 0$, atunci rezultă soluția „forțată" a ecuației, dar în soluție mai apare un termen (datorită produsului de convoluție) care reprezintă soluția „propric" a rețelei.

Dacă rețeaua este asimptotic stabilă, atunci avem:

$$\lim_{t \to \infty} h e^{At} \mathbf{x}_0 = 0$$

oricare ar fi $x_0 \neq 0$. Se numește „regim tranzitoriu" soluția pentru un interval de timp în care soluția liberă și cea propric nu pot fi neglijate. Durata regimului tranzitoriu este deci stabilită convențional, în funcție de acuratețea măsurării, și se determină prin intervalul de timp după care fenomenele tranzitorii nu mai pot fi măsurate.

Dacă parametrii R, L și C din rețea sînt toți strict pozitivi, atunci rețeaua este stabilă, în sensul că:

$$\lim_{t \to \infty} h e^{At} \mathbf{x}_0 < \infty,$$

adică mărimile de stare ale rețelei, sub efectul condițiilor inițiale sînt cel puțin mărginite; evident, rețeaua poate fi și asimptotic stabilă dacă există elemente disipative în circuit ($R > 0$). Condiția necesară și suficientă ca rețeaua să fie asimptotic stabilă este ca valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ să aibă toate partea reală negativă. Dacă matricea $\mathbf{A}$ are valori proprii cu partea reală zero, dar cu ordin de multiplicitate unu, atunci rețeaua este stabilă, adică $h e^{At} \mathbf{x}_0$ rămîne mărginită cînd $t \to \infty$. Dacă $h e^{At} \mathbf{x}_0$ nu este mărginită pentru $t \to \infty$, atunci rețeaua este instabilă (de exemplu cînd conține rezistențe negative, $R < 0$, după cum vom vedea la circuitele neliniare).

3.1.4. Alte aplicații specifice regimului tranzitoriu

Eșantionarea

Să considerăm un semnal $f(t)$ astfel încît oricărui t îi corespunde o valoare (și numai una) notată cu $f(t)$. Alegem pe scara timpului puncte echidistante t_{k_i} în care măsurăm pe $f(t)$ exprimîndu-l numeric. Alegînd scara timpului convenabil, aceste puncte pot fi $k \in N$. Evident, dacă dorim să nu pierdem

informația asupra semnalului, pasul de eșantionare trebuie ales suficient de mic. Dacă însă este ales prea mic, în calculul numeric pot apărea erori mari rezultate din diferențele prea mici care rezultă în acest caz. Alegerea pasului de eșantionare este deci o problemă de optimizare, pasul optim depinzînd și de alte criterii decît cele de mai sus.

Organul de eșantionare poate fi descris matematic în următorul mod:

$$\left\langle f(t) \sum_1^{\infty} \delta_k,\ \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_1^{\infty} \delta_k,\ f(t)\,\varphi(t) \right\rangle = \sum_1^{\infty} \left\langle \delta_k,\ f(t)\,\varphi(t) \right\rangle =$$

$$= \sum_1^{\infty} f(k)\,\varphi(k) = \left\langle \sum_1^{\infty} f(k)\,\delta_k,\ \varphi(t) \right\rangle; \qquad k \in N$$

Seria: $\sum_1^{\infty} f(k)\,\varphi(k)$ este local finită, deoarece orice $\varphi \in \mathfrak{D}$ are suport compact, deci pentru fiecare φ seria conține un număr finit de termeni, deci este sumabilă pentru orice φ. Putem deci considera că organul de eșantionare primește la intrare semnalul $f(t)$, la ieșire rezultînd $\sum_1^{\infty} f(k)\,\delta_k$, unde $f(k)$ reprezintă valorile funcției în punctele $k \in N$. Organul de eșantionare astfel descris se numește „convertor analog-numeric".

Restabilirea

Organul de restabilire, numit și „convertor numeric-analog", păstrează valoarea fiecărui eșantion pe toată durata pasului de eșantionare. Semnalul este „netezit" apoi prin faptul că toate canalele prin care se transmite au bandă de trecere limitată. Descrierea matematică este următoarea:

$$f_r(t) = \alpha * \left(\sum_0^{\infty} f(k)\,\delta_k \right),$$

unde:

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{pentru } t \in [0,\ 1] \\ 0 & \text{pentru } t \notin [0,\ 1] \end{cases}$$

Într-adevăr, avem:

$$\left\langle \alpha * \sum_0^{\infty} f(k)\,\delta_k,\ \varphi \right\rangle = \left\langle \alpha(t),\ \left\langle \sum_0^{\infty} \delta(\tau - k),\ f(k)\varphi(t+\tau) \right\rangle \right\rangle =$$

$$= \left\langle \alpha(t),\ \sum_0^{\infty} f(k)\,\varphi(t+k) \right\rangle = \sum_0^{\infty} \int_0^1 f(k)\,\varphi(t+k) = \sum_0^{\infty} f(k) \int_0^1 \varphi(t+k).$$

Aceasta este distribuția generată de funcția:

$$f_r(t) = \begin{cases} f(k) & \text{pentru } t \in [k,\ k+1] \\ 0 & \text{pentru } t \notin [k,\ k+1] \end{cases}$$

În figura 3-4 este reprezentat semnalul $f(t)$, același semnal eșantionat și apoi semnalul restabilit.

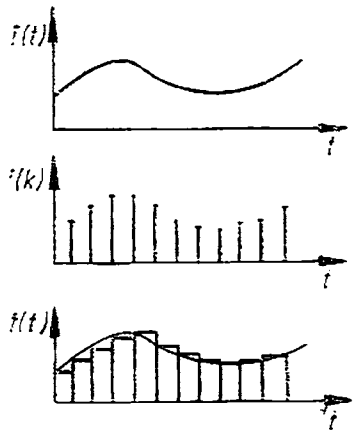


Fig. 3-4

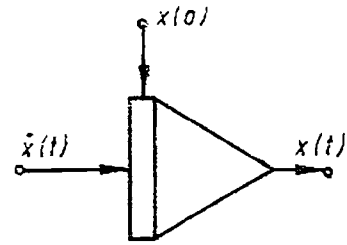


Fig. 3-5

Integratorul analogic

Blocul integrator al unui calculator analogic este reprezentat în figura 3-5. De obicei are mai multe intrări (de exemplu 5), pe care le însumează. Pentru cel din figură considerăm că $x(t < 0) = 0$, ca și $\dot{x}(t < 0) = 0$. Să notăm $x_0 = x(0)$ condiția inițială. Deoarece $x(t)$ are salt în origine, considerăm derivata în sens distribuții:

$$Dx = \dot{x} + x_0\delta,$$

care de fapt descrie funcționarea integratorului. Ca verificare, să determinăm primitiva în $\mathcal{D}'_+$ a lui Dx; avem:

$$h * (Dx) = h * \delta' * x = \delta * x = x(t).$$

Pentru membrul drept avem:

$$h*(\dot{x} + x_0\delta) = h * \dot{x} + x_0 h.$$

Calculăm acum:

$$h * \dot{x} = \int_R h(t - \tau)\, \dot{x}(\tau)\, d\tau = \int_0^t \dot{x}(\tau)\, d\tau = x(\tau)\Big|_0^t = x(t) - x_0 h$$

și se obține verificarea.

Semnificația fizică este următoarea: pentru $t < 0$ la toate cele trei borne semnalele sînt zero. La $t = 0$ se aplică brusc condiția inițială (sursa instantanee) determinată de x_0, iar pentru $t > 0$ rezultă semnalul integrat $x(t)$ care pornește la $t = 0$ din x_0.

3.2. CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE NELINIARE

Luăm ca exemplu o diodă „tunel" (v. „Fizica"), a cărei caracteristică $I = f(U)$ este reprezentată în figura 3-6. În situația în care tensiunea și curentul variază suficient de puțin în jurul punctului static M putem scrie:

$$I = I_0 + i; \qquad U = U_0 + u.$$

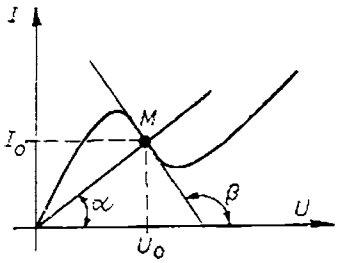


Fig. 3-6

Admițind că f este diferențiabilă în M avem:

$$\mathrm{d}I = \frac{\partial f}{\partial U}\,\mathrm{d}U.$$

Aproximînd acum diferențialele cu diferențele finite rezultă:

$$i = \frac{\partial f}{\partial U}\,u.$$

Avem însă: $\dfrac{\partial f}{\partial U} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}U}$. Notăm $\rho = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}U}}$ și rezultă:

$$u = \rho i,$$

unde ρ este „rezistența dinamică" a diodei, în punctul M, fundamental diferită de rezistența $R = \dfrac{U_0}{I_0}$. Într-adevăr, din interpretarea geometrică rezultă:

$$R = \operatorname{ctg} \alpha; \qquad \rho = \operatorname{ctg} \beta$$

și se observă că ρ este o „rezistență negativă" în punctul M (v. 1.1.2). Considerăm rețelele descrise de ecuația:

$$\dot{\mathbf{X}} = f(X, U) \tag{3-9}$$

unde $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este vectorul de stare al rețelei (de exemplu curenții din ramuri) iar $\mathbf{U}$ este vectorul de comandă al rețelei (de exemplu tensiunile electromotoare). Ecuația este neliniară, dar pentru un punct static $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{U}_0$ și pentru semnale suficient de mici $\mathbf{x}$ și $\mathbf{u}$ în jurul punctului static avem: $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{x}$; $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}$; $\mathbf{X}_0 = const.$, $\mathbf{U}_0 = ct.$ Introducînd în ecuația (3-9) rezultă:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{x},\ \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}).$$

Dacă f este analitică, putem dezvolta în serie Taylor și reținem numai termenii de ordinul întîi, știind că $f(\mathbf{X}_0,\ \mathbf{U}_0) = 0$. Rezultă:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial X_0}\,\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial U_0}\,\mathbf{u},$$

unde $\dfrac{\partial f}{\partial X_0}$ este derivata vectorului coloană $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ prin raport cu variabila vector coloană $(X_{10}, X_{20}, \ldots, X_{n0})$. Operația de derivare conduce atunci la o matrice $n \times n$, reală, astfel încît putem nota:

$$\frac{\partial f}{\partial X_0} = \mathbf{A}.$$

Elementele a_{ij} sînt „parametrii dinamici" ai rețelei, care pot lua și valori negative. Calculînd derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial U_0}$ obținem o matrice $n \times m$ notată:

$$\frac{\partial f}{\partial U_0} = \mathbf{B}$$

și ecuația devine:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}; \tag{3-10}$$

deci s-a redus la problema liniară discutată anterior. Prin trecerea de la (3-9) la (3-10) s-a omis restul din seria Taylor. Efectul restului nu este însă întotdeauna neglijabil, astfel încît (3-10) îl aproximează bine pe (3-9) numai în condițiile cînd acest rest este neglijabil.

De exemplu, dacă matricea **A** are valori proprii nule, atunci rețeaua „în primă aproximație" descrisă de (3-10) poate fi afectată de termeni de ordin superior din restul seriei Taylor.

Această metodă cvazilineară este foarte răspîndită în aplicații. Un cadru mai general de aplicare este situația în care $\mathbf{X}_0$ și $\mathbf{U}_0$ nu mai sînt constante și sînt funcții de timp. Atunci același procedeu conduce la ecuația liniară cu coeficienți variabili:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}, \tag{3-11}$$

în care matricea de stare $\mathbf{A}(t)$ și matricea de comandă $\mathbf{B}(t)$ nu mai sînt constante. Pentru rezolvarea problemei este necesar un calculator și programe; la calculul numeric, rezolvarea ecuației diferențiale (3-11) poate fi echivalentă cu rezolvarea directă a ecuației neliniare (3-9), în acest caz fiind preferabilă metoda directă.

O metodă practică este însă următoarea: pentru intervale scurte de timp se poate întîmpla cu sistemul constant în primă aproximație (3-10) să aproximeze bine pe cel liniar. În acest caz calculele sînt acceptabile pentru acel interval de timp. Pentru următorul interval de timp se calculează tot cu ecuațiile (3-10), dar cu alte matrice **A** și **B**. Valorile finale ale lui **x** și **u**, pentru primul interval sînt considerate valori inițiale pentru cel de-al doilea interval etc. Această metodă este utilizabilă practic în multe aplicații, în special atunci cînd măsurătorile sînt precise.

3.3. CUADRIPOLI

Considerăm o rețea cu două borne de intrare și cu două borne de ieșire, ca în figura 3-7, denumită „cuadripol". Alegem sensurile de referință ca în figura 3-7 și considerăm o rețea care este compusă exclusiv cu rezistoare, bobine și condensatoare (fără surse). În acest caz denumim această rețea *cuadripol pasiv*. Dacă R, L, C, M ale rețelei sînt constante, atunci cuadripolul este liniar, deoarece este descris de ecuații liniare. Vectorul coloanei de la

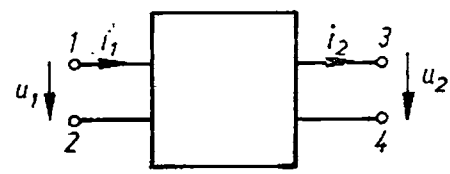


Fig. 3-7

intrare (u_1, i_1) și vectorul coloană de la ieșire (u_2, i_2) sînt în dependență liniară, adică aplicația:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

este liniară. Acestei aplicații îi corespunde matricea $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}\ (2,2,\ C)$ (ale cărei elemente sînt numere complexe). Scriem atunci:

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}u_2 + a_{12}i_2 \\ i_1 = a_{21}u_2 + a_{22}i_2 \end{cases}$$

Semnificația termenilor a_{ij} se deduce ușor din considerente fizice. Astfel, la mersul în gol avem $i_2 = 0$ și deci:

$$u_{10} = a_{11}u_{20},$$

$$i_{10} = a_{21}u_{20}.$$

Așadar a_{11} este un factor de proporționalitate adimensional pe care îl putem denumi în multe aplicații „amplificare de tensiune" la mersul în gol. Factorul a_{21} are dimensiunea unei admitanțe și poate fi denumit „admitanța de transfer la mersul în gol". Pentru regimul de scurtcircuit al ieșirii avem $u_2 = 0$ și rezultă:

$$u_{1sc} = a_{12}i_{2sc},$$

$$i_{1sc} = a_{22}i_{2sc}.$$

Termenul a_{12} are dimensiunea unei impedanțe și este denumit „impedanța de transfer la scurtcircuit". Termenul a_{22} este adimensional și poate fi denumit „amplificare de curent" în scurtcircuit. Introducem atunci notațiile:

$$\begin{cases} u_1 = A_0u_2 + Z_si_2 \\ i_1 = Y_0u_2 + A_si_2 \end{cases} \tag{3-12}$$

Din (3-12) putem calcula pe u_2 și i_2 în funcție de u_1 și i_1. Avem deci:

$$u_2 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & Z_s \\ i_1 & A_s \end{vmatrix}}{A_0A_s - Z_sY_0} = \frac{A_s}{A_0A_s - Z_sY_0}u_1 - \frac{Z_s}{A_0A_s - Z_sY_0}i_1,$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} A_0 & u_1 \\ Y_0 & i_1 \end{vmatrix}}{A_0A_s - Z_sY_0} = \frac{A_0}{A_0A_s - Z_sY_0}i_1 - \frac{Y_0}{A_0A_s - Z_sY_0}u_1.$$

Notăm $\Delta = A_0A_s - Z_sY_0$ și scriem relațiile:

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{1}{\Delta}(A_su_1 - Z_si_1) \\ i_2 = \dfrac{1}{\Delta}(-Y_0u_1 + A_0i_1) \end{cases} \tag{3-13}$$

În scriere matriceală:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_s & -Z_s \\ -Y_0 & A_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}.$$

Înlocuind pe $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$ din (3-12) rezultă identitatea:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_s & -Z_s \\ -Y_0 & A_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 & Z_s \\ Y_0 & A_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix},$$

astfel încît:

$$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_s & -Z_s \\ -Y_0 & A_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 & Z_s \\ Y_0 & A_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ceea ce se verifică imediat.

Să presupunem următoarea experiență: se conectează la ieșirea cuadripolului o impedanță Z. Se aplică la intrare o tensiune u_1; rezultă un curent la intrare i_1 și la ieșire rezultă u_2 și i_2, toți trei unic determinați. Prin urmare, în ecuația (3-12) dacă se dă u_1 rezultă i_1, u_2 și i_2. Aceasta arată că dimensiunea bazei în care s-a considerat matricea A nu este doi, ci unu. Aceasta se poate descrie prin relații suplimentare.

Așadar avem:

$$u_2 = Zi_2.$$

Prin urmare:

$$\begin{cases} u_1 = (A_0 Z + Z_s)\, i_2 \\ i_1 = (Y_0 Z + A_s)\, i_2 \end{cases}$$

Impedanța măsurată la bornele de intrare *1, 2* este deci:

$$Z_i = \frac{A_0 Z + Z_s}{Y_0 Z + A_s}.$$

De aici rezultă impedanța de intrare la mers în gol ($|Z| \to \infty$) și la mers în scurtcircuit ($Z \to 0$) a cuadripolului:

$$Z_{i0} = \frac{A_0}{Y_0} \quad \text{și} \quad Z_{is} = \frac{Z_s}{A_s}.$$

Se numește *impedanță caracteristică a cuadripolului:*

$$Z_c \overset{D}{=} \sqrt{Z_{i_0} \cdot Z_{i_s}} = \sqrt{\frac{A_0 Z_s}{Y_0 A_s}}.$$

Să considerăm acum același cuadripol conectat cu intrarea la bornele *3, 4* și ieșirea la bornele *1, 2*. El va fi descris de ecuațiile:

$$\begin{cases} u_2' = A_0' u_1' + Z_s' i_1' \\ i_2' = Y_0' u_1' + A_s' i_1' \end{cases} \tag{3-14}$$

Repetînd același procedeu ca mai sus se obține impedanța caracteristică:

$$Z'_c = \sqrt{\frac{A'_0 Z'_s}{Y'_0 A'_s}}.$$

Reluăm acum ecuațiile (3-13) și le comparăm cu (3-14). Putem acum utiliza unele rezultate din teoria circuitelor liniare și constante. De exemplu, dacă aplicăm rețelei cuadripolului teorema circuitelor independente rezultă o matrice a sistemului care este simetrică ($Z_{ij} = Z_{ji}$). Dacă calculăm acum tensiunile și curenții din ecuația (3-12) cu ajutorul acestei teoreme, rezultă condiția:

$$\Delta = A_0 A_s - Z_s Y_0 = 1, \tag{3-15}$$

valabilă pentru orice cuadripol liniar pasiv. Atunci ecuațiile (3-13) capătă forma:

$$\begin{cases} u_2 = A_s u_1 - Z_s i_1 \\ i_2 = -Y_0 u_1 + A_0 i_1 \end{cases}; \qquad Z'_{i0} = \frac{A_s}{Y_0}; \qquad Z'_{is} = \frac{Z_s}{A_0}.$$

Comparînd aceste ecuații cu (3-14) și ținînd seamă că cel puțin u_2 este arbitrar rezultă schimbarea reciprocă a locului termenilor A_0 și A_s. Așadar, impedanța caracteristică Z'_c are forma:

$$Z'_c = \sqrt{\frac{A_s Z_s}{Y_0 A_0}}.$$

Să arătăm acum ce însemnătate practică are impedanța caracteristică: să conectăm, de exemplu, impedanța caracteristică Z'_c la bornele *3*, *4* și să determinăm impedanța de intrare la bornele *1*, *2*. Avem:

$$Z_i = \frac{A_0 \sqrt{\frac{A_s Z_s}{Y_0 A_0}} + Z_s}{Y_0 \sqrt{\frac{A_s Z_s}{Y_0 A_0}} + A_s} = \sqrt{\frac{A_0 Z_s}{Y_0 A_s}} = Z_c.$$

Deci, dacă la ieșirea *3*, *4* se conectează impedanța caracteristică Z'_c, la intrarea *1*, *2* se măsoară impedanța caracteristică Z'_c.

Reciproc, dacă la ieșirea *1*, *2* se conectează impedanța caracteristică Z_c, atunci la intrarea *3*, *4* se măsoară impedanța caracteristică Z'_c.

Se numesc *cuadripoli simetrici* cuadripolii la care

$$Z_{i0} = Z'_{i0}; \qquad Z_{is} = Z'_{is}.$$

Cu alte cuvinte, cuadripolul simetric se comportă identic în ambele sensuri. Consecința imediată este că impedanța caracteristică este aceeași în ambele sensuri, adică:

$$Z_c = Z'_c = \sqrt{\frac{A_0 Z_s}{Y_0 A_s}}.$$

Așadar dacă la ieșire conectăm impedanța caracteristică Z_c, la intrare se măsoară aceeași impedanță caracteristică Z_c. Aceasta are loc în ambele sensuri.

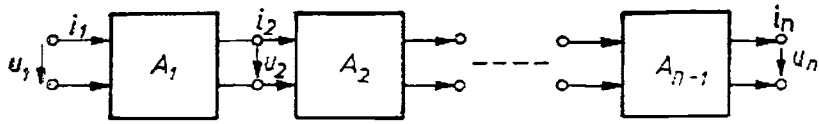


Fig. 3-8

Cuadripolii pot fi conectați în cascadă, ca în figura 3-8. Cu sensurile de referință din figură, pentru fiecare cuadripol se poate scrie o relație de forma:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} u_3 \\ i_3 \end{bmatrix} \cdots$$

De aici rezultă imediat:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_n \begin{bmatrix} u_n \\ i_n \end{bmatrix}.$$

Așadar se înmulțesc matricele $\mathbf{A}_i$ rezultînd:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_n$$

și deci:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_n \\ i_n \end{bmatrix},$$

adică echivalența cu un cuadripol descris de matricea $\mathbf{A}$; toate rezultatele anterioare sînt valabile și pentru cuadripolul rezultant.

Pentru exemplificare, să considerăm cuadripolii din figura 3-9. Tensiunea la bornele condensatorului și curentul prin condensator (fig. 3-9, *a*) sînt în relația:

$$i_c = C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

Aplicînd transformata Laplace rezultă:

$$\mathfrak{L}i_c = Cs\mathfrak{L}u_C \quad \text{sau} \quad \mathfrak{L}u_C = \frac{1}{sC}\mathfrak{L}i_C.$$

Pentru rezistor (fig. 3-9, *b*) avem:

$$\mathfrak{L}u_R = R\mathfrak{L}i_R.$$

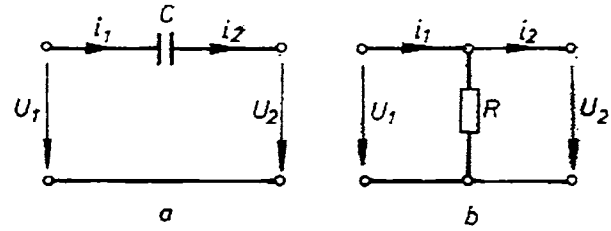


Fig. 3-9

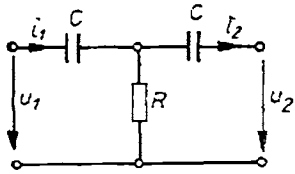


Fig. 3-10

Pentru condensator avem:

$$A_C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{sC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru rezistor avem:

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}.$$

Atunci pentru cuadripolul din figura 3-10 rezultă:

$$A = A_C A_R A_C = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{sCR} & \frac{1}{sC}\left(2 + \frac{1}{sCR}\right) \\ \frac{1}{R} & 1 + \frac{1}{sCR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & Z_s \\ Y_0 & A_s \end{bmatrix}.$$

Se observă că acest cuadripol este simetric ($A_0 = A_s$).
De asemenea se verifică relația $A_0 A_s - Y_0 Z_s = 1$. Într-adevăr:

$$\left(1 + \frac{1}{sCR}\right)^2 - \frac{1}{sCR}\left(2 + \frac{1}{sCR}\right) = 1.$$

Impedanța caracteristică este:

$$Z_c = \sqrt{\frac{R}{sC}\left(2 + \frac{1}{sCR}\right)}.$$

Ca exercițiu, să se verifice că dacă se conectează la ieșire impedanța caracteristică, la intrare se măsoară tot impedanța caracteristică (cuadripolul este simetric, deci $Z_c = Z_c'$).

Pentru semnale sinusoidale punem $s = j\omega$; de exemplu, la mersul în gol cuadripolul din figura 3-10 atenuează frecvențele joase, iar la frecvențe foarte mari avem $u_1 \approx u_2$. Într-adevăr:

$$A_0 = 1 + \frac{1}{j\omega CR}; \qquad |A_0| = \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}}; \qquad \tau = RC.$$

Pentru ω mic amplificarea este:

$$|A_0| \approx \frac{1}{\omega\tau}.$$

deci de la ieșire semnalele sînt atenuate mult. La frecvențe mari:

$$|A_0| \approx 1$$

și rezultă $u_2 \approx u_1$, adică semnalele nu se atenuează. O astfel de caracteristică întîlnim la filtre de tip „trece sus".

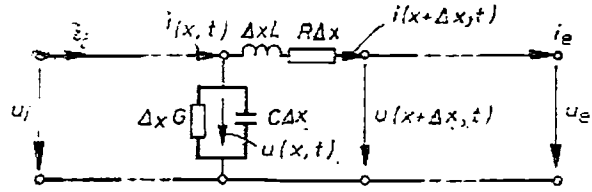


Fig. 3-11

În încheie să analizăm o linie bifilară, cu două borne de intrare și două borne de ieșire, care poate fi studiată ca un cuadripol. Aici însă nu avem parametri localizați și dacă presupunem că linia este uniformă, atunci, pentru o lungime Δx a liniei putem considera modelul din figura 3-11, unde L, R, C și G sînt inductanța, rezistența, capacitatea și conductanța, considerate pe unitatea de lungime a liniei. Aplicînd teoremele circuitelor liniare (v. cap. 2) obținem:

$$\begin{cases} u(x,\ t) - u(x + \Delta x,\ t) = \Delta x R i(x + \Delta x,\ t) + \Delta x L \dfrac{\partial}{\partial t} i(x + \Delta x,\ t) \\ i(x,\ t) - i(x + \Delta x,\ t) = \Delta x G u(x,\ t) + \Delta x C \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,\ t) \end{cases}$$

Pentru elementul de linie, dacă R este dat pe km, atunci pentru porțiunea Δx rezistența este $\Delta x R$ etc. Împărțind cu Δx și trecînd la limită obținem:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = Gu + C \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

Să calculăm acum transformata Laplace:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x,\ t)\right] = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} u(x,\ t)\, e^{-st}\, dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u(x,\ t)\, e^{-st}\, dt.$$

Deoarece integrala este definită, $\mathfrak{L}u$ nu mai depinde de t și avem:

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x,\ t)\right] = \frac{d}{dx} \mathfrak{L}[u(x,\ t)].$$

Aplicînd aceasta la ecuația de mai sus rezultă:

$$\begin{cases} -\dfrac{d\mathfrak{L}u}{dx} = (R + sL)\, \mathfrak{L}i \\ -\dfrac{d\mathfrak{L}i}{dx} = (G + sC)\, \mathfrak{L}u \end{cases}$$

Eliminînd pe $\mathfrak{L}i$ din cele două ecuații (prin derivare) obținem:

$$\frac{d^2\mathfrak{L}u}{dx^2} - \nu^2 \mathfrak{L}u = 0; \quad \nu^2 = (R + sL)(G + sC).$$

Soluția generală este:

$$\mathfrak{L}u = ae^{-\nu x} + be^{\nu x},$$

unde a și b nu depind de x. Semnificația fizică este interesantă: a apărut un semnal care se atenuează cu x (unda directă) și un semnal care se atenuează de la ieșire spre intrare (unda reflectată).

Din ecuația:

$$-\frac{\mathrm{d}\mathfrak{L}u}{\mathrm{d}x} = (R + sL)\,\mathfrak{L}i,$$

putem calcula curentul; rezultă: $(R + sL)\,\mathfrak{L}i = \nu a\,e^{-\nu x} - \nu b\,e^{\nu x}$.

Prin urmare:

$$\sqrt{\frac{R + sL}{G + sC}}\,\mathfrak{L}i = a\,e^{-\nu x} - b\,e^{\nu x}.$$

Notăm $Z_c = \sqrt{\dfrac{R + sL}{G + sC}}$ și din condițiile la $x = 0$:

$$Z_c(\mathfrak{L}i)\,(0) = a - b = Z_c\mathfrak{L}i_1,$$

$$(\mathfrak{L}u)\,(0) = a + b = \mathfrak{L}u_1,$$

rezultă a și b; obținem în final:

$$\begin{cases} \mathfrak{L}u = \dfrac{\mathfrak{L}u_1 + Z_c\mathfrak{L}i_1}{2}\,e^{-\nu x} + \dfrac{\mathfrak{L}u_1 - Z_c\mathfrak{L}i_1}{2}\,e^{\nu x} \\ \mathfrak{L}i = \dfrac{\mathfrak{L}u_1 + Z_c\mathfrak{L}i_1}{2Z_c}\,e^{-\nu x} - \dfrac{\mathfrak{L}u_1 - Z_c\mathfrak{L}i_1}{2Z_c}\,e^{\nu x} \end{cases} \tag{3-16}$$

Aici Z_c este impedanța caracteristică a liniei ; se poate arăta că întocmai ca la cuadripoli, dacă linia este conectată la ieșire pe impedanța caracteristică, la intrare se măsoară impedanța caracteristică (cuadripoli simetrici). Așadar avem:

$$\mathfrak{L}u_1 = Z_c\mathfrak{L}i_1 \tag{3-17}$$

Din (3—16) se observă că dacă condiția (3-17) este îndeplinită, atunci dispare unda reflectată. La transmisiile pe cabluri sau linii acest fapt prezintă însemnătate, astfel încît adaptarea liniei prin conectarea impedanței caracteristice la ieșire devine o problemă practică.

Ecuațiile cu derivate parțiale de mai sus fac parte din clasa ecuațiilor fizicii matematice. Introducerea noțiunilor de teoria distribuțiilor și tratarea ecuațiilor cu derivate parțiale în distribuții este mult mai importantă decît în cazul ecuațiilor diferențiale ordinare. Dealtfel, lucrările care studiază ecuațiile fizicii matematice, publicate în ultimul deceniu, fac uz intens de teoria distribuțiilor.

Cu titlul de *exemplu*, să reluăm ecuațiile liniei bifilare, iar pentru simplicitate să presupunem o linie fără pierderi.

Atunci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L\,\frac{\partial i}{\partial t}; \qquad \frac{\partial i}{\partial x} = -C\,\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Derivînd prin raport cu x prima ecuație și prin raport cu t cea de-a doua, cu notația $\gamma^2 = \frac{1}{LC}$, se obține:

$$\gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Această ecuație este un caz particular al ecuației undelor

$$\Box_\gamma u = f(x, t), \tag{3-18}$$

unde $\Box_\gamma$ este operatorul lui d'Alembert:

$$\Box_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \gamma \Delta.$$

iar Δ este operatorul lui Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Să formulăm acum problema lui Cauchy generalizată pentru ecuația undelor:

$$u(t = +0) = u_0(x); \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t = +0) = u_1(x).$$

Considerăm $f \in C(t \geqslant 0)$; $u_0 \in C^1(R^n)$ și $u_1 \in C(R^n)$. Prelungim funcțiile u și f cu valoarea zero pentru $t < 0$:

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}; \qquad \tilde{f} = \begin{cases} f, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Să arătăm acum că funcția $\tilde{u}(x, t)$ satisface ecuația undelor:

$$\Box_\gamma \tilde{u} = \tilde{f}(x, t) + u_0(x)\, \delta'(x) + u_1(x)\, \delta(t), \tag{3-19}$$

unde $u_0(x)$ și $u_1(x)$ sînt „salturile" la $t = 0$. Atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$ avem:

$$\langle \Box_\gamma u,\ \varphi \rangle = \langle u,\ \Box_\gamma \varphi \rangle = \int_0^\infty \int_{R^n} u \Box_\gamma \varphi \, dx\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \int_{R^n} u \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \gamma^2 \Delta \varphi \right) dx\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_\varepsilon^\infty \int_{R^n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \gamma^2 \Delta u \right) \varphi \, dx\, dt - \int_{R^n} \frac{\partial \varphi(x, \varepsilon)}{\partial t} u(x, \varepsilon)\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{R^n} \varphi(x, \varepsilon) \frac{\partial u(x, \varepsilon)}{dt}\, dx \right] = \int_0^\infty \int_{R^n} f \varphi \, dx\, dt - \int_{R^n} \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} u(x, 0)\, dx +$$

$$+ \int_{R^n} \varphi(x, 0) \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}\, dx = \int_{R^{n+1}} \tilde{f}\, dx\, dt - \int_{R^n} u_0 \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} dx +$$

$$+ \int_{R^n} u_1(x)\, \varphi(x, 0)\, dx = \langle \tilde{f} + \tilde{u}_0(x)\, \delta'(t) + u_1(x)\, \delta(t),\ \varphi \rangle.$$

Astfel condițiile inițiale u_0 și u_1 au rolul unor surse instantanee inițiale (reamintim cazul condensatorului care la $t = 0$ se încarcă brusc cu Q_0). Aici însă, perturbației inițiale u_0 îi corespunde stratul dublu $u_0(x)\ \delta'(t)$, iar perturbației inițiale u_1 îi corespunde stratul simplu $u_1(x)\delta(t)$, ambele pe planul $t = 0$. Soluțiile clasice ale problemei Cauchy, sînt conținute printre acele soluții ale ecuației (3-19) care se anulează pentru $t < 0$.

Să presupunem acum că am găsit soluția fundamentală a ecuației

$$\square_\gamma u = \delta(x,\ t).$$

Notînd această soluție cu u_f, rezultă soluția unică a ecuației (3-18)

$$u = u_f * f,$$

unde soluția există întotdeauna dacă $f(t < 0) = 0$. Acest produs de convoluție este denumit „forma potențialului retardat".

Calculul cu distribuții aduce unele rezultate importante și în problema, mai generală, a propagării undelor.

Capitolul 4

CIRCUITE MAGNETICE

Circuitele magnetice sînt construcții tehnice care constau dintr-un sistem de medii prin care se poate „închide" un flux magnetic. Acest „sistem de medii" se realizează sub forma unor lanțuri închise — cu forme ce depind de natura aplicației (transformatoare, mașini electrice rotative, relee etc.) — din corpuri confecționate din materiale feromagnetice care, avînd permeabilitatea mare (de sute și chiar de mii de ori mai mare decît a aerului), „concentrează" cea mai mare parte a liniilor de cîmp ale inducției magnetice cu solenații (v. „Fizica") relativ mici.

4.1. NOȚIUNI DE BAZĂ

În cadrul acestui paragraf ne vom referi la: structura circuitelor magnetice, clasificarea lor, precum și la mărimile, legile și teoremele specifice fenomenelor din circuitele magnetice.

4.1.1. Structura circuitelor magnetice

Aceste circuite sînt concepute ca să realizeze fluxuri magnetice relativ mari (sau inducții magnetice mari) în diferite locuri din circuit, fie pentru a se induce niște tensiuni electromotoare în diverse conductoare „plasate" pe corpul circuitului magnetic, fie pentru a se produce forțe și/sau cupluri de forțe asupra unor conductoare de pe circuitul magnetic sau asupra unor porțiuni (corpuri) mobile ale circuitului magnetic, fie chiar ambele lucruri simultan.

Cîmpul magnetic al acestor circuite poate fi produs de un sistem de magneți permanenți sau de un sistem de conductoare „parcurse" de curenți electrici.

Cunoscînd aceste elemente inițiale, vom înțelege că — în funcție de principiul constructiv și funcțional — un circuit magnetic este format din:

— un sistem de *armături* (fixe sau mobile) în care se realizează fluxul magnetic necesar și care constituie corpul circuitului magnetic (confecționate din materiale feromagnetice);

— „spații de aer" sau din alt material nemagnetic intercalate în scopuri constructive sau tehnologice între armăturile feromagnetice (de obicei unele fixe și altele mobile) numite *întrefier*;

— un sistem de conductoare, înfășurate (bobinate) pe diferite porțiuni ale circuitului magnetic, destinate să producă (prin efectul magnetic al curentului electric) tensiunea magnetomotoare necesară pentru producerea fluxului magnetic dorit, numite *bobine (înfășurări) de excitație (bobine inductoare)*;

— un sistem de conductoare plasate pe corpul circuitului magnetic sau pe cadre (suporți de bobine) din interfier în care se induc (prin fenomenul

inducției electromagnetice) t.e.m. și curenți electrici, fie pentru a se crea surse electrice, fie pentru a se produce cupluri de forțe, numite *bobine (înfășurări) induse*.

O porțiune a unui circuit magnetic care este înconjurată de înfășurare (bobinaj) se numește *miez (miez magnetic)*; o porțiune a unui circuit magnetic care nu e înconjurată de înfășurări dar este folosită pentru a conecta magnetic între ele miezurile circuitului se numește *jug* sau *culasă*.

Un circuit magnetic este deci practic constituit dintr-o succesiune de corpuri feromagnetice separate prin întrefieruri (dintre care unele reprezintă adeseori porțiuni utile ale circuitului — ca la mașinile electrice, relee etc., altele impuse de realizarea tehnologică a circuitului magnetic — ca la transformatoarele electrice, traductoare etc.), pe care este plasat un sistem de înfășurări (bobinaje) de excitație și/sau induse.

4.1.2. Tipuri de circuite magnetice

Există numeroase tipuri de circuite magnetice, determinate de diversitatea aplicațiilor, a soluțiilor constructive (tehnologice și de material), a formelor geometrice, a comportării în cîmp magnetic etc.

Ca urmare există și numeroase criterii de clasificare a circuitelor magnetice, dintre care vom prezenta cîteva în continuare.

Din punctul de vedere al proprietăților materialelor din care se confecționează, se deosebesc: *circuite magnetice liniare* — constituite numai din porțiuni cu caracteristici magnetice liniare (sau „practic" liniare, ca în cazul materialelor feromagnetice moi, nesaturate) și *circuite magnetice neliniare* — care cuprind cel puțin o porțiune cu caracteristică magnetică neliniară (materiale feromagnetice saturate). De fapt, în practică, majoritatea circuitelor magnetice sînt neliniare (lor nu li se poate aplica principiul superpoziției în legătură cu fluxurile magnetice din armături, care sînt funcții de tensiunile magnetomotoare din circuit). Circuitele magnetice liniare sînt, în fond, cazuri ideale care prezintă cel mult un interes didactic.

Din punctul de vedere al configurației geometrice se deosebesc *circuite magnetice neramificate* (fig. 4-1, *a*), al căror flux magnetic fascicular util φ aparține unui singur tub închis de linii de cîmp, și *circuite magnetice ramificate* al căror flux magnetic fascicular util aparține mai multor tuburi de linii de cîmp magnetic cu ramificații (φ_A, φ_B, φ_C în figura 4-1, *b*). În figura 4-1 notațiile reprezintă: *1*-miez, *2*-jug, *3*-interfier și *4*-înfășurare de excitație (inductoare). Ramificațiile în lungul cărora fluxul magnetic fascicular util este constant se numesc *laturile circuitului magnetic*, iar punctele de concurență

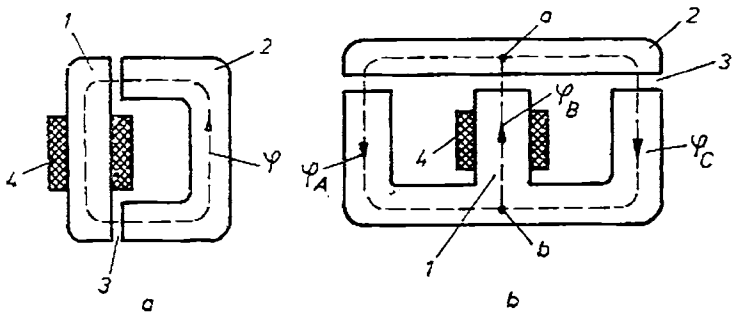


Fig. 4-1

a mai multor laturi (minimum trei) se numesc *nodurile circuitului magnetic* (astfel, circuitul magnetic cu ramificații din figura 4-1, *b* are trei laturi — *A*, *B* și *C* și două noduri — *a* și *b*).

Din punctul de vedere al producerii cîmpului magnetic există: *circuite magnetice cu magneți permanenți* — în care fluxul magnetic este produs de magnetizarea permanentă a unor porțiuni de circuit numite *magneți*; *circuite magnetice de curent continuu* — în care fluxul magnetic este produs de înfășurări de excitație alimentate în curent continuu; *circuite magnetice de curent alternativ* — în care fluxul magnetic e produs de înfășurări de excitație alimentate în curent alternativ (să zicem sinusoidal) și *circuite magnetice mixte* — în care fluxul magnetic este produs în cel puțin două moduri diferite (o combinație dintre cele trei descrise mai înainte).

Din punctul de vedere al realizării constructive a armăturilor, circuitele magnetice pot fi *masive, din tole, din pulberi* cu diverși lianți sau sinterizate și *mixte* (unele armături masive, altele din tole sau pulberi etc.). După cum vom vedea, în circuitele magnetice de curent alternativ apar pierderi prin curenți turbionari (Foucault), care pot fi diminuate printr-o construcție cu tole sau pulberi izolate electric. Porțiunile de circuit magnetic prin care fluxul magnetic este constant în timp pot fi executate din materiale feromagnetice masive (de exemplu prin turnare în forme).

Din punctul de vedere al aplicației se vorbește despre circuite magnetice: de mașină electrică, de transformator, de relee, de aparate electrice de măsurat, de aparate electrice pentru conectare automată, de amplificatoare magnetice, de traductoare, de macarale magnetice, de difuzoare electroacustice, de telefonie etc.

4.1.3. Mărimi, legi și teoreme specifice circuitelor magnetice

Este vorba de acele mărimi, legi și teoreme care se referă la componenta magnetică a cîmpului electromagnetic. În cele ce vor urma, avem în vedere cunoștințele de cîmp electromagnetic dobîndite la „Fizică" și noțiuni de teoria cîmpului de la „Matematici speciale".

Mărimi magnetice

Mărimile de stare, ce caracterizează local cîmpul magnetic, sînt:

— *intensitatea cîmpului magnetic* (într-un punct), notată cu $\bar{H}$, care este o mărime vectorială locală și se măsoară în SI în amper pe metru cu simbolul A/m;

— *inducția magnetică* (într-un punct), notată cu $\bar{B}$, care este o mărime vectorială locală și se măsoară în SI în tesla cu simbolul T;

— *tensiunea magnetică* (în lungul unei curbe Γ), notată cu u_m, care este o mărime scalară definită prin $u_m \stackrel{D}{=} \int_\Gamma \bar{H} \cdot d\bar{l}$ (unde $d\bar{l}$ este elementul de curbă orientat, cu valoarea elementară dl și cu direcția tangentei la curba Γ în punctul considerat). În SI se măsoară în amper (A);

— *tensiunea magnetomotoare* (t.m.m.), notată de obicei cu F_m, care este o mărime scalară calculată în lungul unei curbe închise Γ și este caracteristică surselor de cîmp magnetic (de exemplu bobinelor cu N spire sub curentul i), fiind definită prin $F_m \stackrel{D}{=} \oint_\Gamma \bar{H} \cdot d\bar{l} = N \cdot i$. În SI ea se măsoară în amper cu simbolul A;

— fluxul magnetic (printr-o suprafață Σ), notat cu φ, este o mărime scalară definită ca fluxul vectorului inducție magnetică $\bar{B}$, adică $\varphi \overset{D}{=} \int_{\Sigma} \bar{B} \cdot d\bar{A}$, unde $d\bar{A}$ este elementul de arie orientat (cu valoarea elementară a ariei dA și cu direcția normalei la suprafața Σ în punctul considerat) și în SI se măsoară în weber (cu simbolul Wb).

În legătură cu *fluxul magnetic din circuitele magnetice* se folosesc următoarele noțiuni:

— *fluxul magnetic fascicular* (φ) definit ca fluxul inducției magnetice $\bar{B}$ printr-o secțiune transversală a circuitului magnetic;

— *fluxul magnetic total* (Φ) definit ca fluxul inducției magnetice $\bar{B}$ printr-o înfășurare a circuitului magnetic: $\Phi = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k$ unde φ_k este fluxul magnetic prin suprafața unei spire k și N — numărul de spire al înfășurării sau $\Phi = N\varphi_m$ (φ_m este fluxul magnetic fascicular mediu);

— *flux magnetic fascicular util* (φ_u) definit ca fiind fluxul magnetic fascicular prin porțiunile așa-zise utile ale unui circuit magnetic (utile în sensul aplicației sau funcționării circuitului magnetic);

— *fluxul magnetic de scăpări* (sau *de dispersie*), notat cu φ_s, este fluxul magnetic corespunzător inducției magnetice ale cărei linii de cîmp nu se închid prin porțiunile utile ale circuitului magnetic.

Mărimile de stare magnetică a corpurilor sînt:

— *momentul magnetic* (al unui corp „foarte mic"), notat cu $\bar{m}$, este o mărime vectorială ce caracterizează starea de magnetizație a corpurilor. Această mărime se poate deduce din modelul $\bar{C} = \bar{m} \times \bar{B}_0$, unde $\bar{B}_0$ este inducția magnetică în vid și $\bar{C}$ — cuplul de forțe la care este supus un așa-numit „corp de probă" — cu momentul magnetic $\bar{m}$ și modelul $\bar{F} = (\bar{m}\nabla) \cdot B_0$, unde $\bar{F}$ — forța și ∇ — operatorul Nabla. În SI momentul magnetic se măsoară în amper metru pătrat cu simbolul Am^2;

— *magnetizația* (într-un punct dintr-un corp), notată cu $\bar{M}$, care este o mărime vectorială ce caracterizează local starea de magnetizație a corpurilor prin aceea că este definită ca densitatea de volum a momentelor magnetice $\left(\bar{M} \overset{D}{=} \frac{d\bar{m}}{dv}, \text{ unde } v \text{ reprezintă volumul}\right)$ și în SI se măsoară în amper pe metru cu simbolul A/m.

Mărimile magnetice de material sînt:

— *permeabilitatea* (absolută), notată cu μ, care este o funcție locală de punct ce caracterizează din punctul de vedere magnetic materialele (în SI unitatea de măsură pentru permeabilitate este henry pe metru, cu simbolul H/m);

— *susceptivitatea magnetică*, notată cu χ_m, este o mărime locală (funcție de punct) caracteristică corpurilor care se magnetizează (este adimensională).

Parametrii circuitelor magnetice sînt *permanența* (A) și *reluctanța* (R_m) asupra cărora vom reveni la § 4.3.

Legi ale cîmpului magnetic

Aceste legi au fost deduse (stabilite) pe cale experimentală și pot fi exprimate cu ajutorul unor modele (expresii matematice) fie la nivelul global (forma integrală), fie la nivelul fiecărui punct din domeniul unde are loc fenomenul magnetic (forma locală).

Principalele legi referitoare la componenta magnetică a cîmpului electromagnetic sînt următoarele:

— *legea legăturii dintre inducție, intensitate și magnetizație* se exprimă prin modelul:

$$\bar{B} = \mu_0\bar{H} + \mu_0\bar{M} \text{ sau } \bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M}), \tag{4-1}$$

unde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m este permeabilitatea vidului (această lege are un caracter larg, fiind valabilă atît în regim staționar, cît și în cazul cîmpurilor magnetice variabile în timp, precum și în orice punct al unui corp magnetizat, în repaus sau în mișcare);

— *legea magnetizației temporare* este valabilă numai în cazul corpurilor din materiale izotrope, cu temperatură uniformă și fără tensiuni mecanice, care nu au deformație permanentă, care nu au polarizație permanentă și care se magnetizează temporar proporțional cu intensitatea locală a cîmpului magnetic, adică la care $\bar{M} = \chi_m\bar{H}$ unde χ_m este susceptivitatea magnetică a materialului. În acest caz legea (4-1) ia forma $\bar{B} = \mu + \bar{H} + \mu_0\bar{M} = \mu_0\bar{H}_0 + \mu_0\chi_m\bar{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\bar{H} = \mu_0 \cdot \mu_r\bar{H}$, unde μ_r este permeabilitatea relativă a materialului (un coeficient adimensional). Notînd, în acest caz, $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ (μ fiind permeabilitatea absolută a materialului ce îndeplinește condițiile de mai sus, pentru care se mai poate scrie $\mu_r = \mu/\mu_0$ sau $\mu_r = 1 + \chi_m$), rezultă următorul model al legii magnetizației temporare:

$$\bar{B} = \mu\bar{H}; \tag{4-2}$$

— *legea fluxului magnetic* arată că fluxul vectorului inducției magnetice prin orice suprafață închisă este nul, ceea ce se exprimă prin modelele:

$$\oint_{\Sigma} \bar{B} \cdot d\bar{A} = 0 \text{ — forma integrală} \tag{4-3a}$$

sau

$$\text{div } \bar{B}\Big|_P = 0 \text{ — forma locală,} \tag{4-3b}$$

unde P este un punct din domeniul D al spațiului în care se manifestă fenomenul magnetic. Această lege explică faptul că dacă trasăm un contur închis în cîmpul magnetic, fluxul magnetic prin orice suprafață deschisă care se sprijină pe acest contur este același, precum și faptul că dacă reprezentăm cîmpul magnetic prin linii de cîmp pentru fiecare *tub de flux unitate*, toate acestea vor fi linii închise (deoarece dacă printr-o parte a unei suprafețe închise intră un număr de linii de cîmp, prin cealaltă parte trebuie să iasă același număr de linii de cîmp, pentru ca — în conformitate cu legea 4—3a — fluxul prin acea suprafață închisă să fie nul);

— *legea inducției electromagnetice* se referă la unul din aspectele interdependenței dintre cîmpul electric și cîmpul magnetic și se poate exprima analitic prin modelele:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ — forma integrală,} \tag{4-4a}$$

sau:

$$\oint_{\Gamma_\Sigma} \bar{E}_s \cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma \bar{B} \cdot d\bar{A}, \tag{4-4a'}$$

adică

$$\oint_{\Gamma_\Sigma} \bar{E}_s \cdot d\bar{l} = -\int_\Sigma \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{A} - \int_\Sigma \text{rot}\,(\bar{B}\times\bar{w}) \cdot d\bar{A}, \tag{4-4a''}$$

precum și:

$$\text{rot}\,\bar{E}_s\Big|_P = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\Big|_P - \text{rot}\,(\bar{B}\times\bar{w})\Big|_{\substack{P\\ \forall P\in D}} \text{ — forma locală,} \tag{4-4b}$$

unde: e este t.e.m. indusă într-un circuit electric; Φ — fluxul magnetic total prin suprafețele determinate de circuitul electric în care se induce t.e.m. e, $\bar{E}_s$ — intensitatea locală (într-un punct P al domeniului D în care are loc fenomenul electromagnetic) a cîmpului electric solenoidal; Γ_Σ — un contur închis pe care se „sprijină" o suprafață deschisă Σ (oricare) și $\bar{w}$ — viteza locală în cazul în care în domeniul D există și corpuri mobile;

— *legea circuitului magnetic* stabilește legătura dintre cauzele care conduc la producerea cîmpului magnetic și intensitatea cîmpului produs. În afară de corpurile magnetizate, mai pot produce cîmp magnetic și curenții electrici de conducție, precum și cîmpurile electrice variabile în timp (curenții de deplasare). Această lege se poate exprima prin:

$$\oint_\Gamma \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum i + \int_{\Sigma_\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{A} \text{ — forma integrală,} \tag{4-5a}$$

sau:

$$\text{rot}\,\bar{H}\Big|_P = \bar{J}_P + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\Big|_P \text{ în } \forall P \in D \text{ — forma locală,} \tag{4-5b}$$

unde $\sum i$ reprezintă suma curenților electrici de conducție care „străpung" o suprafață Σ_Γ ce se sprijină pe conturul Γ; $\bar{D}$ — inducția electrică în punctul P din domeniul D unde are loc fenomenul electromagnetic și $\bar{J}$ — densitatea locală (în punctul P) a curentului electric de conducție. Așa cum am precizat și ceva mai înainte, termenul din stînga al egalității (4-5a) este denumit *tensiune magnetomotoare* (*t.m.m.*) $F_m \overset{D}{=} \oint_\Gamma \bar{H} \cdot d\bar{l}$, iar termenul din dreapta, $\sum i$, se numește solenație (și se notează, adesea, cu θ, adică : $\theta \overset{D}{=} \sum i$).

Cîteva teoreme specifice studiului cîmpului magnetic

Ne vom reaminti, în continuare, numai o parte a acestor teoreme (și în special pe cele care nu vor mai fi prezentate separat la punctul 4.1.4 sau la § 4.3).

Teoremele lui Kirchhoff aplicate circuitelor magnetice, și anume: teorema I $\sum \Phi = 0$ — în noduri, care rezultă din legea (4-3*a*) și teorema a II-a $\sum F_m = \sum R_m \Phi$—pentru contururi închise prin armăturile circuitului magnetic, care rezultă din legea (4-5*a*), vor fi comentate pe larg la punctul 4.2.1.

Teorema energiei magnetice (W_m) a unui sistem de n circuite parcurse de curenții i_k ($k = 1, 2, ..., n$) și străbătute de fluxurile magnetice totale Φ_k($k = 1, 2, ..., n$) situate în medii liniare se referă la energia înmagazinată în mediul magnetizat dată de modelul:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \Phi_k \cdot i_k, \tag{4-6}$$

care este valabilă numai în regim staționar sau cvasistaționar (ea a fost dedusă la capitolul 2).

Densitatea de volum a energiei magnetice (w_m) localizată în cîmpul magnetic într-un punct în care intensitatea cîmpului magnetic este $\bar{H}$ și inducția magnetică este $\bar{B}$ se exprimă în cazul general (care cuprinde și regimul variabil) prin modelul:

$$w_m = \frac{1}{2} \bar{B} \cdot \bar{H}. \tag{4-7}$$

Formula lui Biot-Savart-Laplace, referitoare la intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}_0$, produs în vid de un circuit electric filiform închis și parcurs de curentul continuu I, este:

$$\bar{H}_0(P) = \frac{I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\bar{l} \times \bar{R}}{R^3}, \tag{4-8}$$

unde $d\bar{l}$ este vectorul elementului de arc orientat din conturul Γ al circuitului închis (cu sensul dat de sensul de referință pozitiv al curentului I), iar $\bar{R}$ este raza vectoare a distanței dintre elementul $d\bar{l}$ și punctul P în care se calculează cîmpul $\bar{H}_0(P)$, orientată de la $d\bar{l}$ la punctul P considerat.

4.1.4. Forțe în cîmpul magnetic

Dacă în cîmpul magnetic forțele de natură magnetică efectuează un lucru magnetic, din aplicarea principiului conservării energiei și pe baza relației (2-8) rezultă:

$$dW_m = \sum_{k=1}^{n} i_k \cdot d\Phi_k - X\, dx, \tag{4-9}$$

unde dW_m reprezintă variația energiei cîmpului magnetic, X — forța generalizată, iar x — coordonata generalizată.

La aplicarea principiului conservării energiei s-a ținut seama de relația (4-6) sub forma variației elementare a energiei cîmpului magnetic pentru corpuri imobile și s-a scăzut lucrul mecanic, deoarece energia cîmpului magnetic scade corespunzător cu lucrul mecanic efectuat.

Distingem două cazuri posibile:

1° Fluxul se menține constant, deci $d\Phi_k = 0$. Rezultă:

$$X\,dx = -\,(dW)_{\Phi=const.},$$

sau:

$$X = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{\Phi=const.}. \tag{4-10}$$

2° Se mențin constanți curenții din circuite. Vom avea din relația (4-6):

$$dW = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k \cdot d\Phi_k$$

și ținînd cont de relația (4-9) rezultă:

$$X\,dx = (dW)_{i_k=const.},$$

de unde:

$$X = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{i_k=const.}. \tag{4-11}$$

Să exemplificăm aplicarea acestor relații prin două cazuri mai uzuale.

a) Să calculăm forța care acționează asupra unui element de conductor parcurs de curentul i și aflat într-un cîmp magnetic constant în timp (fig. 4-2).

Variația energiei cîmpului magnetic în care se află conductorul va fi:

$$dW = i \cdot d\Phi$$

și sîntem în cazul $i = const.$ Lui $d\Phi$ îi dăm următoarea interpretare: variația fluxului este egală cu fluxul vectorului $\bar{B}$ prin suprafața descrisă de elementul conductor $d\bar{l}$ în cursul unei deplasări virtuale cu $d\bar{x}$. Deci:

$$d\Phi = \bar{B} \cdot (d\bar{x} \times d\bar{l}) = \bar{B}\,d\bar{x}\,d\bar{l}.$$

Aici succesiunea termenilor $d\bar{x}$ și $d\bar{l}$ în produsul vectorial este determinată de necesitatea ca $\bar{B}$, $d\bar{x}$ și $d\bar{l}$ să formeze un triedru drept. Pe baza proprietăților produsului mixt putem scrie:

$$dW_m = i \cdot d\Phi = i(d\bar{l} \times \bar{B}) \cdot d\bar{x}.$$

Experiența arată că vectorul $(d\bar{l} \times \bar{B})$ are întotdeauna direcția și sensul forței căutate $d\bar{F}$ și în acest caz, din relația:

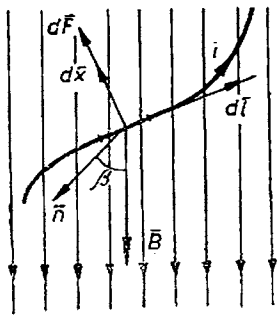


Fig. 4-2

$$dW = d\bar{F} \cdot d\bar{x} = i\ (d\bar{l} \times \bar{B})\,d\bar{x},$$

rezultă:

$$d\bar{F} = i\,(d\bar{l} \times \bar{B}), \tag{4-12}$$

cunoscută și sub numele de *forța lui Laplace.*

Această aplicație nu este riguroasă și are mai mult caracter ilustrativ. Rezultatul este însă corect și va fi aplicat la studiul proceselor elementare din mașinile electrice.

Pentru *exemplificare* vom efectua următoarea *aplicație numerică*: un motor electric are partea

mobilă (denumită rotor) de forma unui corp cilindric cu diametrul $D = 200$ mm și cu lungimea $l = 600$ mm; rotorul este așezat între doi poli magnetici, care acoperă 3/5 din suprafața rotorului (fig. 4-3), astfel încît pe această suprafață polii determină un cîmp magnetic uniform și perpendicular pe suprafața rotorului, cu inducția $B = 0{,}6$ T; pe periferia rotorului sînt fixate uniform și în lungul generatoarei cilindrului rotorului un număr $N = 200$ conductoare, conectate în serie și parcurse de un curent $I = 20$ A (conductoarele din dreptul unui pol sînt parcurse de curent în sens contrar sensului în care sînt parcurse conductoarele din dreptul celuilalt pol). Problema cere să determinăm cuplul care se exercită asupra rotorului.

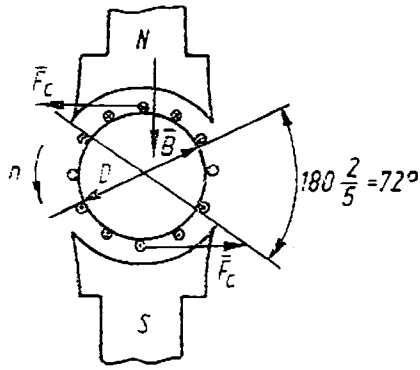


Fig. 4-3

Aplicînd relația (4-12) în condițiile presupuse de problemă (și anume $\bar{B}$ uniform pentru toate conductoarele și în lungul fiecărui conductor, precum și $\bar{l} \perp \bar{B}$) rezultă că forța care se exercită asupra unui conductor aflat în cîmpul de inducție $\bar{B}$ este:

$$\bar{F}_c = I(\bar{l} \times \bar{B}),$$

avînd direcția, conform regulii produsului vectorial în triedrul drept, așa ca în figura 4-3 și valoarea: $F_c = IlB$, adică $F_c = 20 \cdot 600 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}6 = 7{,}2$ N.

Conductoarele fiind fixate rigid de rotor (sînt plasate în crestături longitudinale ale rotorului), forțele $\bar{F}_c$ se exercită asupra rotorului, producînd — în raport cu centrul rotorului — cîte un cuplu (corespunzător fiecărui conductor aflat în zona polilor) $\bar{M}_c = \bar{R} \times \bar{F}_c$, unde $\bar{R}$ este vectorul de poziție al axei conductorului în raport cu centrul rotorului $\left(\text{pentru toate conductoarele } R = \frac{D}{2}\right)$. Cuplul $\bar{M}$, care se exercită asupra rotorului, este dat de suma cuplurilor $\bar{M}_c$ datorit conductoarelor aflate în dreptul polilor (numărul lor este, aici, în orice moment 3/5 N): $\bar{M} = \frac{3}{5} N(\bar{R} \times \bar{F}_c)$. Acest cuplu acționează rotorul în sensul săgeții n (fig. 4-3) și are valoarea: $M = \frac{3}{5} N \frac{D}{2} F_c =$

$= \frac{3}{5} N \frac{D}{2} \cdot IlB = \left(\frac{3}{10} N\right) I\varphi = k \cdot I\varphi$, unde φ este fluxul determinat de $\bar{B}$ prin secțiunea rotorului. Numeric: $M = \frac{3}{5} 200 \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 20 \cdot 600 \cdot 10^{-3} \cdot$

$\cdot 0{,}6 = 86{,}4$ Nm.

Tot ca o aplicație a relației (4-12) stabilită mai sus, să determinăm expresia forțelor care se exercită asupra a două conductoare filiforme rectilinii, paralele și foarte lungi, situate într-un mediu omogen și izotrop (cu $\mu = const.$), atunci cînd aceste conductoare sînt parcurse de curenți electrici de conducție.

Experiența arată că atunci cînd cele două conductoare sînt parcurse de curenți în același sens (fig. 4-4, *a*) ele se atrag, iar atunci cînd sensul curenților este contrar, cele două conductoare se resping (fig. 4-4, *b*). Experiența

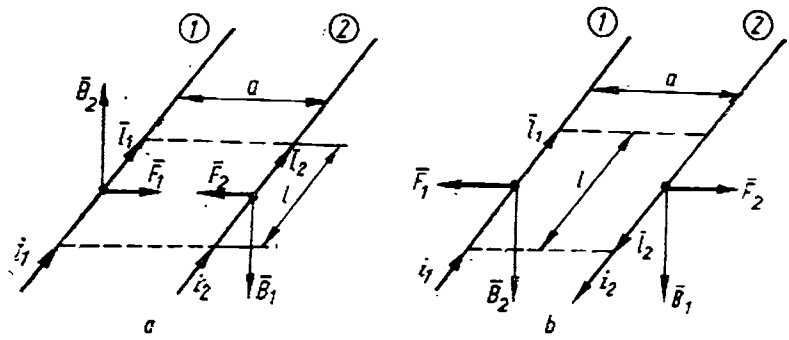


Fig. 4-4

arată că în ambele cazuri, pe o porțiune l din lungimea conductoarelor paralele, fiecare din cele două conductoare este supus unei forțe situate în planul format de aceste conductoare.

Explicația exercitării acestor forțe este următoarea: fiecare din cele două conductoare se găsește în cîmpul magnetic produs de curentul care parcurge conductorul vecin. Dacă conductoarele sînt foarte lungi, intensitatea cîmpului magnetic produs în dreptul unui conductor, de curentul ce parcurge conductorul vecin, poate fi calculată cu relația (4-8). Forța care se exercită asupra unuia din conductoare, cînd acesta e parcurs de curent și se găsește în cîmpul magnetic determinat de curentul din conductorul vecin, poate fi determinată cu relația (4-12), stabilită anterior.

Astfel, cu notațiile din figura 4-4 și pentru cazul particular de aici, expresia forței care se exercită asupra unei porțiuni de lungime l, relativ mică, a conductorului notat cu *1*, este conform relației (4-12):

$$\bar{F}_1 = i_1(\bar{l}_1 \times \bar{B}_2),$$

unde $\bar{B}_2$ este inducția magnetică determinată în locul în care se află conductorul de către curentul i_2, care trece prin conductorul vecin; valoarea lui $\bar{B}_2$ în acest caz, conform relațiilor cunoscute (4-2 și 4-8), este:

$$B_2 = \mu \frac{i_2}{2\pi a},$$

unde a este distanța dintre cele două conductoare. Deoarece vectorii $\bar{B}_2$ și $\bar{l}$ sînt perpendiculari (conductoarele fiind paralele) rezultă că valoarea forței este:

$$F_1 = i_1 l B_2 = i_1 l \mu \frac{i_2}{2\pi a}, \qquad (4\text{-}13)$$

cunoscută sub numele de *forța lui Ampère.*

În mod analog obținem și valoarea forței $\bar{F}_2$:

$$F_2 = i_2 l B_1 = \frac{1}{2\pi} \mu \frac{i_1 i_2}{a} \cdot l,$$

care este egală cu $\bar{F}_1$.

Orientarea forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ în cele două cazuri (*a* și *b*) din figura 4-4 se determină cu ajutorul regulii produsului vectorial, luînd sensul lungimii $\bar{l}_k$ în sensul curentului i_k și determinînd sensul lui $\bar{B}_j$ prin asocierea lui, după regula burghiului drept, curentului i_j ce l-a determinat.

b) Forța portantă a unui electromagnet. Un electromagnet (fig. 4-5) are un miez *m*, pe care se găsește o bobină (să considerăm că ea are N spire) și o armătură mobilă *a*, între care există un întrefier de lungime δ.

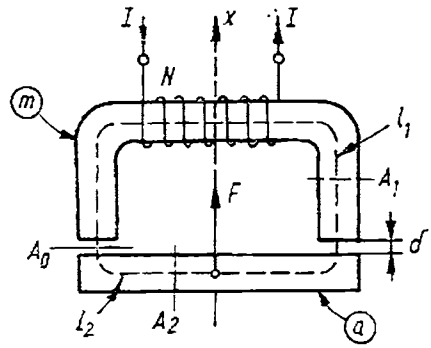


Fig. 4-5

Considerăm cazul particular, realizabil cu o anumită aproximație în practică, în care cele trei porțiuni ale circuitului magnetic au, fiecare în parte, permeabilitatea constantă (miezul: $\mu_1 = const.$, armătura: $\mu_2 = const.$ și întrefierul: $\mu_0 = const.$). Fluxul magnetic φ este constant în lungul circuitului (neglijăm deci fluxul de scăpări) și considerăm că $\bar{B}$ este în orice loc normal pe secțiunea transversală a circuitului magnetic (de arie A_1 — miezul, A_2 — — armătura și A_0 — întrefierul). Energia cîmpului magnetic din întrefier va fi conform expresiei (4-7):

$$W_0 = \int_{v_0} \frac{B_0 \cdot H_0}{2}\, dv = \int_{v_0} \frac{B_0^2}{2\mu_0} A_0\, 2\, dx.$$

În cîmpul magnetic din întrefier, armătura va fi supusă unei forțe $\bar{F}$ pe direcția lui x, care va duce la efectuarea lucrului mecanic (pe seama energiei F, cîmpului magnetic) $\bar{F} \cdot d\bar{x}$. Aplicînd relația (4-11) deducem valoarea forței F, denumită *forța portantă a electromagnetului*:

$$F = \left(\frac{\partial W_0}{\partial x}\right)_{i=ct.} = \frac{B_0^2 A_0}{\mu_0},$$

unde B_0 este inducția magnetică în întrefier.

Expresia lui F mai poate fi scrisă și în altă formă. în funcție de elementele bobinei și miezului. Deoarece în întrefier $B_0 = \frac{\varphi}{A_0}$:

$$F = \frac{\varphi^2}{\mu_0 A_0}.$$

Legea (4-5*a*), scrisă în forma $\oint_\Gamma \bar{H} \cdot d\bar{l} = Ni$, conduce, în cazul circuitului magnetic din figura 4-5, la $Hl = Ni$ de unde deducem pentru fluxul magnetic:

$$\varphi = B/A = \mu H/A = \mu \frac{NI}{I}/A,$$

adică:

$$\varphi = \frac{Ni}{\frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{2\delta}{\mu_0 A_0}},$$

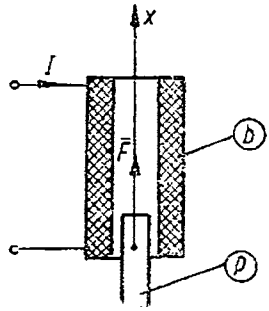


Fig. 4-6

astfel că:

$$F = \frac{1}{\mu_0 A_0} \cdot \frac{(Ni)^2}{\left(\frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{2\delta}{\mu_0 A_0}\right)^2},$$

valabilă pentru electromagneții cu întrefier mic (denumiți de „cursă scurtă").

La un electromagnet cu cursă lungă (figura 4-6, unde b este o bobină fixă parcursă de un curent constant I, iar p o piesă feromagnetică mobilă), forța de atracție care se exercită asupra piesei p este, conform relației (4-11):

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{I=ct.} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} I^2 L\right),$$

unde L este inductivitatea bobinei (care depinde de poziția piesei p în interiorul bobinei). Rezultă:

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial x}.$$

4.2. MATERIALE MAGNETICE

În majoritatea aplicațiilor industriale (în curent alternativ la 50 Hz sau în curent continuu), dar chiar și în multe situații din radiotehnică și telecomunicații, circuitele magnetice sînt confecționate din *materiale feromagnetice*. De aceea, în cadrul acestui paragraf vom analiza proprietățile magnetice ale acestor materiale și comportarea lor în cîmpul magnetic.

4.2.1. Comportarea materialelor în cîmp magnetic

Știm de la „Fizică" că materialele magnetice sînt substanțe care „deformează" un cîmp magnetic, concentrînd un număr mare de linii de cîmp în spațiul ocupat de ele.

Datorită unor *energii de schimb*, momentele magnetice $\bar{m}$ dintr-un spațiu restrîns („domenii magnetice") iau o poziție paralelă și dau naștere la așa-numita *magnetizare spontană* (locală), fără acțiunea unui cîmp magnetic exterior. Orientarea diferitelor domenii magnetice fiind statistic dezordonată, efectul ei se anulează, corpul apărînd global („văzut din exterior") ca nemagnetic, atît timp cît el nu este supus acțiunii unui cîmp magnetic exterior $\bar{H}$ (care să orienteze momentele magnetice $\bar{m}$ în direcția cîmpului magnetizant).

Această magnetizare a corpurilor este supusă legii generale exprimată prin modelul (4-1), din care rezultă că într-un corp, caracterizat prin magnetizația $\bar{M}$ și introdus într-un cîmp exterior („magnetizant") cu intensitatea $\bar{H}$, se induce un cîmp cu inducția magnetică $\bar{B} = \mu_0(\bar{H} + \bar{M})$.

În cazul particular al corpurilor cu magnetizație temporară (legea 4-2), inducția se exprimă prin modelul $\bar{B} = \mu\bar{H}$. La materialele utilizate în practică (feromagnetice), inducția B este o funcție neliniară a cîmpului de intensitate H, deoarece $\mu = f(H)$ după o anumită caracteristică specifică materialului.

Clasificarea materialelor din punctul de vedere al comportării lor în cîmp

Din punct de vedere magnetic, materialele pot fi împărțite în funcție de susceptivitatea magnetică χ_m și de permeabilitatea lor în trei categorii: diamagnetice, paramagnetice și feromagnetice.

Materialele *diamagnetice* sînt caracterizate printr-o susceptivitate magnetică mai mică decît zero ($\chi_m < 0$), ceea ce înseamnă și o permeabilitate relativă subunitară ($\mu_r < 1$). Susceptivitatea magnetică a acestor substanțe este de ordinul 10^{-6}. La materialele diamagnetice, magnetizația temporară are sensul invers sensului intensității locale a cîmpului magnetic. Corpurile din materiale diamagnetice introduse într-un cîmp magnetic sînt slab respinse de acesta. Repulsia este proporțională cu intensitatea cîmpului magnetic. Magnetizația substanțelor diamagnetice este independentă de temperatură. Din această categorie fac parte substanțe ca: argintul, aurul, mercurul, siliciul, germaniul, staniul, plumbul, beriliul, cuprul, stibiul, bismutul, sulful, seleniul etc.

Materialele paramagnetice au susceptivitatea magnetică mai mare decît zero ($\chi_m = 10^{-3} \div 10^{-6}$) și o permeabilitate relativă (μ_r) puțin mai mare decît unitatea. Susceptivitatea lor magnetică variază însă cu temperatura în general după legea lui Curie ($\chi_m = C/T$, unde C este o constantă de material și T temperatura absolută). La aceste materiale, magnetizația temporară are același sens cu intensitatea locală a cîmpului magnetic. Din această categorie fac parte, printre altele, și substanțele: aluminiul, bariul, litiul, sodiul, magneziul, calciul, cromul, wolframul.

Materialele feromagnetice sînt o categorie specială a substanțelor parametrice caracterizate prin susceptivitate magnetică și permeabilitate foarte mari, cu magnetizație temporară foarte intensă și care nu se anulează cînd aceste materiale sînt scoase din cîmp (se zice că au *magnetism remanent*). Din această categorie aparte fac parte elemente ca fierul, cobaltul și nichelul, precum și diverse alte aliaje pe bază de Fe, Ni și Co (v. tabela 4). Susceptivitatea magnetică a materialelor feromagnetice variază puternic cu temperatura.

La materialele feromagnetice, inducția magnetică B depinde de succesiunea stărilor anterioare (histerezis). Ele prezintă fenomenul de saturație magnetică, adică la un moment dat creșterea lui H nu mai este urmată de creșterea lui B. Aceasta echivalează cu a spune că în relația (4-2) permeabilitatea μ nu mai este un factor constant. Modul de variație $B = f(H)$ se poate reprezenta grafic prin așa-numita *curbă de magnetizare* (fig. 4-7). Dacă experiența se repetă de mai multe ori în condiții identice (se modifică H și se determină B corespunzător) se obține *ciclul de histerezis* din figura 4-8. Aici ordonatele la origine indică *inducția remanentă* B_r (corespunzătoare lui $H = 0$), iar abscisele la origine indică *cîmpul coercitiv* H_c (corespunzătoare lui $B = 0$).

Cunoașterea curbelor de magnetizare și a ciclului de histerezis ale materialelor feromagnetice prezintă o mare însemnătate practică (pentru alegerea materialelor și dimensionarea circuitelor magnetice).

Materialele antiferomagnetice au o susceptivitate magnetică de ordinul 10^{-3} și variază cu temperatura; ea crește după o anumită temperatură critică și apoi scade brusc (temperatura la care dispare antiferomagnetismul se numește temperatură Néel). Substanțele: Mn, MnO, NiO, CoO, CaO, $NiCl_2$ (și altele) sînt antiferomagnetice.

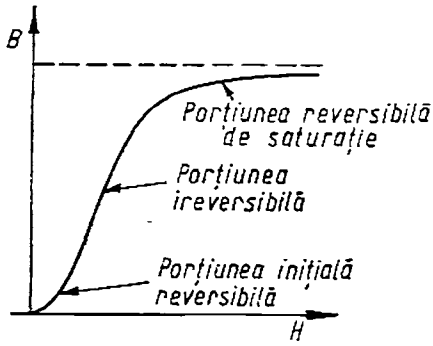


Fig. 4-7

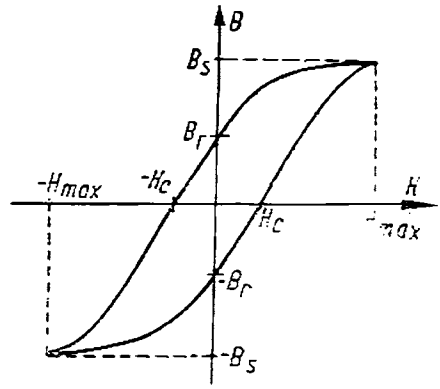


Fig. 4-8

Substanțele metamagnetice au o susceptivitate magnetică variabilă cu intensitatea cîmpului magnetic și cu temperatura. În anumite intervale de temperatură ele se magnetizează sub acțiunea unor cîmpuri puternice. Astfel de substanțe sînt: Dy, Er, Ho etc.

Materialele ferimagnetice sînt acelea la care momentele magnetice, $\overline{m}$, paralele și de sens opus au valori diferite. Feritele sînt compuși de forme: $MeO \cdot 6\,Fe_2O_3$ în care Me reprezintă un metal bivalent ca Ni, Mn, Co, Cd etc. (pentru feritele zise „moi") și Ba, Sr, Pb (pentru feritele „dure"). Feritele sînt caracterizate prin rezistivitatea foarte mare în comparație cu materialele metalice (și deci au pierderi magnetice — v. punctul 4.2.3 — mai mici). Ele se folosesc pe scară largă ca materiale magnetice moi și dure (v. punctul 4.2.2).

4.2.2. Proprietățile materialelor feromagnetice

În general, elementele prin care se apreciază proprietățile materialelor magnetice sînt:

— *anizotropia magnetică* (prin anizotropie magnetică se înțelege dependența energiei interne de direcția magnetizării spontane), care poate fi: *cristalină* (corpurile nedeformate și neferomagnetice cristalizate, la care vectorul magnetizației $\overline{M}$ nu are direcția intensității cîmpului magnetic $\overline{H}$ și depinde de orientarea cristalului în cîmp; dacă cristalul are trei direcții triortogonale privilegiate, atunci trebuie cunoscută susceptivitatea magnetică corespunzătoare acestor trei direcții și legea 4-2 ia forma $\overline{M} = \chi_{mx}\overline{H}_x + \chi_{my}\overline{H}_y + \chi_{mz}\overline{H}_z$), *de formă* (la particulele cu forme alungite, necristaline și nedeformate), *de tensiune* (corpuri cu solicitări mecanice), *de schimb* (la materialele din două substanțe cu sisteme magnetice diferite, ca de exemplu fero- și antiferomagnetice);

— *cîmpul coercitiv* H_c (v. fig. 4-8);

— *inducția remanentă* B_r (v. fig. 4-8);

— *permeabilitatea* μ (absolută, relativă, inițială — la originea curbei de magnetizare din figura 4-7, maximă, efectivă — la circuitele magnetice cu întrefier, reală — dată de raportul inductivității unei bobine cu miez și inductivitatea aceleiași bobine fără miez);

— *curba de magnetizare* (v. fig. 4-7);

— *ciclul de histerezis* (v. fig. 4-8);

— *pierderile magnetice* (v. punctul 4.2.3).

În continuare ne vom referi la situația acestor „indicatori" în cazul materialelor *feromagnetice* -- cele mai utilizate la circuitele magnetice din aplicațiile industriale.

Materialele feromagnetice sînt realizate din fier (pur sau sărac în carbon), din fontă, oțel, nichel, cobalt, crom, din aliaje fier-siliciu, fier-aluminiu, fier-nichel, fier-cobalt, precum și din compuși din oxid de fier cu diferite metale (Ni, Mn, Zn, Co, Mg etc.). Aceste materiale prezintă următoarele proprietăți caracteristice: au o permeabilitate relativă de valoare ridicată în raport cu alte materiale (de $10^2 \div 10^6$); au o curbă de magnetizare $B = f(H)$ neliniară; permeabilitatea lor nu este constantă, ci este o funcție de H; prezintă fenomenul de histerezis (cu un ciclu de forma celui din figura 4-4), cu o anumită inducție remanentă B_r, cîmp coercitiv H_c și pierderi prin histerezis p_H (v. punctul 4.2.3). Prin încălzirea materialelor feromagnetice la temperaturi mai mari decît o anumită limită, denumită punctul Curie, proprietățile lor descrise mai sus dispar; punctul Curie, este specific fiecărui material în parte (la fier este 760°C, la nichel 360°C etc.).

După felul proprietăților, materialele feromagnetice se clasifică în materiale magnetice noi și materiale magnetice dure (denumirea de moale sau dur se referă la calitatea magnetică a acestor materiale și nicidecum la proprietățile lor mecanice).

Materialele magnetice moi sînt caracterizate printr-un ciclu de histerezis îngust (deci cu un H_c mic) și printr-o permeabilitate foarte ridicată. Aceste materiale sînt utilizate la construirea circuitelor magnetice din instalațiile electrice și din aparatura radioelectronică, cum ar fi circuitele magnetice ale mașinilor electrice, ale transformatoarelor, ale aparatelor de măsurat, comandă și control, ale traductoarelor, ale servomecanismelor, relee, miezul unor bobine etc. Proprietățile principalelor materiale magnetice moi sînt arătate în tabela 4-1.

Proprietățile magnetice ale tolelor silicioase fabricate în România (utilizate la fabricarea mașinilor electrice și a transformatoarelor pentru frecvențe joase) sînt arătate în tabela 4-2.

Materialele magnetice dure sînt caracterizate prin cîmpul coercitiv mare pe care îl au ($H_c > 4000$ A/m), printr-o inducție remanentă relativ mare și prin permeabilități relativ mici. Deosebirea dintre materialele magnetice dure și cele moi constă, în principal, în aceea că materialele dure au un cîmp coercitiv mult mai mare decît cîmpul coercitiv al materialelor magnetice moi. Materialele magnetice dure sînt utilizate la executarea magneților permanenți. Proprietățile principalelor materiale magnetice dure sînt arătate în tabela 4-3.

În această tabelă este indicată „cifra de calitate" a materialului magnetic dur prin valoarea maximă a produsului $B \cdot H$. După cum am arătat prin (4-8), produsul $\frac{B \cdot H}{2}$ reprezintă densitatea de volum a energiei magnetice. La materialele feromagnetice dure care prezintă fenomenul de histerezis, produsul BH are (pentru un anumit punct de pe curba de magnetizare) o valoare maximă. Valoarea maximă a acestui produs $(BH)_{max}$ este denumită *cifra de calitate a materialului magnetic* și reprezintă factorul cel mai important pentru dimensionarea magneților permanenți; volumul magnetului permanent va fi determinat, în principal, de lucrul mecanic util al magnetului (deci de inducția în întrefierul magnetului) și de cifra de calitate.

Tabela 4-1

Materialul	Permeabilitate relativă		Inducția remanentă B_r [T]	Cîmpul coercitiv H_c [A/m]	Inducția de saturație B_s [T]	Domeniul de utilizare
	inițială μ_i	maximă μ_{max}				
1	2	3	4	5	6	7
Fier electrolitic	500 ÷ 600	15 000	1,05	15,91 la 28,64	—	—
Fier carbonil (sub formă de pulbere)	2 000 la 3 300	20 000 la 21 500	0,6	6,36 la 7,95	2,03	Miezuri pentru aparate de măsurat foarte sensibile
Permalloy (78,5% Ni; 21,5% Fe)	10 000	100 000	0,8	2,386 la 5,568	1,1	Ecrane magnetice și relee
Permalloy (78,5% Ni; 3,8% Cr și 17,7% Fe)	12 000	62 000 la 100 000	0,8	2	—	Miezuri pentru bobine de inducție, ecrane magnetice, transformatoare de audiofrecvență
Permalloy (78,5% Ni; 3,8% Mn; 17,7% Fe)	8 000 la 15 000	70 000 la 140 000	0,85	—	—	
Gaipernik (50% Ni; 50% Fe)	2 000 la 3 500	70 000 la 90 000	0,73	3,174 la 5,568	1,6	Transformatoare de măsură, relee
Supermalloy (79% Ni; 5% Mo; 16% Fe)	100 000	1 000 000	0,6	0,3174	0,79	Bobine cu L mare

Dinamax (65% Ni; 2% Mo; 35% Fe)	—	1 530 000	1,194	0,437	1,264	Miezuri toroidale
Permendur (50% Co; 50% Fe)	800	5 000	—	159	2,45	Bobine cu inducție de saturație mare
Izoperm (36% Ni; 9% Cu; 55% Fe)	60	65	—	477	1,6	Transformatoare de curent, aparate electroacustice
Aliaj Fe-Si sinterizat (cu 7% Si)	1 000	17 500	0,841	15	—	Miezuri pentru piese mici, traductoare
Ferite (MnO, ZnO și Fe_2O_3) (1) (1)	1 000 la 2 000	—	—	12 la 16	0,35	Pentru bobinele de radiofrecvență: (1) pînă la 100 kHz (2) pînă la 20 MHz
Ferite (Li_2O, ZnO și Fe_2O_3) (2) (2)	15 la 25	—	—	477 la 716	0,062 la 0,11	
Alsifer (Al, Si, Fe)	9 000 la 25 000	110 000	0,3	2,2	1,2 la 1,5	Piese magnetice turnate (carcase, ecrane)
Fontă albă	—	186	0,475	954 la 1193	1,23	Carcase, scuturi și cadre pentru mașinile și aparatele electrice
Fontă cenușie	—	180	0,5	1190 la 1432	1,39	
Fier „Armco" (după recoacere la 900°C)	250 la 350	3 000 la 7 000	1,2	55,68 la 135,24	1,8 ÷ 2	Miezuri pentru relee

Tabela 4-2

Calitatea	Grosimea tolei [mm]	Inducția magnetică minimă (în T) la			
		2 500 [A/m]	5 000 [A/m]	10 000 [A/m]	30 000 [A/m]
E-I (tole cu 0,4÷0,8% Si)	0,5; 0,75 1 și 1,5	1,53	1,63	1,75	1,98
E-II (tole cu 0,6÷1,2% Si)	0,5	1,5	1,6	1,71	1,95
E-III (tole cu 1,8÷2,3% Si)	0,5	1,47	1,57	1,69	1,93
E-IV (tole cu 3,6 ÷ 4,4% Si)	0,35 și 0,5	1,43	1,55	1,65	1,85

Tolele E-IV au: $B_r = 0{,}6$ T și $H_c = 40$ A/m.

Tabela 4-3

Materialul	Inducția remanentă B_r [T]	Cîmpul coercitiv H_c [A/m]	Cifra de calitate $(B.H)_{max}$ [T.A/m]
Oțel cu wolfram (6% W; 0,7% C; 0,3% Si, restul Fe)	1,03	5 568	2 546
Oțel cu crom (3,5% Cr; 0,9% C; 0,3% Mn; 0,3% Si, restul Fe)	0,92	5 170	2 300
Oțel cu 3% Co (1% C; 4% Cr; 0,3% Si; 1,5% Mo, restul Fe)	1	6 364	3 174
Oțel cu 9% Co (1,05% C; 9% Cr; 1,5% Mo; 0,3% Mn; 0,3% Si, rest Fe)	0,78	12 728	3 980
Oțel cu 35% Co	0,95	19 880	7 950
Oțel cu mangan	0,635	13 760	3 740
Vicalloy II (14% V; 52% Co, restul Fe)	1	41 770	21 840
Almico VDG (24% Co; 14% Ni; 8% Al; 3% Cu, restul Fe)	1,35	57 300	59 600

4.2.3. Pierderi în fier

Pierderile în fier se produc în circuitele magnetice, de obicei din materiale feromagnetice, ale instalațiilor care lucrează în curent alternativ și se datoresc fenomenului de histerezis (p_H) și curenților turbionari sau Foucault (p_F).

La materialele feromagnetice, dacă H are o variație periodică alternativă, inducția magnetică B variază în funcție de H după ciclul de histerezis (v. fig. 4-8). La instalațiile care lucrează în curent alternativ, prin bobinele circuitelor magnetice circulă curenți cu o anumită frecvență f, care determină un cîmp magnetic cu intensitatea H pulsatoric cu aceeași frecvență f; în acest fel, miezul circuitelor magnetice este supus unei magnetizări repetate (cu frecvența f), în fiecare secundă fiind descrise f cicluri de magnetizare. Pentru fiecare ciclu de magnetizare este necesar un anumit lucru mecanic pe care îl efectuează cîmpul magnetic exterior „prin învingerea" eforturilor interioare, din materialul ce se magnetizează. Acest lucru mecanic nu este în întregime reversibil, o parte a sa transformîndu-se ireversibil în căldură (în miezul magnetic), constituind ceea ce numim *pierderi în fier prin histerezis*. Experiența arată că pierderile de energie care se produc pentru un ciclu complet de magnetizare sînt proporționale cu aria suprafeței de histerezis a materialului (aria haşurată din figura 4-9).

Această energie este furnizată de sursele care alimentează bobinele circuitelor magnetice; puterea p_H corespunzătoare acestei energii depinde de frecvența de lucru f și de inducția maximă B_m.

În practică, pentru unitatea de greutate, pierderile p_H se calculează cu formula empirică:

$$p_H = k_H f B_m^{\alpha}, \tag{4-14}$$

unde k_H este un coeficient de proporționalitate (care depinde de materialul magnetic), iar exponentul α are valorile $1{,}6 \div 2$ (în funcție de B_m).

În toți conductorii masivi, aflați într-un cîmp magnetic variabil în timp, se produc prin fenomenul inducției electromagnetice *curenți turbionari* (denumiți și *curenți Foucault*). Curenții turbionari sînt „pînze de curent" care se închid prin conductorii masivi străbătuți de fluxuri magnetice variabile (așa ca în cazul transformatoarelor electrice, al mașinilor de curent alternativ, al bobinelor din circuitele de curent variabil) sau care se mișcă într-un cîmp magnetic constant (cazul mașinilor de curent continuu). Acești curenți, prin efectul lor termic, produc pierderi de energie, denumite *pierderi prin curenți turbionari* (puterea corespunzătoare se notează cu p_F). Pentru a micșora aceste pierderi, circuitele magnetice care lucrează în cîmpuri variabile sînt confecționate din tole de fier cu siliciu (cu $0{,}4 \div 4{,}4\%$ Si), izolate între ele cu lac, hîrtie sau oxizi. Tolele au grosimi de la $0{,}2 \div 1{,}5$ mm și sînt dispuse în așa fel încît să secționeze cît mai mărunt planul în care apar curenții turbionari (plan perpendicular pe axa fluxurilor fasciculare); în acest fel, rezistența electrică a circuitului curenților turbionari crește, datorită creșterii lungimii parcursului acestor curenți. Adaosul de siliciu duce la creșterea rezistivității materialului magnetic, ceea ce are ca efect încă o micșorare a curenților turbionari, deci a pierderilor p_F. Pierderile p_F fiind determinate de curenții turbionari produși prin inducție electromagnetică depind de viteza de variație a fluxului $\left(\text{de } \frac{d\varphi}{dt}\right)$, deci de frecvența de lucru f și de valoarea maximă a inducției B_m. Practic, ele se calculează pentru unitatea de greutate cu formula $p_F = k_F f B_m^2$, unde k_F este un coeficient de material (depinde de calitatea și grosimea tolelor) și se determină experimental.

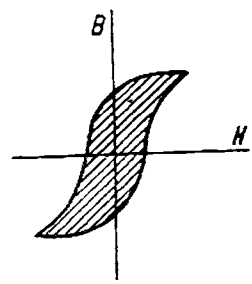


Fig. 4-9

Deci, pierderile în fier sînt determinate de pierderile prin histerezis și prin curenți turbionari:

$$p_{Fe} = p_H + p_F, \tag{4-15}$$

cle depind de f și B_m. Pentru diferitele materiale magnetice, aceste pierderi sînt date în tabele, în W/kg, pentru f și B_m de lucru. Astfel, tolele silicioase, fabricate în R.S. România, au pierderile maxime în fier indicate în tabela 4-4 (la 50 Hz și la B_m din tabela 4-2).

Tolele sînt utilizate pentru executarea circuitelor magnetice în joasă frecvență (pînă la 15 kHz); la frecvențe mai ridicate, circuitele magnetice se confecționează din pulberi magnetice incluse într-o masă izolantă (ferocarturi, ferite etc.).

Tabela 4-4

Calitatea tolei	Grosimea [mm]	Pierderile p_{Fe} [W/kg]
E—I (cu 0.4 la 0,8% Si)	0.5	3,6
	0,75	—
	1	8
	1,5	—
E—II (0,6 la 1,2% Si)	0,5	3
E—III (1,8 la 2,3% Si)	0,5	2,4
E—IV (3,6 la 4,4% Si)	0,35	1,3
	0,5	1,7

4.3. CALCULUL CIRCUITELOR MAGNETICE

Pentru realizarea unei aplicații date, care cere utilizarea unui circuit magnetic, se pleacă de la o anumită structură și formă a circuitului (impusă de specificul aplicației) și de la efectele pe care trebuie să le obținem (forțe, cupluri de forțe, t.e.m. induse în înfășurări, inducții magnetice și/sau fluxuri în diferite porțiuni ale circuitului — toate la o anumită putere) și — prin activitatea de „calcul a circuitului magnetic" — se alege materialul magnetic adecvat și se determină dimensiunile lui geometrice. Problema se poate pune și în alt mod: se dă un anumit circuit magnetic (ca formă și dimensiuni) și se cere să se determine solenații (înfășurări și curenți „de excitație") care, în circuitul dat, să asigure un anumit flux magnetic și/sau inducție magnetică, în diferite porțiuni ale circuitului.

În principiu, problema nu este dificilă; în practică — însă — deoarece se utilizează materialele magnetice neliniare, calculul (dimensionarea) circuitelor magnetice este mai complicat din cauza caracterului neliniar, al histerezisului, al pierderilor în fier etc., precum și al dimensiunilor înfășurărilor ce trebuie plasate pe miezuri, al dispersiilor ș.a.m.d.

În cele ce vor urma vom prezenta numai principiile calculului circuitelor magnetice.

4.3.1. Teoremele circuitelor magnetice

Calculul circuitelor magnetice se face pe baza așa-numitelor teoreme ale lui Kirchhoff care sînt modele formal identice cu teoremele lui Kirchhoff referitoare la circuitele electrice (cunoscute nouă și din capitolul 1).

În cazul (restrîns) al circuitelor magnetice liniare, teoremele lui Kirchhoff se exprimă prin modelele prezentate în continuare.

Teorema întîi a lui Kirchhoff, care se aplică la noduri (fig. 4-10), rezultă din legea fluxului (4-3) — care se referă la faptul că prin orice suprafață închisă fluxul este nul — astfel încît într-un nod, în care converg mai multe laturi ale unui circuit magnetic (v. fig. 4-10), fluxul total este nul. În cazul unor circuite cu flux magnetic fascicular $\varphi_k (k = 1, 2, ..., l)$ și presupuse fără dispersii, teorema întîi a lui Kirchhoff arată că în orice nod suma algebrică a fluxurilor magnetice fasciculare din laturile care converg într-un nod este nulă, adică:

$$\sum_{k=1}^{r} \varphi_k = 0, \qquad r \in N \tag{4-16}$$

semnul fiind pozitiv dacă sensul de referință al fluxului magnetic este spre nod și minus dacă fluxul are sensul dinspre nod.

Pentru aplicarea teoremei (4-16) se fixează în prealabil, arbitrar, sensul de referință al fluxurilor magnetice fasciculare din laturi; de exemplu, pentru cazul din figura 4-10 teorema (4-16) se scrie în forma:

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_5 = 0.$$

Teorema a doua a lui Kirchhoff rezultă din legea circuitului magnetic (4-5) care pentru un contur închis Γ, în regim staționar, se scrie în forma:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum i.$$

Ținînd seama și de legea magnetizației temporare (4-2), din care — în condiții simplificate — rezultă $\bar{H} = \bar{B}/\mu$, și dacă mai presupunem că $\bar{B}$ e constant în toată secțiunea transversală a unei laturi magnetice de arie transversală A, vom avea $\varphi = BA$, adică $B = \varphi/A$, astfel încît: $H = B/\mu = \varphi/\mu A$.

Din cele de mai sus rezultă că de-a lungul unui contur închis de lungime l și de arie transversală uniformă (A) putem scrie:

$$Hl = \frac{\varphi}{\mu A} l = \sum i,$$

sau:

$$\varphi = \frac{\sum i}{\frac{l}{\mu A}}.$$

Expresia $\frac{l}{\mu A}$, care se notează cu R_m se numește *reluctanța laturii magnetice:*

$$R_m \stackrel{D}{=} \frac{l}{\mu A}, \tag{4-17}$$

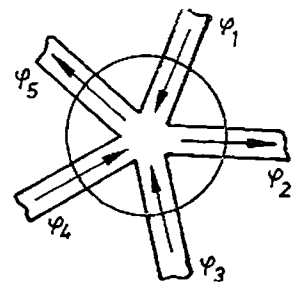


Fig. 4-10

care în SI se măsoară în „unu pe henry" cu simbolul 1/H (sau H^{-1}).

Atunci, expresia fluxului devine:

$$\varphi = \frac{\sum i}{R_m} = \frac{F_m}{R_m}, \tag{4-18}$$

care este o formulă analoagă cu cea care exprimă legea lui Ohm. În (4-18) $F_m \overset{D}{=} \oint_\Gamma \bar{H} \cdot d\bar{l}$ este tensiunea magnetomotoare (t.m.m.).

Ca urmare, scriind legea circuitului magnetic pentru un contur format din k laturi ($k = 1, 2, ..., p$) în care fluxul magnetic fascicular se exprimă prin (4-18) și dacă nu avem flux de dispersii, rezultă teorema a II-a a lui Kirchhoff sub forma:

$$\sum_{j=1}^{q} F_{mj} = \sum_{k=1}^{p} R_{mk}\varphi_k, \qquad q,\ p \in N \tag{4-19}$$

cu sensurile care rezultă din modul de parcurgere al conturului în raport cu sensurile de referință ale t.m.m. $F_m \overset{D}{=} \oint_\Gamma \bar{H} \cdot d\bar{l}$ și $\varphi_k \overset{D}{=} \int_\Sigma \bar{B} \cdot d\bar{A}$.

În unele aplicații este mai comod să se lucreze cu inversul reluctanței, care se notează cu Λ, se numește *permeanță* și se definește prin:

$$\Lambda \overset{[D]}{=} \frac{1}{R_m}, \tag{4-20}$$

unitatea de permeanță în SI fiind henry-ul, cu simbolul H.

Circuitele executate din materiale feromagnetice, care au o largă utilizare în instalațiile electrice și în aparatele electrice și electronice, sînt *circuite magnetice neliniare*, deoarece materialele feromagnetice prezintă fenomene de histerezis și de saturație, ceea ce determină o curbă de magnetizare $B = f(H)$ neliniară (deci permeabilitatea μ nu mai este constantă). Din această cauză, reluctanțele laturilor circuitelor feromagnetice ($R_m = l/\mu A$) nu mai pot fi considerate constante; valoarea lor depinde de valoarea instantanee a fluxului magnetic fascicular φ.

De aceea calculul circuitelor magnetice executate din materiale feromagnetice nu mai poate fi făcut prin aplicarea relațiilor (4-16), ..., (4-19), deoarece în afară de fluxurile $\varphi_k (k = 1, 2, ..., l)$ mai sînt necunoscute și reluctanțele $R_{mk} (k = 1, 2, ..., l)$.

Calculul practic al acestor circuite se face prin utilizarea unor proceduri permise de folosirea tehnicilor de calcul automat sau — în cazuri mai simple — cel mai adesea pe cale grafică uztilizînd expresiile:.

$$\sum_{k=1}^{r} \varphi_k = 0 \text{ scrisă pentru } n-1 \text{ noduri}, \tag{4-21}$$

$$r \in N$$

$$\sum_{k=1}^{p} R_{mk}\varphi_k = \sum_{j=1}^{q} F_{mj} \text{ scrisă pentru } l - n + 1 \text{ ochiuri} \tag{4-22}$$

$$p,\ q \in N$$

şi

$$\varphi_k = f(R_{m_k} \cdot \varphi_k), \qquad (4\text{-}23)$$
$$k = 1, 2, \ldots, l$$

unde funcţia din (4-23) se predetermină pe cale grafică utilizînd curbele de magnetizare $B_k = f(H_k)$ $k = 1, 2, \ldots, l$ ale materialelor din care sînt confecţionate diferitele porţiuni, aşa ca în aplicaţia 2° de mai jos.

4.3.2. Exemple de calcul

Vom considera două exemple mai simple (însă tipice) de circuite magnetice, unul presupus liniar şi celălalt nu, pentru a ilustra — la nivelul unui viitor inginer care nu este de profil electric — cum se „conduce" — în principiu — calculul unui circuit magnetic.

1° Să considerăm circuitul magnetic presupus liniar din figura 4-11, unde dimensiunile sînt date în milimetri. Pe coloanele *1* şi *2*, circuitul magnetic are cîte o bobină cu: $N_1 = 995$ spire şi $N_2 = 418$ spire, fiecare parcursă de către un curent constant: $I_1 = 1$ A şi $I_2 = 2$ A.

Problema cere să se determine fluxurile φ_1, φ_2 şi φ_3 din cele trei coloane ale miezului, în următoarele condiţii simplificatoare: fluxurile de scăpări sînt neglijabile şi miezul circuitului magnetic este confecţionat dintr-un material cu magnetizaţie temporară, care lucrează cu o permeabilitate aproximativ constantă $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ H/m.

Pentru rezolvare, mai întîi calculăm reluctanţele laturilor şi obţinem:

$$A_1 = A_2 = A_3 = 50 \cdot 60 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2;$$

$$l_1 = 0{,}6 \text{ m}; \quad l_2 = 0{,}3 \text{ m}; \; l_3 = 0{,}6 \text{ m};$$

$$R_{m_1} = l_1/\mu_1 A_1 = 0{,}6/5 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^4 \text{ 1/H};$$

$$R_{m_2} = l_2/\mu_2 A_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ 1/H};$$

$$R_{m_3} = R_{m_1} = 4 \cdot 10^4 \text{ 1/H}.$$

şi apoi tensiunile magnetomotoare ale circuitului (datorită solenaţiilor de pe coloanele *1* şi *2*); $F_{m_1} = N_1 I_1 = 995$ A şi $F_{m_2} = N_2 I_2 = 836$ A.

Circuitul magnetic din figura 4-11 are trei laturi şi două noduri. Pentru rezolvarea problemei fixăm, arbitrar, sensul fluxurilor φ_1, φ_2 şi φ_3 din cele trei laturi ale circuitului magnetic (ca în figura 4-12) şi determinăm valoarea

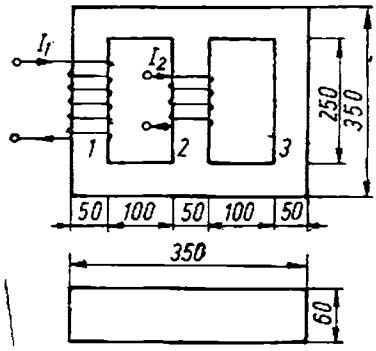


Fig. 4-11

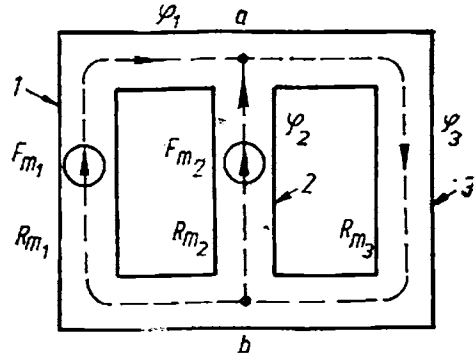


Fig. 4-12

acestor fluxuri rezolvînd sistemul de ecuații pe care-l vom obține aplicînd teoremele lui Kirchhoff (relațiile 4-16 și 4-19). Problema poate fi rezolvată prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, deoarece în condițiile enunțate la nc eput putem considera circuitul magnetic ca fiind liniar (considerăm reluctanțele celor trei laturi R_{m_1}, R_{m_2} și R_{m_3} constante).

Tensiunile magnetomotoare F_{m_1} și F_{m_3} au sensul ca în figura 4-12, determinat cu regula burghiului drept (după sensul curentului asociat sensului de înfășurare al bobinei).

Aplicăm relația (4-16) numai la un nod (căci $n-1=1$ nod), să-l alegem pe a, și relația (4-19) celor două ochiuri fundamentale ($l-n+1=2$) $a\ 2\ b\ 1\ a$ și $a\ 3\ b\ 2\ a$, parcurgîndu-le în sens orar; obținem sistemul:

$$\begin{cases} \varphi_1+\varphi_2-\varphi_3=0 \\ R_{m_1}\varphi_1-R_{m_2}\varphi_2=F_{m_1}-F_{m_2} \text{ adică} \\ R_{m_2}\varphi_2+R_{m_3}\varphi_3=F_{m_3} \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1+\varphi_2-\varphi_3=0 \\ 4\cdot 10^4\,\varphi_1-2\cdot 10^4\,\varphi_2=159 \\ 2\cdot 10^4\,\varphi_2+4\cdot 10^4\,\varphi_3=836 \end{cases}$$

Rezultă:

$$\varphi_1=82{,}06\cdot 10^{-4}\ \text{Wb},$$

$$\varphi_2=84{,}625\cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

și

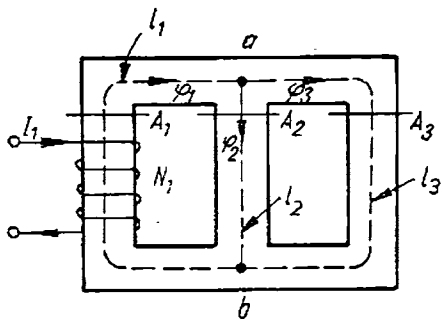
$$\varphi_3=166{,}685\cdot 10^{-4}\ \text{Wb}.$$

Inducția magnetică B, în cele trei coloane, are valorile:

$$B_1=\frac{\varphi_1}{A_1}=\frac{82{,}06}{3\cdot 10^{-3}}\,10^{-4}=2{,}735\ \text{T};$$

$$B_2=\frac{\varphi_2}{A_2}=2{,}82\ \text{T}\ \text{și}\ B_3=\frac{\varphi_3}{A_3}=5{,}555\ \text{T}.$$

2° Să determinăm valoarea fluxurilor φ_1, φ_2, φ_3 și inducțiile B_1, B_2, B_3 din coloanele circuitului magnetic reprezentat în figura 4-13, care este confecționat din tole de oțel laminat la cald (avînd curba de magnetizare dată în figura 4-14).



$N_1 = 600$ spire
$I_1 = 2A$
$A_1 = 3.10^{-3} m^2$
$A_2 = 15.10^{-3} m^2$
$A_3 = 1.10^{-3} m^2$
$l_1 = 0,35\ m$
$l_2 = 0,15\ m$
$l_3 = 0,3\ m$

Fig. 4-13

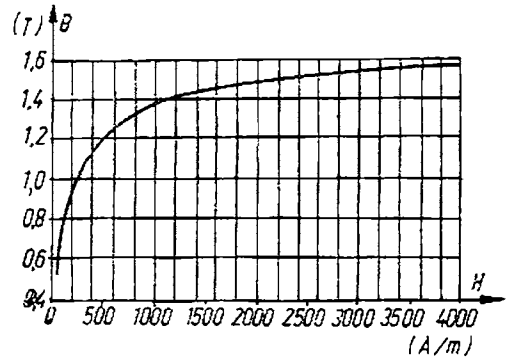


Fig. 4-14

Mai întîi construim caracteristicile $\varphi_i = f(R_{m_i} \cdot \varphi_i)$, $i = 1, 2, 3$ pentru cele trei laturi ale circuitului magnetic. Unul din punctele acestor caracteristici (punctul K de pe orice caracteristică i) are coordonatele: $K(\varphi_{ik}, R_{m_{ik}} \cdot \varphi_{ik})$ care se obțin precum urmează:

$$\varphi_{ik} = A_i \cdot B_{ik},$$

unde A_i este secțiunea (în m²) prin coloana i, iar B_{ik} este inducția corespunzătoare punctului K, de pe curba de magnetizare $B_i = f(H_i)$;

$$R_{m_{ik}} \cdot \varphi_{ik} = H_{ik} \cdot l_i,$$

unde l_i este lungimea (în m) a laturii i, iar H_{ik} este intensitatea cîmpului magnetic în punctul K, de pe curba $B_i = f(H_i)$.

Deci, pentru fiecare latură a circuitului construim o caracteristică $\varphi_i = f(R_{m_i} \cdot \varphi_i)$, înmulțind abscisele curbei $B = f(H)$ din figura 4-14 cu lungimea laturii l_i, iar ordonatele cu aria secțiunii transversale A_i. Obținem astfel caracteristicile din figura 4-15.

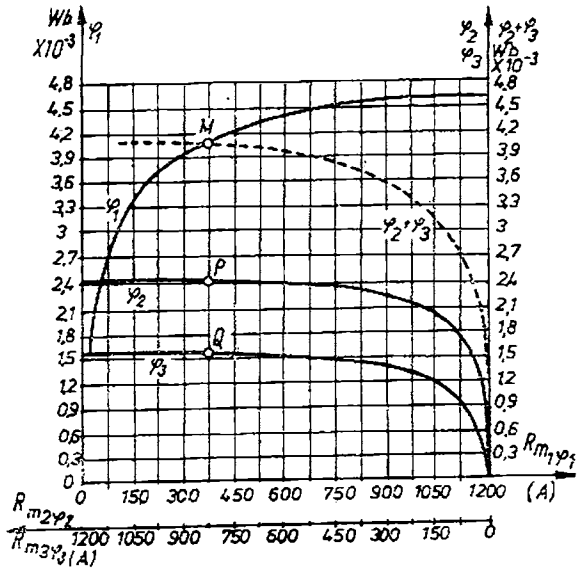


Fig. 4-15

Apoi, aplicăm circuitului din figura 4-13, teoremele lui Kirchhoff;

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = 0 \\ R_{m_2}\varphi_1 + R_{m_2}\varphi_2 = F_{m_1} \\ R_{m_1}\varphi_1 + R_{m_2}\varphi_3 = F_{m_1} \end{cases}$$

unde $F_{m_1} = 600 \cdot 2 = 1200$ A.

Rezultă:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 \\ R_{m_1}\varphi_1 = 1200 - R_{m_2}\varphi_2 \\ R_{m_1}\varphi_1 = 1200 - R_{m_2}\varphi_3 \end{cases}$$

care ne arată că dacă construim caracteristicile $\varphi_2 = f(-R_{m_2} \cdot \varphi_2)$ și $\varphi_3 = f(-R_{m_2} \cdot \varphi_3)$, luînd ca origine punctul de abscisă 1200 A (care este F_{m_1}), precum și caracteristica $\varphi_2 + \varphi_3 = f(R_m \cdot \varphi)$ — curba punctată din figura 4-15 — atunci coordonatele punctului M, din intersecție a curbelor φ_1 cu $\varphi_2 + \varphi_3$ satisfac simultan ultimele trei ecuații de mai sus. Rezultă:

$$\varphi_1 = \varphi_m = \varphi_p + \varphi_q = 4{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ Wb.}$$

$$\varphi_2 = \varphi_p = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

și

$$\varphi_3 = \varphi_q = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb.}$$

Inducția magnetică are valorile: $B_1 = \frac{\varphi_1}{A_1} = 1{,}367$ T,

$$R_2 = \frac{\varphi_2}{A_2} = 1{,}67 \text{ T și } B_3 = \frac{\varphi_3}{A_3} = 1{,}6 \text{ T.}$$

4.4. CÎTEVA APLICAȚII

Încheiem acest succint capitol prin prezentarea a trei aplicații diferite, interesante pentru specialiștii cu profil mecanic (v. punctul 4.4.3), precum și utile pentru mai buna înțelegere a modului de funcționare a transformatoarelor electrice și mașinilor electrice rotative (v. cap. 6).

4.4.1. Forma de undă a curentului de magnetizare la bobinele de inducție

Bobinele cu miez feromagnetic, funcționînd în curent alternativ sinusoidal (monofazat sau trifazat), prezintă un larg și deosebit interes nu numai pentru că aceste bobine sînt des utilizate în sistemele de acționări electrice, la pornirea mașinilor electrice sau în alte montaje unde se cere producerea unor mari „căderi" de tensiune cu pierderi Joule (rezistive, de putere activă) relativ reduse, cît și pentru faptul că fenomenul de magnetizare a transformatoarelor

electrice și mașinilor electrice de curent alternativ — al căror circuit magnetic este realizat tot din materiale feromagnetice — este similar.

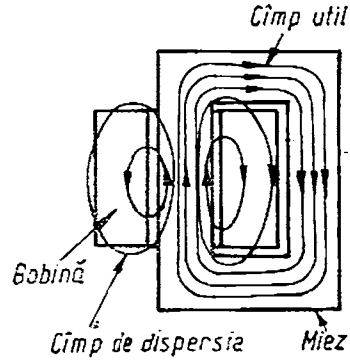


Fig. 4-16

În principiu, o bobină monofazată este formată dintr-un miez (feromagnetic) și o înfășurare sau bobină (fig. 4-16). În cazul bobinelor „de forță" (pentru curenți „tari", din aplicațiile industriale), miezul este realizat din tole de oțel electrotehnic cu o grosime de 0,35 mm, tole izolate între ele cu un strat de lac. Înfășurarea propriu-zisă constă din una sau două bobine cu spire circulare realizate din conducte de aluminiu sau cupru izolate (de obicei, bobina are formă de cilindru gol și se plasează pe o coloană a miezului, de care se izolează prin zone de aer sau straturi izolatoare din diferite materiale).

Să presupunem că bobina este alimentată de la o sursă de curent altrenativ cu tensiunea la borne u „pur" sinusoidală, de amplitudine $U_{max} = U\sqrt{2}$ și o pulsație ω. Atunci, în bobină se va stabili un curent i, același prin toate cele N spire (deoarece sînt în serie) și va produce un cîmp magnetic. Spectrul aproximativ al acestui cîmp (ne referim la cîmpul inducției magnetice B) este redat tot în figura 4-16. Numim acest curent i — *curent de magnetizare.*

Considerînd un contur închis Γ (care străbate cele N spire ale bobinei în sensul pozitiv al curentului de magnetizare i) și notînd cu $\Phi_{A\Gamma}$ fluxul magnetic total (care se înlănțuie cu spirele bobinei și care corespunde unei suprafețe A ce se „sprijină" pe conturul Γ), atunci — aplicînd legea inducției electromegnetice (4-4 *a*) — rezultă că în bobină se induce o t.e.m. $e_\Gamma = -\mathrm{d}\Phi_{A\Gamma}/\mathrm{d}t$.

Bobina fiind considerată receptor, atunci (conform legii lui Ohm) putem scrie $u = Ri - e_\Gamma$, adică $u = Ri + \mathrm{d}\Phi_{A\Gamma}/\mathrm{d}t$, unde R este rezistența echivalentă a bobinei (ohmică și corespunzătoare pierderilor de putere activă).

După cum știm, fluxul total $\Phi_{A\Gamma}$ are două componente (ușor de evidențiat dacă ne referim la spectrul aproximativ din figura 4-16): fluxul total util Φ_u (corespunzător liniilor de cîmp B situate în întregime în fier și care străbat, sau „înlănțuie" toate cele N spire ale bobinei) și fluxul de dispersie sau de scăpări Φ_s (corespunzător liniilor de cîmp care închizîndu-se parțial și prin aer nu pot înlănțui decît o fracțiune din numărul N de spire al bobinei). Evident: $\Phi_{A\Gamma} = \Phi_u + \Phi_s$, în care Φ_u este mult mai mare decît Φ_s deoarece miezul feromagnetic are o permeabilitate foarte mare în comparație cu aerul.

Dacă analizăm reluctanța totală a unui tub de flux unitate oarecare al cîmpului de dispersie vom observa că ea este suma reluctanței porțiunii de aer a tubului de flux și reluctanței porțiunii de miez feromagnetic. Reluctanța porțiunii de aer este constantă (indiferent de intensitatea cîmpului magnetic), iar reluctanța porțiunii cuprinse în miezul magnetic este variabilă (în funcție de saturația miezului), însă — chiar în situația unei saturații relativ pronunțate a miezului magnetic — reluctanța porțiunii din miez reprezintă o fracțiune mică (mîimi la cel mult cîteva sutimi) din reluctanța din aer a tubului de flux unitate considerat. Ca urmare, practic, reluctanța totală a tubului de flux unitar de dispersie se reduce (cu o eroare neînsemnată) la reluctanța porțiunii sale din aer, care — repetăm — nu este afectată de starea de saturație a miezului feromagnetic. Deci, fluxul total de dispersie Φ_s depinde numai de curentul i din bobină, fiind proporțional cu acesta și independent de satu-

rația miezului, ceea ce ne permite să definim o inductivitate L_s (zisă de dispersie sau de scăpări) a înfășurării conform relației de definiție (1-7), adică $\Phi_s = L_s i$.

Fluxul util total, Φ_u, înlănțuindu-se cu toate cele N spire ale înfășurării, se poate exprima în funcție de fluxul fascicular φ_μ (indicele μ este folosit ca să se precizeze că este vorba de fluxul care străbate întregul circuit magnetic care — la un moment dat — are permeabilitatea μ) și anume $\Phi_u = N\varphi_\mu$.

Prin urmare vom putea scrie:

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_u + \Phi_s = N\varphi_\mu + L_s i,$$

$$u = Ri + \mathrm{d}\Phi_{\Sigma}/\mathrm{d}t = Ri + N\frac{\mathrm{d}\varphi_\mu}{\mathrm{d}t} + L_s\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \qquad (4\text{-}24)$$

unde termenul $-N\cdot \mathrm{d}\varphi_\mu/\mathrm{d}t = e_\mu$ este denumit t.e.m. utilă (care este „afectată" de starea de saturație a circuitului feromagnetic), iar $L_s\cdot\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u_s$ este tensiunea la bornele unei bobine fictive cu o inductivitate L_s ce ține seama de procesul de dispersie a fluxului magnetic.

Se ajunge astfel la schema electrică din figura 4-17, *b* în care impedanța Z_μ, la bornele căreia t.e.m. are valoarea $-e_\mu$, este neliniară, adică depinde de valoarea curentului i, deci de starea de saturație a miezului magnetic (în figura 4-17, *a* este reprezentat circuitul electric al bobinei, în forma lui inițială).

Din relația (4-24) deducem următoarele concluzii importante. În mod normal, valoarea efectivă a căderii ohmice de tensiune Ri este foarte mică în comparație cu valoarea efectivă a tensiunii la borne u, iar t.e.m. efectivă datorită dispersiilor ($L_s\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = u_s$) este redusă ca valoare în raport cu t.e.m. efectivă utilă e_μ și atunci se poate scrie cu o bună aproximație $u \approx -e_\mu$. Deci, dacă tensiunea u la bornele bobinei este sinusoidală, t.e.m. utilă e_μ este și ea tot sinusoidală și aproximativ în opoziție de fază cu tensiunea u, valorile eficace U și E_μ fiind practic egale. Rezultă atunci, deoarece $e_\mu = -N\mathrm{d}\varphi_\mu/\mathrm{d}t$, că și fluxul fascicular util φ_μ este practic tot sinusoidal ($\varphi_\mu = -\frac{1}{N}\int e_\mu\,\mathrm{d}t$, operatorul integrală fiind liniar). Deoarece t.e.m. utilă e_μ este sinusoidală, deci de forma $e_\mu = E_\mu\cdot\sqrt{2}\sin\omega t$, rezultă că:

$$\varphi_\mu = -\frac{1}{N}\int E_\mu\sqrt{2}\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{E_\mu\sqrt{2}}{N\omega}\cos\omega t, \qquad (4\text{-}25)$$

constanta de integrare fiind nulă (fluxul nu are componentă continuă).

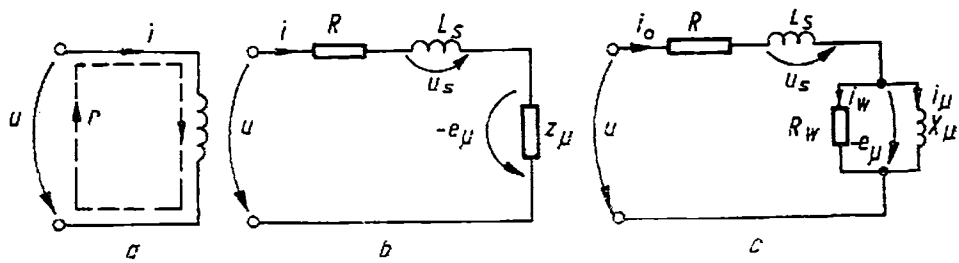


Fig. 4-17

Deducem că valoarea maximă a fluxului util fascicular este:

$$\varphi_{\mu_{max}} = \frac{E_\mu}{N\omega}\sqrt{2} \approx U\frac{\sqrt{2}}{N\omega},$$

această valoare fiind impusă practic, pentru o bobină dată (construită fizic), de amplitudinea $U\sqrt{2}$ a tensiunii sursei de alimentare în c.a. și de frecvența (pulsația) ei ω. Din (4-25) rezultă că fluxul fascicular util φ_μ este decalat înaintea t.e.m. utile e_μ cu un sfert de perioadă (90°).

Ajungem, acum, la problema pusă prin titlu: fluxul util fascicular fiind impus ca amplitudine și formă de tensiunea sursei de alimentare a bobinei, cum variază atunci curentul i din bobină necesar pentru producerea acestui flux magnetic? Deci ce formă de undă are curentul de magnetizare al unei bobine cu miez feromagnetic?

Pentru a răspunde la această întrebare va trebui să ținem seama de două fenomene specifice circuitelor feromagnetice și anume: curenții turbionari ce se induc în tolele circuitului magnetic de către fluxul fascicular util (variabil în timp sinusoidal) și forma curbei de magnetizare a materialului feromagnetic (cu saturație și histerezis).

Curenții turbionari sînt și ei variabili în timp (alternativi, practic sinusoidal) și produc pierderi de putere activă prin efect Joule. Reacția lor asupra curentului i din bobină este neînsemnată deoarece tolele au o rezistență (electrică) echivalentă deosebit de mare pentru curenții turbionari. Ca urmare, ei nu pot deforma curentul i de magnetizare, însă introduc un defazaj al acestuia în raport cu t.e.m. utilă e_μ, impus de pierderile de putere activă. Deci, curentul i nu este în fază cu fluxul util fascicular φ_μ și — ca urmare — nici defazat cu 90° față de t.e.m. e_μ, ci are un foarte mic unghi de avans față de φ_μ (unghi notat cu α, numit și *unghi de pierderi*, care este mic deoarece și pierderile în fier sînt relativ mici).

Pe de altă parte, fenomenele de histerezis și saturație (caracteristice materialului feromagnetic) produc atît o pierdere suplimentară de putere activă (pierderile prin histerezis) cît și o deformare a curentului de magnetizare i, făcîndu-l nesinusoidal. În figura 4-18 sînt prezentare trei diagrame (fig. 4-18, *a*: forma de undă a fluxului fascicular util $\varphi_\mu = f(t)$; fig. 4-18, *b*: ciclul de histerezis $\varphi_\mu = f(i)$ și în fig. 4-18, *c*: forma de undă a curentului de magnetizare $i = f(t)$, așa cum rezultă dintr-un flux sinusoidal printr-un material cu ciclu de histerezis și saturație), care explică sugestiv modul cum se ajunge la deformarea curentului de magnetizare i (printr-o construcție punct cu punct, figurată cu linie întreruptă).

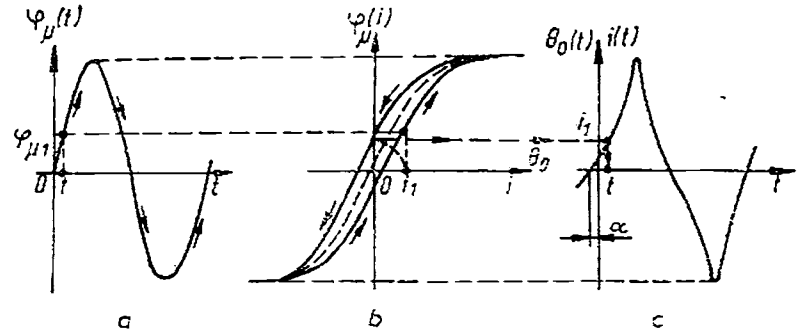


Fig. 4-18

Rezultă că în cazul unui flux sinusoidal, curentul i de magnetizare este deformat (prezintă un vîrf specific, ce indică existența unor armonice de ordinul 3 și 5 în fază cu fundamentala), fiind în avans cu un unghi α față de fluxul util fascicular φ_μ, unghi corespunzător pierderilor de putere activă din miezul feromagnetic.

În concluzie, datorită efectului combinat al curenților turbionari și al histerezisului, curentul de magnetizare i (din înfășurarea de excitație a circuitelor feromagnetice) este deformat și defazat înainte (cu un unghi α) față de fluxul fascicular util φ_μ din miez (care este practic sinusoidal dacă sursa de energie electrică ce alimentează bobina este de tip sinusoidal). De aceea, bobinele de inducție (și similarele, ca — de pildă — transformatoarele electrice funcționînd în gol), sînt de fapt componente neliniare de circuit electric (cu parametrii R și L ce depind de valoarea eficace a curentului i, deci nu sînt constanți). Practic, însă, considerînd U și f constante, deci o stare maximă de saturație dată, se neglijează de cele mai multe ori armonicile superioare ale curentului de magnetizare i și se lucrează cu un curent echivalent sinusoidal, pe care îl notăm cu i_0, cu valoarea eficace I_0 și avînd un defazaj α înainte față de fluxul φ_μ. În acest fel se realizează o „liniarizare" a bobinei, care poate fi caracterizată (din punctul de vedere al fenomenelor legate de magnetizarea miezului feromagnetic) printr-o impedanță Z_μ (v. fig. 4-17, *b*) constantă de această dată.

Valoarea eficace I_0 și „avansul" α, ale curentului de magnetizare aproximat ca sinusoidal i_0, se determină pe baza efectelor energetice. Astfel, puterea activă disipată prin impedanța Z_μ (la bornele căreia tensiunea este $-e_\mu$) va fi egală cu pierderile globale (totale) în fier ($p_{Fe} = p_F + p_H$) care se pot calcula pentru un circuit magnetic dat. Dacă se cunoaște tensiunea efectivă U și frecvența f (ale sursei), din relația (4-25) rezultă fluxul util fascicular maxim, cu ajutorul căruia se vor calcula inducțiile maxime în diferitele porțiuni ale miezului (cunoscînd ariile secțiunilor transversale și aplicînd legea fluxului magnetic). Constructorul indică pierderile specifice (pe unitatea de masă) în fier, în funcție de inducțiile maxime pentru diferitele tipuri de materiale feromagnetice (v. tabela 4-4). Atunci:

$$E_\mu I_0 \cos \alpha = p_{Fe}. \tag{4-26}$$

Pentru magnetizarea miezului la fluxul util este necesară și o putere reactivă Q_μ, care (în funcție de puterea specifică de magnetizare, în var/kg, indicată de constructor) conduce la relația:

$$E_\mu \cdot I_0 \sin \alpha = Q_\mu. \tag{4-27}$$

Egalitățile (4-26) și (4-27) sînt suficiente pentru a determina pe I_0 și α (cunoscînd p_{Fe} și Q_μ — indicate de fabricant).

În sfîrșit, în legătură cu schema echivalentă din figura 4-17, *b*, trebuie să remarcăm faptul că este mai comod ca în loc de Z_μ să se lucreze cu componentele R_w și X_μ definite astfel: rezistența R_w și curentul aferent $I_w = I_0 \cos \alpha$, avînd la borne tensiunea $-E_\mu$, produc prin efect Joule o pierdere de putere activă egală cu pierderile în fier:

$$E_\mu^2 / R_w = R_w I_w^2 = p_{Fe}; \tag{4-28}$$

reactanța X_μ și curentul aferent $I_\mu = I_0 \sin \alpha$, avînd la borne tot tensiunea $-E_\mu$, necesită o putere reactivă:

$$E_\mu^2 / X_\mu = X_\mu I_\mu^2 = Q_\mu. \tag{4-29}$$

Cu acești parametri, determinați prin formulele (4-28) și (4-29), se poate întocmi o nouă schemă echivalentă a bobinei de inducție, așa ca în figura 4-17, *c*. Pentru această schemă, folosind reprezentarea în complex, rezultă ecuațiile:

$$\begin{cases} \underline{U} = (R + j\omega L_s)\,\underline{I}_0 - \underline{E}_\mu, \\ \omega L_s = X_s, \\ -\underline{E}_\mu = R_w \underline{I}_w = jX_\mu \underline{I}_\mu \\ \underline{I}_0 = \underline{I}_w + \underline{I}_\mu, \end{cases} \tag{4-30}$$

cărora le corespunde diagrama fazorială din figura 4-19, diagramă pe care o vom regăsi și la studiul principiului de funcționare a transformatoarelor electrice (v. cap. 6).

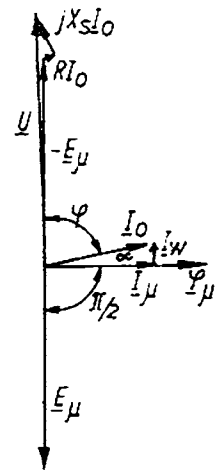


Fig. 4-19

4.4.2. Cîmpul magnetic în întrefierul mașinilor electrice rotative

Pentru studiul funcționării mașinilor electrice, o deosebită importanță prezintă repartiția cîmpului magnetic în lungul întrefierului mașinii, în zona în care sînt fixate conductoarele bobinajului indus. De asemenea, trebuie cunoscut și modul de variație în timp a inducției magnetice din întrefier, în timpul mișcării de rotație a rotorului. La majoritatea mașinilor electrice rotative, cîmpul magnetic este radial cu o repartiție aproximativ sinusoidală în lungul întrefierului, constant în timp (la mașinile de curent continuu) sau învîrtitor (la mașinile asincrone și sincrone).

Cîmpul magnetic radial cu repartiție sinusoidală

Deoarece permeabilitatea miezului magnetic este foarte mare în raport cu permeabilitatea aerului din întrefier, cîmpul magnetostatic într-un întrefier constant are liniile de cîmp normale pe suprafața armăturilor feromagnetice care-l delimitează. Într-adevăr, în acest caz inducția în miezul magnetic este $\bar{B} = \mu \bar{H}$ și deoarece B are o valoare determinată, iar μ are o valoare foarte mare în fier, rezultă că H (cîmpul magnetic în miezul feromagnetic) este neglijabil. Prin urmare, putem considera că potențialul electromagnetic (v. „Fizica") este aproximativ constant în toate regiunile cu fier ale mașinii, care deci sînt corpurile cu volum și suprafețe echipotențiale. Din această cauză, liniile cîmpului magnetic în întrefier sînt normale pe suprafețele pieselor magnetice echipotențiale ce îl delimitează, adică sînt pe direcția razei mașinii, care are corpul de formă cilindrică. De aceea, în întrefierul mașinilor electrice cîmpul este radial.

Cîmpul magnetic al mașinilor electrice poate fi bipolar (inductorul are doi poli, nord și sud, așa ca în figura 4-20) sau cu mai multe perechi de poli. În cele ce vor urma vom nota numărul de perechi de poli cu p (deci o mașină electrică are un număr de $2p$ poli, unde $p = 1, 2, 3 \ldots$).

În ceea ce privește repartiția cîmpului magnetic în lungul întrefierului, adică funcția $B(x)$, unde B este modulul inducției magnetice în întrefier, iar x reprezintă distanțele în lungul circumferinței (față de un anumit punct luat ca origine), este evident că B este o funcție periodică de x, numărul de

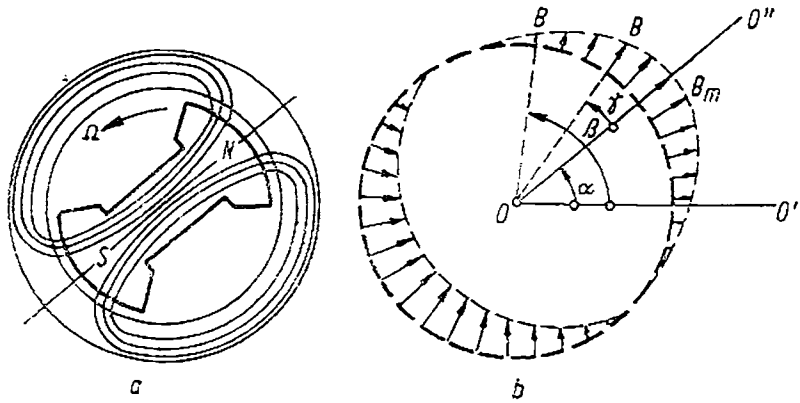


Fig. 4-20

perioade fiind egal cu numărul de perechi de poli p ai maşinii. Dacă nu ţinem cont de reacţia indusului (deci la mersul în gol), B are valorile maxime în dreptul axei polilor (axa $S—N$ în figura 4-20), sensul alternînd de la un pol la altul şi trecînd prin zero în dreptul aşa-numitei axe neutre (în acest caz normală pe axa polilor).

Cazul cel mai favorabil pentru funcţionarea maşinilor electrice este cazul în care repartiţia lui B de-a lungul întrefierului este sinusoidală. În figura 4-20 este reprezentată această repartiţie sinusoidală la o maşină cu doi poli. În figura 4-20, *a* este schiţa unei maşini cu poli aparenţi, rotorul fiind format dintr-un electromagnet magnetizat constant şi care se roteşte cu viteza unghiulară Ω în raport cu statorul. În figura 4-20, *b* este desenat punctat periferia întrefierului şi repartiţia vectorului B de-a lungul acestui întrefier; prin rotirea rotorului, acest desen se va roti şi el, solidar cu rotorul şi cu aceeaşi viteză unghiulară Ω. Pentru un număr p de perechi de poli, repartiţia sinusoidală de-a lungul întrefierului, pentru o circumferinţă întreagă va avea p perioade.

Dacă α este unghiul dintre axa polului nord al rotorului şi originea timpului OO', la maşinile în regim de lucru permanent (cu viteza Ω constantă) vom avea: $\alpha = \Omega t$.

În ceea ce priveşte sistemul de referinţă, în studiul maşinilor electrice vom utiliza două sisteme şi anume:

1° sistemul de referinţă solidar cu statorul, cu originea în O (pe axa maşinii) şi cu axa absciselor pe direcţia OO' (fig. 4-20, *b*);

2° sistemul de referinţă solidar cu axa polului magnetic nord-sud al cîmpului magnetic învîrtitor, cu originea tot în O, dar cu axa absciselor pe direcţia axei polului magnetic OO''.

În sistemul OO'', repartiţia inducţiei magnetice de-a lungul întrefierului a fi:

$$B = B_m \cos \gamma, \text{ pentru } p = 1 \text{ şi}$$

$$B = B_m \cos p\gamma, \text{ pentru } p \neq 1. \qquad (4\text{-}31)$$

unde B este modulul (pe direcţia radială) a vectorului inducţiei magnetice în punctul de pe circumferinţă, în întrefier, situat la γ radiani de axa OO''; B_m — valoarea maximă a acestui modul (are loc pentru $\gamma = 0$, adică pe axa polilor). După cum vedem, în sistemul OO'' repartiţia inducţiei magnetice de-a lungul întrefierului este independentă de timp.

În sistemul OO', repartiția inducției magnetice de-a lungul întrefierului depinde de timp; astfel într-un punct de pe circumferință situat la β radiani de axa OO', la un moment dat t (moment în care axa OO'' a descris, cu viteza unghiulară Ω, unghiul α față de axa OO'), inducția magnetică este:

$$B = B_m \cos p\,(\beta - \alpha) = B_m \cos p\,(\beta - \Omega t).$$

Vedem că în sistemul OO', cîmpul de inducție magnetică B este un cîmp învîrtitor, datorit rotației rotorului (astfel inducția maximă B_m, care are loc în dreptul polilor, în sistemul OO' se rotește cu viteza Ω a rotorului).

Se poate demonstra că un cîmp magnetic învîrtitor poate fi realizat și cu un sistem polifazat de bobine, avînd m bobine (faze) identice plasate fix pe stator cu un decalaj de $\frac{2\pi}{m}$ între axele bobinelor și care sînt parcurse de m curenți electrici sinusoidali simetrici $\left(\text{cu aceeași amplitudine și defazați cu } \frac{T}{m}\right)$. În cele ce vor urma, vom considera un sistem trifazat ($m = 3$).

Cîmpul magnetic învîrtitor

Am arătat că, în sistemul OO'', inducția magnetică într-un punct oarecare din întrefier are modulul dat de relația (4-31), adică $B = B_m \cos p\gamma$. Dacă bobinajul de excitație al rotorului este parcurs de un curent continuu, atunci B_m este constant; dacă bobinajul de excitație al polilor inductori este parcurs de un curent sinusoidal, cu pulsația ω, atunci B_m variază în timp cu aceeași pulsație, adică $B_m = B_m \cdot \sin \omega t$ și deci expresia care dă repartiția inducției magnetice în întrefier în sistemul OO'' este:

$$B = B_m \sin \omega t \cdot \cos p\gamma. \tag{4-32}$$

Dacă pe un stator (sau pe un rotor calat, cu $\Omega = 0$) fixăm trei bobine identice, fiecare cu același număr de spire și cu același număr $2p$ de poli, dar decalate cu 120° între axele polilor și excităm aceste bobine cu trei curenți sinusoidali simetrici de pulsație ω $\left(\text{frecvență } f = \frac{\omega}{2\pi}\right)$, care deci au aceeași amplitudine și sînt defazați în timp cu $\frac{1}{3}$ din perioada $T = \frac{1}{f}$, atunci fiecare din cele trei bobine parcurse de curenți sinusoidali va determina în întrefier cîte un cîmp magnetic cu inducția dată de relația (4-32), adică:

$$\begin{cases} B_1 = B_m \sin \omega t \cdot \cos p\gamma, \\ B_2 = B_m \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \cdot \cos\left(p\gamma - \frac{2}{3}\pi\right), \\ B_3 = B_m \sin\left(\omega t - \frac{4}{3\pi}\right) \cdot \cos\left(p\gamma - \frac{4}{3}\pi\right) \cdot \end{cases}$$

Cîmpul rezultant va fi:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = B_m [\sin \omega t \cdot \cos p\gamma + \sin (\omega t - 120°) \cdot$$
$$\cdot \cos (p\gamma - 120°) + \sin (\omega t + 120°) \cdot \cos (p\gamma + 120°)] =$$
$$= \frac{3}{2} B_m (\sin \omega t \cdot \cos p\gamma - \cos \omega t \cdot \sin p\gamma),$$

adică:

$$B = \frac{3}{2} B_m \sin (\omega t - p\gamma). \qquad (4\text{-}33)$$

Deci, în întrefier rezultă o inducție magnetică avînd amplitudinea $\frac{3}{2}$ din amplitudinea inducției determinate de solenația unei faze și care se rotește în sensul de succesiune a fazelor cu viteza unghiulară $\Omega = \frac{\omega}{p}$. Aceasta rezultă din relația lui B de mai sus, căutînd să vedem cu ce viteză unghiulară $\frac{d\gamma}{dt} = \Omega$ trebuie să se rotească punctul din întrefier considerat (aflat la γ radiani de origine), pentru ca (în dreptul lui) B să fie mereu maxim, adică $\frac{3}{2} B_m$, ceea ce implică $\sin (\omega t - p\gamma) = 1$, deci $\omega t - p\gamma = \frac{\pi}{2}$; de aici $\gamma = \frac{\omega}{p} \cdot t - \frac{\pi}{2p}$ și $\Omega = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\omega}{p}$. Deoarece $\omega = 2\pi f$, iar viteza de rotație (în rot/s) este $n = \Omega/2\pi$, rezultă că viteza de rotație a cîmpului magnetic învîrtitor este $n = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{2\pi f}{p \cdot 2\pi} = \frac{f}{p} \left\langle \frac{\text{rot}}{\text{s}} \right\rangle$, iar în rot/min, așa cum se măsoară în practică:

$$n = \frac{60 f}{p}, \qquad (4\text{-}34)$$

unde f este frecvența curenților din bobinajul de excitație (în Hz), iar p numărul de perechi de poli ai bobinajului. Viteza cîmpului magnetic învîrtitor, dată de relația (4-34), se numește *viteza de sincronism*. La frecvența industrială de 50 Hz, viteza de sincronism poate fi 3 000 rot/min (pentru $p = 1$), 1 500 rot/min (pentru $p = 2$), 1 000 rot/min ($p = 3$) etc.

Cîmpul magnetic învîrtitor în mașinile monofazate

Mașinile monofazate de curent alternativ au bobinajul de excitație format dintr-o singură înfășurare (bobinaj monofazat), cu 2 p poli. Dacă această înfășurare este parcursă de un curent sinusoidal cu pulsația ω, atunci în mașină se produce un cîmp magnetic, inducția în întrefier fiind dată de relația (4-32): $B = B_m \sin \omega t \cdot \cos p\gamma$. Inducția este maximă pe axa polilor ($\gamma = 0$) și la momentele $t = (2k - 1)\frac{T}{4}$, k = 1, 2, 3, ... S-a produs deci un *cîmp pulsator fix*. Expresia acestui cîmp poate fi pusă însă sub forma:

$$B = B_m \sin \omega t \cdot \cos p\gamma = \frac{1}{2} B_m \sin (\omega t - p\gamma) + \frac{1}{2} B_m \sin (\omega t + p\gamma), \quad (4\text{-}35)$$

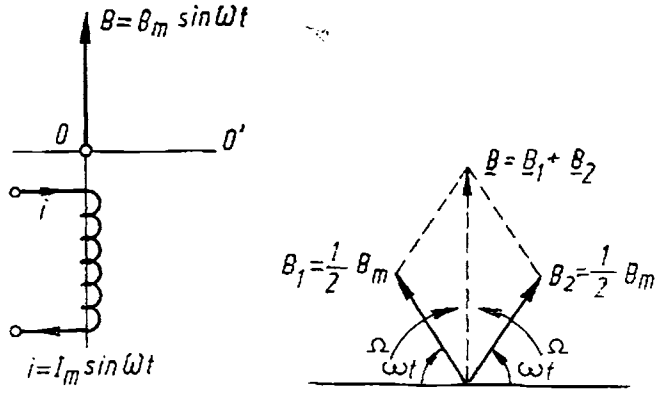


Fig. 4-21

care se scrie pe baza relațiilor dintre funcțiile trigonometrice. Rezultă că un cîmp de inducție magnetică pulsatoriu fix, de amplitudine B_m, poate fi considerat ca rezultanta a două cîmpuri magnetice învîrtitoare, fiecare cu amplitudinea $\frac{1}{2} B_m$, care se rotesc cu aceeași viteză $\left(\Omega = \frac{\omega}{p} \text{ sau } n = \frac{60f}{p}\right)$, însă în sensuri contrare. Acest lucru este reprezentat intuitiv în figura 4-21, pentru un bobinaj monofazat cu $p = 1$, inducția magnetică fiind reprezentată prin fazorul ei.

4.4.3. Încălzirea prin inducție

Încălzirea prin inducție (în joasă și înaltă frecvență) este o tehnică des utilizată în tehnologia fabricației din numeroase domenii industriale. Astfel, în metalurgie și construcția de utilaj tehnologic, așa-numita încălzire prin inducție este întîlnită la cuptorul de înaltă frecvență pentru topirea metalelor, la călirea superficială și la încălzirea în toată masa pentru forjare sau matrițare la cald.

Dintre acestea, ne vom referi la călirea superficială prin curenți de înaltă frecvență (denumită, prin inițialele subliniate, „cif", pe care o vom analiza (principial) ca pe o aplicație a circuitelor magnetice și aceasta deoarece piesa care trebuie călită (de natură feromagnetică) poate fi considerată ca fiind miezul unui circuit magnetic pe care este plasată o înfășurare de magnetizare ce produce cîmpul magnetic de înaltă frecvență care va induce în piesă curenții turbionari cu repartiția peliculară (aceștia, prin efectul lor termic — Joule, produc încălzirea superficială necesară procesului de călire).

Concentrarea la suprafață, pe o peliculă relativ subțire, a curenților induși și a fluxului magnetic din piesă, constituie fenomenul de bază al încălzirii prin inducție și se datorește *efectului pelicular* („skin") cunoscut de la „Fizică".

Pentru a prezenta principiile de bază ale acestui efect, vom considera aici cazul cel mai simplu și anume acela al încălzirii unei piese cilindrice realizată dintr-un material conductor (cu rezistivitatea ρ sau conductivitatea γ). Pentru producerea cîmpului magnetic inductor, piesa se introduce într-o bobină (înfășurare) cilindrică. Presupunem cazul ideal în care atît piesa cît și înfășurarea sînt cu lungimea l foarte mare în raport cu diametrul lor $2a$

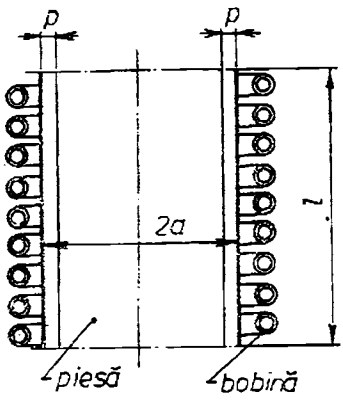


Fig. 4-22

(fig. 4-22). Cîmpul magnetic produs de înfășurare (atunci cînd este alimentată de o sursă electrică de c.a.) într-un astfel de caz poate fi considerat ca uniform în interior și paralel cu axa bobinei, iar în exteriorul ei este nul.

Dacă I_1 este valoarea efectivă a curentului din înfășurare și n numărul de spire pe unitatea de lungime, valoarea efectivă a intensității cîmpului magnetic (pe care să o notăm cu H_0) este:

$$H_0 = nI_1, \qquad (4\text{-}36)$$

ceea ce rezultă din legea circuitului magnetic (4-5 *a*) aplicată în cazul particular arătat mai sus (cîmp uniform în interior și nul în exterior, adică $H_0 l = n \cdot lI_1 \therefore H_0 = nI_1$).

La frecvență zero sau la frecvențe mici (de exemplu chiar la 50 Hz) acest cîmp „pătrunde" în toată secțiunea piesei, producînd o inducție magnetică axială $\mathcal{B}_1 = \mu \bar{H}_0$, unde μ este permeabilitatea absolută a materialului piesei.

Dacă înfășurarea este alimentată în curent alternativ, cu pulsația ω, apar curenți induși în piesă (turbionari) al căror sens este astfel încît fluxul magnetic datorit acestor curenți să se „opună" (ca flux de reacție) fluxului magnetic inductor al lui $\bar{B}_1$ (fig. 4-23). În figura 4-23, *a* și *b* este arătat sensul acestor curenți (prin vectorii densității de curent $\bar{J}_2$) și inducția magnetică $\bar{B}_2$ produsă de acești curenți, în ipoteza că fluxul inductor este crescător. Vedem în figura 4-23, *a* că în partea centrală a piesei, cîmpul inducției magnetice $\bar{B}_2$ *indus* este de sens contrar cîmpului $\bar{B}_1$ *inductor*, pe cînd la suprafața piesei are același sens. Vectorii $\bar{J}_2$ coincid în direcție și sens cu cîmpul electric de inducție care i-a produs (este vorba de cîmpul electric solenoidal din legea inducției electromagnetice scrisă în forma 4-4 *a'*).

„Concentrarea" la suprafață a inducției magnetice rezultantă (și deci și a fluxului ei) din piesă se poate explica, în mod sugestiv, dacă considerăm un element cilindric din piesă, așa ca în figura 4-24 (*a* — în secțiune longitudinală, *b* — în secțiune transversală). Un astfel de element, lung ca și piesa din care face parte, parcurs de curenții induși (cu valoarea efectivă I_2) va da naștere unui cîmp și unui flux magnetic numai în interior (inducția magnetică $\bar{B}_2$) care sînt de sens contrar cîmpului ($\bar{B}_1$) și fluxului magnetic inductor, iar în exterior efectul lui va fi nul. În interior, efectul de slăbire a cîmpului magnetic rezultant este cu atît mai pronunțat cu cît frecvența este mai mare. Adunînd efectele tuturor elementelor cilindrice care compun piesa (ca niște „folii" coaxiale), constatăm că în centrul piesei cîmpul rezultant are valoarea

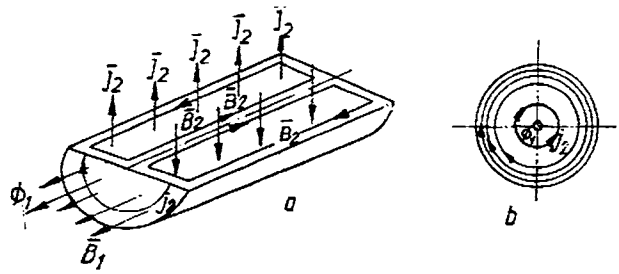


Fig. 4-23

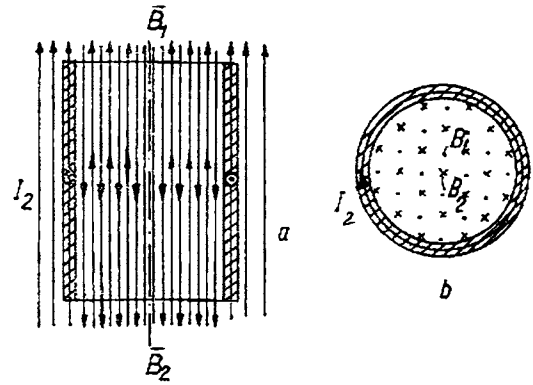


Fig. 4-24

cea mai mică iar spre exteriorul secțiunii valoarea sa va crește treptat pînă ce la suprafață regăsim cîmpul de intensitate efectivă H_0 dat de curentul efectiv I_1 din bobina inductoare (cîmp care ar fi fost uniform în tot interiorul bobinei dacă nu ar fi existat curenții induși din piesă, cu densitatea J_2).

La frecvențe înalte, cîmpul se anulează pe o porțiune din ce în ce mai mare a secțiunii și nu mai rămîne decît o peliculă superficială, de grosime p, în interiorul căreia cîmpul variază de la valoarea maximă H_0 (pe suprafața exterioară) la zero (pe fața interioară a peliculei). Dacă admitem în mod aproximativ o variație liniară a cîmpului în interiorul peliculei, de la zero la H_0, atunci valoarea efectivă medie a cîmpului se poate lua $\frac{H_0 + 0}{2} = \frac{1}{2} H_0$.

Putem spune, deci, că la frecvențe înalte cîmpul „pătrunde" în metal numai la o „adîncime" p (în restul secțiunii, cîmpul magnetic fiind nul în orice punct, nu avem cîmp electric solenoidal și nici curenți induși).

Pentru frecvențe foarte înalte, la care grosimea peliculei este foarte mică în raport cu raza a (v. fig. 4-22) a secțiunii, se poate evalua relativ ușor valoarea lui p. Pentru aceasta să considerăm o lungime din piesă egală cu unitatea, care are secțiunea „pătrunsă" de flux cu aria $2\pi ap$ (a fiind raza secțiunii transversale — v. fig. 4-22), adică secțiunea transversală inclară haşurată în figura 4-24, *b*. Atunci, fluxul magnetic total efectiv din piesă, referitor la inducția medie $\mu \frac{1}{2} H_0$, este egal cu fluxul prin aria inelară, adică:

$$\Phi = \mu \cdot \frac{1}{2} H_0 \cdot 2\pi ap = \pi ap\, \mu H_0. \tag{4-37}$$

Cîmpul fiind presupus sinusoidal, cu pulsația ω, t.e.m. indusă are valoarea efectivă:

$$E = \omega \Phi = \omega \pi ap\, \mu H_0. \tag{4-38}$$

Rezistența electrică R_p a parcursului cilindric toroidal de la periferia piesei cu lungimea unitate, avînd curentul indus I_2 (aria haşurată din figura 4-24, *a*) este:

$$R_p = \frac{\rho l_p}{A_p} = \rho \frac{2\pi a}{p \cdot 1} = \rho \frac{2\pi a}{p}. \tag{4-39}$$

Deoarece curentul efectiv indus $I_2 = E/R_p$ trebuie să aibă o valoare suficientă pentru a anula în interiorul piesei cîmpul inițial H_0 rezultă (la o piesă cilindrică cu lungimea egală cu unitatea):

$$I_2 = H_0 1 = \frac{E}{R_p} = \frac{\omega \pi a p \mu H_0}{\rho 2\pi a/p} = \frac{1}{2} \omega \mu H_0 \frac{p^2}{\rho},$$

de unde putem deduce grosimea peliculei sau adîncimii de pătrundere p:

$$p = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi f \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}}. \qquad (4\text{-}40)$$

Deoarece $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mu_r \langle \mathrm{H/m} \rangle$ și determinînd valoarea p în m, mai rezultă din (4-40) o formulă adesea utilizată în practică pentru o primă evaluare a grosimii superficiale de încălzire:

$$p = 503{,}3 \sqrt{\frac{\rho}{\mu_r f}}, \qquad (4\text{-}41)$$

cu condiția ca f să fie exprimat în Hz și rezistivitatea ρ în Ω m.

În tabela 4-5 sînt date cîteva valori tipice pentru adîncimea de pătrundere în diverse metale (pentru comparație, am indicat și „pătrunderea" în grafit și apă), calculate cu formula $p\langle \mathrm{mm} \rangle = 50{,}33 \sqrt{\rho \langle \mu\Omega\ \mathrm{cm} \rangle} / \sqrt{\mu_r f \langle \mathrm{Hz} \rangle}$.

În acest tabel s-a ținut seama de neliniaritatea curbei de magnetizare a oțelului (permeabilitatea relativă μ_r variază în funcție de cîmpul magnetic H_0). Din această cauză, cînd un oțel s-a încălzit peste punctul Curie (aproximativ 780°C) el devine paramagnatic (μ_r scade brusc la 1) și în consecință adîncimea de pătrundere crește.

Tabela 4-5

Adîncimi de pătrundere p

Materialul	Rezistivitatea ρ [$\mu\Omega$cm]	H_0 [A/cm]	Permeabilitatea relativă μ_r	p în mm la frecvențele		
				10 kHz	100 kHz	1 MHz
Oțel cald (sub 780° C)	40	40 400 4000	500 40 5	0,14 0,50 1,4	0,044 0,16 0,44	0,014 0,050 0,14
Oțel cald (peste 780°C)	120	—	1	5,5	1,74	0,55
Cupru	1,7	—	1	0,6	0,21	0,056
Alamă	7	—	1	1,3	0,42	0,03
Grafit	800	—	1	14	4,5	1,4
Apă	2000	—	1	22	7,0	2,2

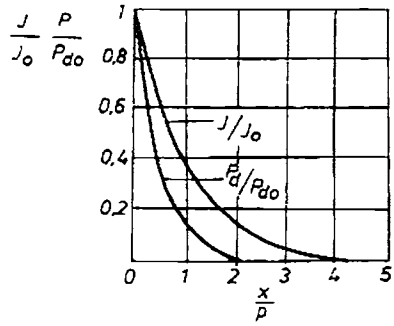


Fig. 4-25

Am cercetat, mai sus, efectul pelicular într-un mod idealizat; tratarea mai exactă (în condiții reale) arată că scăderea cîmpului magnetic și a densității de curent de la suprafața piesei către interior nu se face liniar, ci exponențial (mai ales la frecvențe înalte). În plus, la adîncimea p nu se anulează cîmpul și densitatea de curent (cum am presupus mai sus).

În figura 4-25 este reprezentat modul de variație a densității de curent (relativ J/J_0) cu adîncimea de pătrundere x (tot relativ x/p), precum și a puterii disipate în unitatea de volum (exprimat, de asemenea, în unități relative P_d/P_{d0}).

Totuși, această „imagine" a unei pelicule echivalente cu grosimea p, considerată ca „purtînd" întregul curent indus, este de mare utilitate practică în problemele încălzirii prin inducție la frecvențe înalte (cu f atît de mari încît p să fie neglijabilă în raport cu raza piesei a).

Capitolul 5

MĂSURAREA MĂRIMILOR ELECTRICE ŞI MAGNETICE

Exploatarea rațională a instalațiilor electrice (adică la randamentele permanent optime, fără avarii și la sarcinile normale ale procesului tehnologic proiectat) impune o continuă supraveghere a regimului de lucru, atît pe partea electrică cît și pe cea tehnologică. Aceasta presupune efectuarea periodică (uneori permanentă, chiar cu înregistrare) a unor măsurări electrice și tehnologice, de cele mai multe ori corelate, de către ingineri de exploatare, specialiști în proces (deci neelectricieni), precum și utilizarea unor aparate de semnalizare, de protecție și a unor dispozitive de control și automatizare.

În afara acestei situații — legată de exploatarea curentă — inginerul neelectrician este deseori obligat să efectueze el însuși (fără asistența permanentă a unui specialist electrician) a unor măsurări electrice și magnetice în cadrul preocupărilor și lucrărilor sale experimentale de cercetare și perfecționare a procesului tehnologic.

Din aceste motive, viitorul inginer mecanic (căruia i se adresează acest curs), trebuie să aibă cunoștințe generale (de bază) și în domeniul măsurărilor, controlului și reglajului automat. Deoarece măsurările mărimilor neelectrice se predau la disciplinele de specialitate, semnalizarea — controlul și reglajul automat vor fi studiate la „Elemente de electronică industrială și automatică" și „Aparate de măsurat și automatizări", iar aparatele de protecție la cursul „Acționări electrice", urmează ca aici să prezentăm *măsurările electrice generale*, care constituie obiectul acestui al cincilea capitol al cursului de „Electrotehnică și mașini electrice".

5.1. ELEMENTE INTRODUCTIVE

Măsurarea unei mărimi fizice X reprezintă compararea acesteia cu o altă mărime X_u, de aceeași natură, considerată *unitate de măsură*.

Țara noastră a adoptat Sistemul Internațional de Unități (SI) prin Hotărîrea Consiliului de Miniștri Nr. 550/31 august 1961, singurul sistem de unități de măsură legal și obligatoriu, cunoscut de la „Fizică".

Măsurarea valorilor mărimilor fizice se poate realiza prin următoarele metode de măsurare:

a) *metode de măsurare directe*, prin care se obține nemijlocit valoarea mărimii fizice necunoscute, utilizînd instrumente de măsurat cum ar fi: voltmetrul pentru tensiunea electrică, ampermetrul pentru intensitatea curentului electric, wattmetrul pentru putere, frecvențmetrul pentru frecvență, puntea pentru rezistențe etc.

După modul în care se indică rezultatul măsurării, adică valoarea mărimii măsurate, aparatele electrice se împart în următoarele categorii:

— *analogice*, rezultatul măsurării este indicat într-o scară continuă de valori (deplasarea unui ac indicator sau spot luminos pe o scară gradată).

— *numerice*, valoarea mărimii măsurate este afișată numeric;

b) *metode de măsurare indirecte* — valoarea mărimii se obține prin calcul cu ajutorul unor relații fizice, pe baza măsurării mărimilor care intervin în relație (de exemplu: $R = U/I$, dacă se măsoară U și I).

Datorită diversității constructive, de măsurare și a principiilor de funcționare, clasificarea aparatelor de măsurat se poate face după un număr mare de criterii.

După felul cum se prezintă rezultatul măsurării deosebim:

— *aparate de măsurat indicatoare* la care valoarea mărimii măsurate este dată de către un sistem indicator (ac indicator sau spot luminos) pe diviziunile scării aparatului;

— *aparate de măsurat înregistratoare*, care înscriu pe hîrtie specială, prin puncte sau continuu, valorile succesive ale mărimii măsurate;

— *aparate de măsurat integratoare*, ce înregistrează suma valorilor pe care mărimea de măsurat a avut-o într-un interval de timp.

După felul curentului există: aparate de curent continuu, aparate de curent alternativ (monofazat și trifazat), aparate universale (de curent continuu și alternativ).

După natura mărimii de măsurat aparatele pot fi: ampermetre, voltmetre, wattmetre, varmetre, contoare, ohmmetre, frecvențmetre, fluxmetre, fazmetre henrymetre etc.

În funcție de *clasa de precizie a aparatului*. Evaluarea preciziei unui instrument se face pe baza erorii de măsurare (erorii raportate), presupusă constantă pe toată scala aparatului. Clasele de precizie sînt definite ca raportul dintre eroarea maximă $(\Delta X)_{max}$ într-un punct al scalei și valoarea maximă a indicației aparatului α_{max}, multiplicată cu 100 (valorile ei standardizate sînt date în tabela 5—1).

Tabela 5-1

Clasele de precizie ale aparatelor de măsurat

Clasa de precizie	Eroarea raportată $(\Delta X)_{max} \cdot 100/\alpha_{max}$ [%]	Destinația aparatului
0,1 0,2 0,5	± 0,1 ± 0,2 ± 0,5	Aparate de laborator
1 1,5	± 1 ± 1,5	Aparate industriale
2,5	± 2,5	Aparate indicatoare

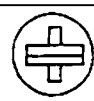
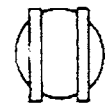
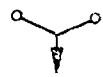
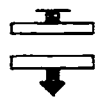
Aparatele de măsurat electrice mai pot fi categorisite și după *alte criterii* cum ar fi:

— poziția de funcționare (normală, orizontală, verticală, înclinată);

— felul protecției asigurate de carcasa aparatului (normale, protejate contra apei, a prafului, a exploziilor, ermetice etc.);

— modul de utilizare (fixe, portabile).

Simboluri caracteristice pentru aparatele electrice de măsurat

Nr. crt.	Felul aparatului după principiul de funcţionare	Simbolul aparatului	Simbolul logometrului	Simbolul curentului	Clasa
1	Aparat magnetoelectric cu cadru mobil			—	0,2
2	Aparat magnetoelectric cu magnet mobil			—	0,2 (1)
3	Aparat feromagnetic cu fier mobil (electromagnetic)			≂	0,5 (1)
4	Aparat electrodinamic			≂	0,1 (1)
5	Aparat ferodinamic			≂	1
6	Aparat de inducţie			~	1
7	Aparat termic (cu dilataţie termică)			≂	2
8	Aparat electrostatic			≂	1
9	Aparat cu lamele vibrante			~	
10	Aparat magnetoelectric cu redresor inclus în aparat			≂	1
11	Aparat magnetoelectric cu termocuplu izolat inclus în aparat			≂	1
12	Aparat magnetoelectric cu schemă electronică			≂	1

După *principiul de funcționare*, adică după natura fenomenului ce stă la baza funcționării aparatului, distingem aparatele: magnetoelectrice (mai multe variante constructive), electromagnetice (feromagnetice), electrodinamice, cu inducție, termice, electrostatice, cu lamele vibrante, fotoelectrice etc. Principiul de funcționare este indicat cu ajutorul simbolurilor caracteristice, simboluri ce se amplasează pe cadranul aparatului electric (tabela 5-2).

5.1.1. Erori de măsurare

Eroarea de măsurare reprezintă abaterea valorii măsurate față de valoarea adevărată a mărimii fizice de măsurat. Ea apare din cauza imperfecțiunii mijloacelor de măsurat și a greșelilor săvîrșite de operator. Cauzele erorilor se datoresc unui complex de factori, atît obiectivi cît și subiectivi, ce nu pot fi eliminați complet. În funcție de caracterul și valoarea erorilor, acestea pot fi grupate astfel:

— *erori sistematice*, care apar întotdeauna în același sens, în condiții de lucru neschimbate, și pot avea valori constante sau variabile, după o anumită lege, în funcție de factorul ce le cauzează;

— *erori întîmplătoare*, produse de cauze accidentale, care pot fi variabile ca valoare și sens astfel că, la repetarea măsurării în condiții de lucru neschimbate, rezultatele măsurărilor diferă între ele. Erorile întîmplătoare au caracter aleator și se studiază cu ajutorul statisticii matematice (v. cursul „Mașini-unelte și control dimensional");

— *erori grosolane (greșeli)* care pot fi întîmplătoare sau sistematice și se datoresc aparatelor defecte, manevrărilor greșite, metodelor de măsurare greșite, citirilor greșite etc. În tabela 5-3 sînt prezentate principalele erori și metodele de reducere a lor.

Calculul erorilor de măsurare (eroarea absolută reală, eroarea absolută aparentă, eroarea relativă, eroarea medie patratică, eroarea raportată etc.) se face așa cum s-a arătat la cursul de „Fizică" și la „Mașini-unelte și control dimensional".

5.1.2. Caracteristici metrologice

Raporturile dintre aparatul de măsurat și mărimea de măsurat sînt determinate de caracteristicile metrologice dintre care amintim cîteva.

Domeniul de măsurare, D, este valoarea maximă ce se poate măsura cu aparatul în condiții normale, adică este valoarea mărimii dată de acul indicator (spotul luminos) cînd acesta se află în dreptul ultimei diviziuni a scalei gradate (α_{max}). Unitatea de măsură a domeniului de măsurare este aceeași ca și unitatea mărimii de măsurat.

Constanta instrumentului electric de măsurat, K, este dată de raportul:

$$K = \frac{D}{\alpha_{max}}.$$

Dacă se cunoaște constanta aparatului și se citește numărul de diviziuni indicat de aparat, se poate determina valoarea mărimii ce se măsoară cu relația:

$$X_m = K\alpha. \tag{5-1}$$

Fidelitatea reprezintă caracteristica unui aparat de a indica aceleași valori pentru aceeași mărime, ori de cîte ori se efectuează măsurarea în aceleași

Tabela 5-3

Metode de reducere și eliminare a erorilor de măsurare

Nr. crt.	Cauze (influențe) ale erorilor	Metode de: reducere	Metode de: eliminare	Observații
I.	**Erori sistematice**			
1	— Imperfecțiuni constructive și de etalonare a aparatelor de măsurat — Defectarea aparatelor de măsurat	— etalonare corectă a aparatelor; — întreținerea și manevrarea corectă	— repararea sau înlocuirea aparatelor defecte	Combaterea lor nu elimină erorile accidentale și greșelile grosolane
2	— Temperatura	— se prevăd mijloace de corecție a erorii cauzate de temperatură		
3	— Cîmpuri electrice exterioare	— ecranare electrostatică		
4	— Cîmpuri electrice interioare	— aducere la același potențial, — legarea unor piese metalice inductive la pămînt		
5	— Cîmpuri magnetice exterioare	— ecranare magnetică, — fixarea aparatelor la distanță de sursele de cîmp		
6	Vibrații	— se prevăd suspensii elastice (în cazul laboratoarelor mobile)		
7	— Erori de metodă (teoretice) sau de montaj	— se fac aproximări cît mai puține		
II.	**Erori accidentale**			
1	— Lipsa de atenție a observatorului, oboseală, starea psihică	— concentrarea atenției	— reluarea lucrului după înlăturarea cauzei incapacității de muncă	Combaterea cauzelor nu elimină erorile sistematice și greșelile
2	— Fluctuații accidentale ale influenței mediului exterior	— se protejează aparatura contra influenței mediului	— se caută a se elimina cauzele fluctuației mediului	
3	— fluctuații ale parametrilor constructivi ai aparatelor sau instalațiilor de măsurat.	— se va executa o bună întreținere a aparaturii, se vor executa montaje de măsurare cu grijă, se va face o manipulare corectă a aparaturii		
III.	**Erori grosolane (greșeli)**			
1	— Aparate defecte	— se remediază defectele sau se schimbă aparatul		Greșelile se elimină iar măsurătorile se refac
2	— Manevrare greșită a aparatului	— se manevrează corect aparatele		
3	— Metode de măsurare greșite	— se aleg metode de măsurare corecte și se face o dimensionare corespunzătoare a schemei de măsurare		

condiții. Această caracteristică este influențată de: temperatură, umiditate, cîmpuri electrostatice și magnetice, presiune, frecări, vibrații, tensiunea de alimentare și alți factori.

Precizia este o caracteristică globală a unui aparat și constă în redarea valorii mărimii de măsurat cît mai apropiat de valoarea adevărată. Precizia este maximă dacă aparatul are fidelitate maximă.

Sensibilitatea, S, se definește prin raportul dintre variația $\Delta\alpha$ a sistemului indicator și variația ΔX a mărimii de măsurat care a provocat variația sistemului indicator:

$$S = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta X} = \frac{d\alpha}{dX} \left\langle \frac{\text{diviziuni}}{\text{unitate}} \right\rangle.$$

Aparatele cu scară gradată uniform au sensibilitatea constantă pe toată scara, iar cele cu gradația neuniformă prezintă sensibilitate variabilă de-a lungul scării.

Mobilitatea, denumită și timpul de răspuns, reprezintă timpul scurs între o variație (bruscă) a mărimii fizice de măsurat și momentul cînd indicatorul aparatului sesizează variațiile mărimii.

Robustețea este capacitatea unui aparat de a suporta acțiuni externe (șocuri, trepidații, temperaturi etc.), precum și suprasarcini.

Capacitatea de supraîncărcare statică (termică de lungă durată) se verifică prin mărirea lentă a sarcinii aparatului peste limita superioară de măsură și menținerea lui, în această stare, un anumit timp (instrumentele de tablou se mențin cu o suprasarcină de 20%, timp de 2 ore).

Capacitatea de suprasarcină dinamică (de scurtă durată) se verifică printr-o încărcare bruscă cu o sarcină mult mai mare decît cea nominală. Suprasarcinile sînt normate prin STAS sau norme de produs, pentru fiecare aparat precizîndu-se X_{max} și durata supraîncărcării.

Consumul propriu de energie al aparatului de măsurat constituie un factor mai mult sau mai puțin perturbator, după cum energia necesară funcționării aparatului este luată de la circuitul de măsurare (instrumentele indicatoare), de la un circuit auxiliar (unele instrumente electronice) sau din circuitul de măsurare și un circuit auxiliar (măsurări indirecte). Consumul propriu trebuie să fie neglijabil față de puterea din circuitul de măsurare. Cu cît circuitul în care se efectuează măsurarea este de putere mai mică, cu atît aparatele folosite pentru măsurare trebuie să aibă un consum propriu de putere mai mic. Consumurile proprii variază în funcție de tipul și destinația aparatului de măsurat (tabela 5-4).

Tabela 5-4

Consumul propriu al aparatelor de măsurat electrice uzuale

Tipul aparatului	Ampermetre 0 – 5A	Voltmetre 0 – 1 000 V
Magnetoelectric	(0,2 – 0,4) W	(0,1 – 1) W
Electromagnetic (feromagnetic)	(2 – 8) W	(2 – 5) W
Electrodinamic	(3 – 10) W	(3 – 6) W
Cu inducție	(1 – 4) W	(2 – 5) W
Termic	(2 – 3) W	(8 – 10) W

Costul reprezintă un indiciu important de care se ține seama în proiectarea și construcția aparatelor electrice, precum și în alegerea acestora în schemele complexe de măsurare.

Valorile tensiunii de încercare a izolației aparatelor indicatoare electrice (tensiuni alternative cu frecvențe de 50 Hz), timpul de încercare fiind un minut, sînt prezentate în tabela 5-5.

Tabela 5-5

Valorile tensiunilor de încercare a izolației

Tensiunea nominală a circuitului în care este conectat aparatul [V]	Valoarea efectivă a tensiunii de încercare, cu frecvența de 50 Hz [V]	Observații
40	500	Tensiunea nominală a aparatului se consideră împreună cu căderea de tensiune pe rezistențele adiționale
41 — 650	2 000	
651—2 000	Dublul tensiunii nominale plus 1 000 V	
Aparate conectate prin transformatoare de măsură	2 000	

5.1.3. Elemente componente comune ale aparatelor electrice de măsurat

Aparatele electrice sînt realizate într-o gamă mare de variante constructive. Indiferent de tipul constructiv, aparatele electrice de măsurat au anumite componente cu funcții comune, așa cum sînt cele de mai jos.

a) Sistemul (dispozitivul) de producere a cuplului activ, care asigură o anumită dependență între cuplul activ (M) produs pe cale electromagnetică și mărimea fizică de măsurat (X).

În funcție de natura fenomenului, cuplul activ este produs de forțe Laplace (4-12) la aparate magnetoelectrice, de forțele $F = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial \alpha}$ la aparate electromagnetice (feromagnetice), de forța lui Ampere (4-13) la aparate electrodinamice etc.

În general sistemul de producere a cuplului activ sau motor se compune dintr-o *parte fixă* (magneți permanenți, bobine electrice, electromagneți, piese din material feromagnetic etc.) și o parte mobilă denumită și *echipaj mobil* (bobine electrice, piese de fier moale, discuri metalice etc.).

Echipajul mobil efectuează mișcări de rotație sau deplasări unghiulare și este fixat pe un ax.

b) Dispozitivul de producere a cuplului rezistent (fig. 5-1) realizează echilibrarea cuplului activ al aparatului, deci a acului indicator, la valoarea corespunzătoare a mărimii de măsurat. De obicei cuplul rezistent sau antagonist se realizează pe cale mecanică cu ajutorul arcurilor spirale (*4*). Arcurile spirale sau resoartele au un capăt fixat de axul echipajului mobil (*1*) iar celălalt de partea fixă a aparatului de măsurat (*5*); se confecționează din aliaje (bronz-fosfor, bronz-beriliu) rezistente la variațiile de temperatură, în regimul de suprasarcină. Axul este prevăzut la capete cu pivoți (*2*), confecționați din oțeluri speciale de mare duritate, ce se pot roti cu mare ușurință în lagăre —

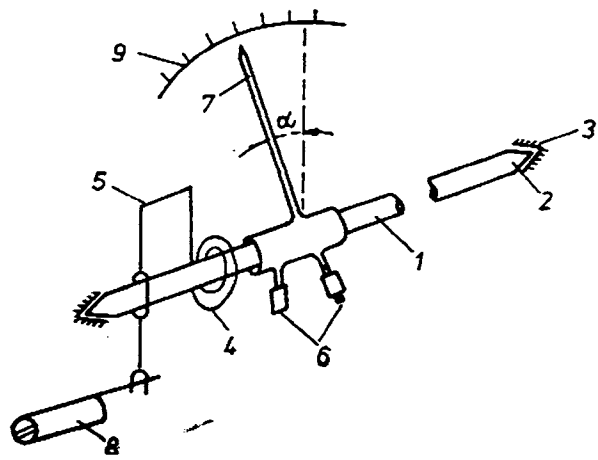


Fig. 5-1

— crapodine (*3*), realizate din materiale extrem de dure (diamante, safir, rubin), fixate în portlagăre.

La rotirea echipajului mobil (deci a acului indicator) cu unghiul α, cuplul rezistent (de torsiune) este direct proporțional cu unghiul de rotație α și are expresia:

$$M_r = K_r\alpha, \tag{5-2}$$

unde K_r este o constantă ce caracterizează arcul.

Așezarea acului indicator în poziția zero a scalei aparatului (*9*) se face cu ajutorul dispozitivului de corecție a poziției de „zero", format dintr-un sistem de pîrghii acționate printr-un șurub de reglaj (*8*), fixat pe partea frontală a aparatului. Cuplul antagonist mecanic readuce echipajul mobil la poziția zero în absența cuplului activ.

Indicațiile aparatului se prezintă cu dispozitivul format din scara gradată (*9*) și acul indicator (*7*). Scara aparatului poate fi marcată sau în valori ale mărimii de măsurat sau în diviziuni, caz în care valoarea mărimii de măsurat se determină după relația (5-1), ca produs între diviziunea citită și constanta aparatului. Scara poate fi gradată uniform (ca la aparate magnetoelectrice), sau neuniform (aparate electromagnetice), scară pătratică etc. Aparatele de precizie ridicată (clasele 0,1—0,5) au sub scara gradată o oglindă care permite citirea indicației după o direcție perpendiculară pe aparat, la suprapunerea acului peste imaginea sa în oglindă.

Acul indicator este fixat de axul echipajului mobil, se confecționează din aliaje de aluminiu și extremitatea sa poate avea diferite profile în funcție de destinația și gradul de precizie ale aparatului.

Cuplul rezistent poate fi realizat și cu alte tipuri de dispozitive cum sînt dispozitivele magnetice și cele electromagnetice.

Dispozitivele magnetice. În cazul aparatelor de măsurat cu ac indicator, se fixează pe axul echipajului mobil un mic magnet, de formă rombică, ce se amplasează în cîmpul magnetic al unui alt magnet permanent, mai mare, fix. Magnetul permanent mic împreună cu echipajul mobil tinde să se orienteze permanent în lungul liniilor de cîmp ale magnetului permanent și se opune astfel rotirii axului realizînd cuplajul rezistent.

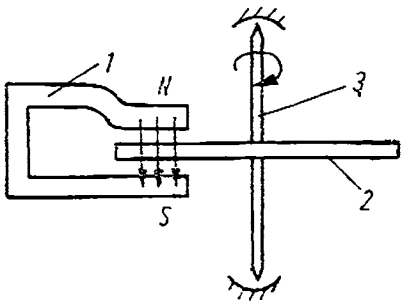


Fig. 5-2

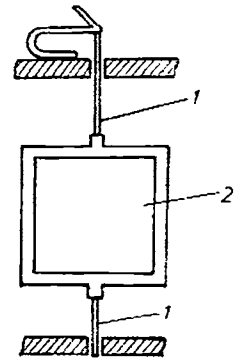


Fig. 5-3

Aparatele cu regim de mișcare continuă (contoare) au cuplul rezistent creat cu ajutorul unui magnet permanent (fig. 5-2), în cîmpul căruia se rotește un disc de aluminiu, fixat pe axul (*3*) al echipajului mobil. Cîmpul magnetului permanent (*1*) interacționează cu curenții turbionari induși în discul (*2*), realizîndu-se un cuplu rezistent în mișcare (echilibru dinamic).

Dispozitive electromagnetice. Dispozitivul de realizare a cuplului rezistent este de același tip (electromagnetic) ca și dispozitivul de realizare a cuplului activ al aparatului de măsurat. Aceste dispozitive se utilizează în construcția aparatelor electrice cu două bobine, numite *logometre.*

c) Suspensia echipajului mobil. Aparatele de înaltă clasă de precizie și mare sensibilitate (cum ar fi galvanometrul magnetoelectric), au echipajul mobil suspendat prin fire tensionate sau suspensie liberă (fig. 5-3).

Cu ajutorul firelor (*1*) se realizează atît suspensia echipajului mobil (*2*), cît și cuplul rezistent (prin torsionarea firelor).

Sistemul de suspensie a echipajului mobil elimină cuplul de frecări, aparatele în schimb pierd din robustețe.

d) Dispozitive de amortizare. În vederea atingerii, într-un timp cît mai scurt, a regimului permanent, deci a echilibrării cuplurilor activ și rezistent, aparatele de măsurat electrice sînt prevăzute cu dispozitive de amortizare.

Amortizarea oscilațiilor acului indicator în jurul poziției de echilibru se realizează cu ajutorul dispozitivelor pneumatice sau magnetice.

Dispozitivele pneumatice (fig. 5-4) sînt constituite dintr-o cameră pneumatică (*1*) în care se deplasează un piston (*2*) — figura 5-4, *a* sau o paletă (*3*) — figura 5-4, *b*.

Pistonul și paleta sînt fixate de axul echipajului mobil, iar deplasarea lor în camerele pneumatice va duce la presarea sau laminarea aerului, ceea ce va asigura frînarea mișcării axului, deci amortizarea oscilațiilor acului indicator.

Dispozitivele magnetice de amortizare (fig. 5-5) sînt formate dintr-un magnet permanent (*1*), în cîmpul căruia se deplasează o lamelă sau un disc din aluminiu (*2*), fixate pe axul echipajului mobil. În piesa metalică în mișcare se vor induce curenți turbionari a căror interacțiune cu cîmpul magnetic va da naștere cuplului ce se opune mișcării, amortizînd astfel oscilațiile.

Dispozitivele de amortizare pneumatice sînt utilizate în construcția aparatelor electrodinamice, feromagnetice în curent continuu. Dispozitivele magnetice se folosesc în general la contoarele electrice, aparatele magnetoelectrice și în construcția unor aparate electrostatice; acestea pot însă introduce erori suplimentare datorite prezenței cîmpurilor magnetice perturbatorii.

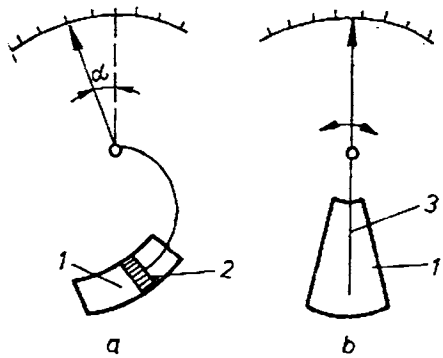


Fig. 5-4

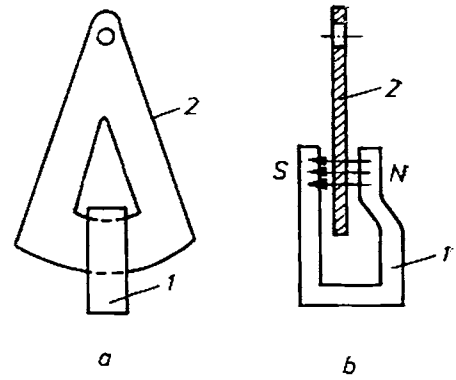


Fig. 5-5

e) Elementele de circuit electric se montează în interiorul aparatului şi sînt formate din: bobine, condensatoare, surse de energie, redresoare, şunturi, rezistoare adiţionale, rezistoare de compensare.

Şunturile se montează în paralel cu aparatul de măsurat, se confecţionează din sîrmă sau bare de manganină şi au rolul de a extinde domeniul de măsură al ampermetrelor.

Rezistoarele adiţionale se înseriază cu bobinele de tensiune ale aparatelor şi au rolul de a permite extinderea domeniului de măsurare a tensiunilor. Ele se confecţionează din manganină, constantan sau din materiale chimice. Rezistoarele adiţionale chimice prezintă precizie şi stabilitate ridicată, dar sînt mai sensibile la temperatură.

Rezistoarele de compensare, legate în serie cu bobina mobilă a aparatelor de măsurat magnetoelectrice cu şunt, au rolul de a compensa influenţa variaţiilor de temperatură asupra preciziei măsurării; se confecţionează din manganină.

f) Elemente auxiliare cum ar fi:

— cutia (carcasa) aparatului avînd în general rol de protecţie;

— contragreutăţi (*6* din figura 5-1), au rolul de a echilibra echipajul mobil în mişcare;

— elemente (piese) de acces ale aparatului (borne de legătură, fişe, comutatoare) şi altele.

5.2. APARATE MAGNETOELECTRICE

Aparatele de măsurat magnetoelectrice se realizează în mai multe variante constructive:

— aparate cu magnet permanent fix şi bobină mobilă;

— aparate cu bobină fixă şi circuitul magnetic activ mobil;

— aparate cu magnet permanent interior sau exterior faţă de bobină.

5.2.1. Aparate magnetoelectrice cu magnet fix şi bobină mobilă

Tipul din figura 5-6 reprezintă varianta cea mai utilizată. Dispozitivul activ este format dintr-un magnet permanent (*1*), în formă de potcoavă, confecţionat din aliaje ce îşi păstrează în timp calităţile magnetice, prevăzut cu două piese polare *PN* şi *PS* (*2*).

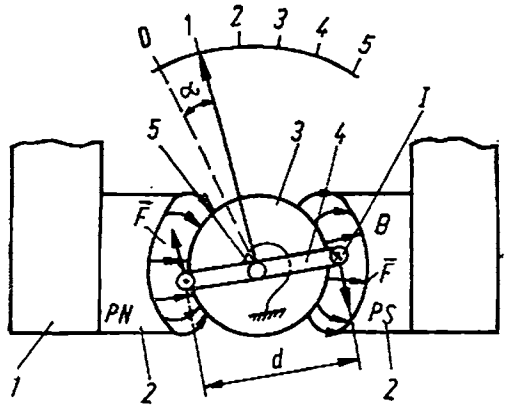


Fig. 5-6

Între piesele polare este amplasat un cilindru feromagnetic (*3*), cu un întrefier constant sub 2 mm. Cilindrul feromagnetic are rolul de a asigura în întrefier un cîmp magnetic radial și uniform; se fabrică din materiale magnetice moi, cu permeabilitate magnetică mare.

Bobina mobilă are N spire bobinate pe un cadru de aluminiu (*4*), de lățime d și de lungime l; aceasta se poate roti în întrefier fără a atinge piesele ce îl delimitează.

Bobina este fixată pe axul (*5*), constituit din două semiaxe, izolate de cadrul bobinei. Pe axul bobinei sînt fixate de asemenea arcurile spirale (*6*) prin care se asigură căile de curent spre bobină, precum și cuplul rezistent al dispozitivului de măsurat.

Amortizarea oscilațiilor acului indicator se obține prin interacțiunea dintre curenții induși în cadrul de aluminiu (ce se rotește în cîmpul magnetic) și cîmpul de inducție magnetică B din întrefier.

Cuplul activ al dispozitivelor de măsurat magnetoelectrice apare ca urmare a interacțiunii între cîmpul magnetic al magnetului permanent și curentul de măsurat I ce parcurge bobina.

Forța F, a lui Laplace (4-12), care acționează asupra laturilor active de lungime l ale bobinei situate în cîmp, va fi perpendiculară pe planul bobinei ($\bar{F}$, $\bar{B}$ și $\bar{I}$ formează un triedru drept ortonormal) și este dată de expresia:

$$F = NBlI.$$

Dacă d este lățimea bobinei, cuplul activ va fi dat de relația:

$$M = Fd = NBldI = NBSI = K_a I,$$

unde S este suprafața bobinei, iar mărimea $K_a = NBS$, de natura unui flux-magnetic, este denumită *constanta dinamică* a aparatului, o mărime constructivă, independentă de unghiul de deviație α. Cuplul rezistent este proporțional cu unghiul de deviație α al acului indicator: $M_r = K_r\alpha$. La echilibrul cuplului activ cu cuplul rezistent avem:

$$M = M_r \text{ sau } K_a I = K_r\alpha,$$

de unde rezultă deviația

$$\alpha = \frac{K_a}{K_r} I = S_i I. \tag{5-3}$$

Unghiul de deviație α al aparatelor magnetoelectrice este proporțional cu intensitatea curentului de măsurat. Constanta de proporționalitate S_i poartă numele de *sensibilitatea* la intensitatea curentului electric.

Faptul că deviația α este liniară, conform relației (5-3), arată că scara aparatului magnetoelectric este cu diviziuni echidistante pe toată lungimea sa. Dispozitivele magnetoelectrice pot fi utilizate numai în curent continuu, motiv pentru care bornele lor sînt „polarizate", adică notate cu (+) și cu (—).

Utilizarea dispozitivelor magnetoelectrice la măsurarea mărimilor sinusoidale este posibilă numai dacă ele sînt echipate cu redresoare sau termocupluri.

Aparatele magnetoelectrice sînt sensibile la curenți mici deoarece inducția magnetică B în întrefier fiind mare (0,2—0,5 T), nu sînt influențate de cîmpuri magnetice exterioare.

5.2.2. Logometre magnetoelectrice

Logometrul magnetoelectric este un dispozitiv format din două bobine identice, situate pe același ax, dar decalate cu un unghi oarecare (60° sau 90°), parcurse de curenții I_1 și I_2. Cele două bobine sînt amplasate într-un cîmp magnetic de inducție B (fig. 5-7).

În cazul în care cele două bobine b_1 și b_2 au același număr de spire ($N_1 = N_2 = N$), aceeași lungime a laturilor (l), precum și aceeași lățime a bobinelor (d), asupra lor vor acționa două cupluri date de relațiile:

$$M_1 = NI_1Bld\ \cos\alpha,$$

$$M_2 = NI_2B\,ld\ \cos\ (\alpha + 90°).$$

Alegînd sensuri diferite pentru curenții I_1 și I_2, cele două cupluri vor avea de asemenea sensuri diferite; unul dintre cupluri se consideră cuplul activ, iar celălalt cuplul rezistent. La echilibru avem relația:

$$M_1 + M_2 = 0,$$

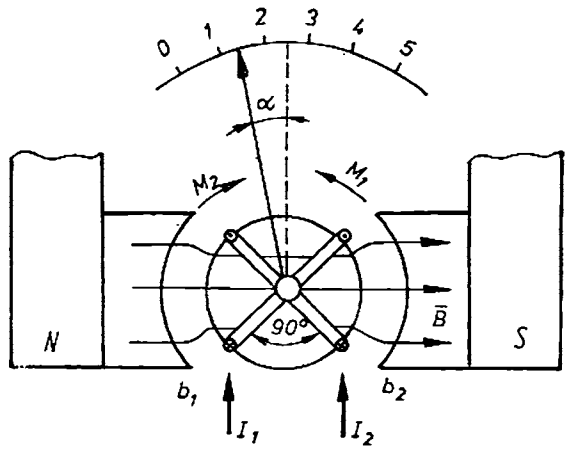


Fig. 5-7

iar din această poziție a echipajului mobil rezultă:

$$\frac{I_1}{I_2} = \text{tg}\,\alpha \text{ sau } \alpha = \text{arc tg}\frac{I_1}{I_2}. \qquad (5\text{-}4)$$

Unghiul de deviație α depinde deci de raportul intensităților curenților (I_1 și I_2) ce parcurg cele două bobine. Logometrele magnetoelectrice nu au poziția „zero", deoarece bobinele nefiind străbătute de curenți echipajul mobil poate ocupa orice poziție.

Amortizarea oscilațiilor echipajului mobil al logometrelor magnetoelectrice se realizează prin curenții turbionari induși în cadrele — suport ale celor două bobine.

Logometrele magnetoelectrice sînt utilizate în curent alternativ la măsurarea rezistențelor precum și la măsurarea mărimilor neelectrice (cu traductoare electrice de: temperaturi, debite, presiuni fluide, nivel-lichide etc.). În curent continuu (construcțiile cele mai des întîlnite) sînt utilizate la măsurarea intensității curentului (galvanometre, miliampermetre, ampermetre) și a tensiunii (galvanometre, milivoltmetre, voltmetre).

Variantele utilizate pentru măsurări în curent alternativ sînt prevăzute cu dispozitive de redresare a curentului (redresoare semiconductoare, termocupluri).

5.2.3. Aparate magnetoelectrice cu redresoare

Aparatele magnetoelectrice au în ultima vreme sistemele de redresare realizate cu elemente semiconductoare, amplasate cu instrumentele de măsurat în aceeași cutie, utilizînd scheme de tipul simplă redresare, dar mai ales dublă redresare (fig. 5-8).

Prin bobina mobilă va trece un curent pulsatoriu, de o anumită valoare medie I_{med}. Aparatele magnetoelectrice se etalonează însă în valori efective ale curentului sinusoidal, date de relația: $I = K_f I_{med}$. Factorul de formă în curent alternativ sinusoidal are valoarea $K_f = 1{,}11$. Aparatele magnetoelectrice cu redresor se folosesc ca ampermetre, voltmetre, într-o construcție unică cu posibilități de comutare pe diferite regimuri de măsurare cum sînt voltampermetrele universale, cu diferite denumiri de firmă ca: avometre, multavi, multițet, mavo etc. Aceste tipuri de aparate au două scări (cu mai multe domenii), în curent continuu și alternativ, neuniforme pentru regimurile în curent alternativ. Faptul că aceste aparate au un număr mare de sensibilități (și anume: 6 sau 8 pentru curenți și tensiuni, realizate cu ajutorul unor șunturi și rezistențe adiționale), găsesc o largă utilizare în tehnică. Aparatele magnetoelectrice cu redresor au clase de precizie 1,5 și prezintă dezavantajul unei sensibilități la variațiile de temperatură și frecvență a curentului alternativ de măsurat.

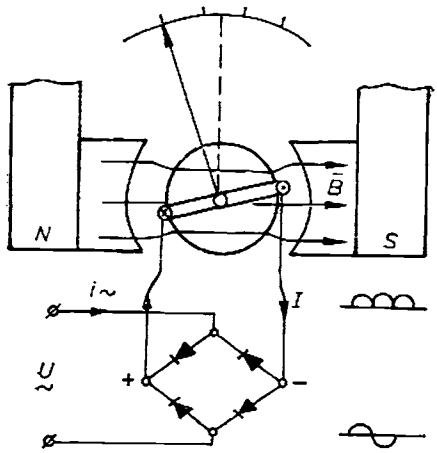


Fig. 5-8

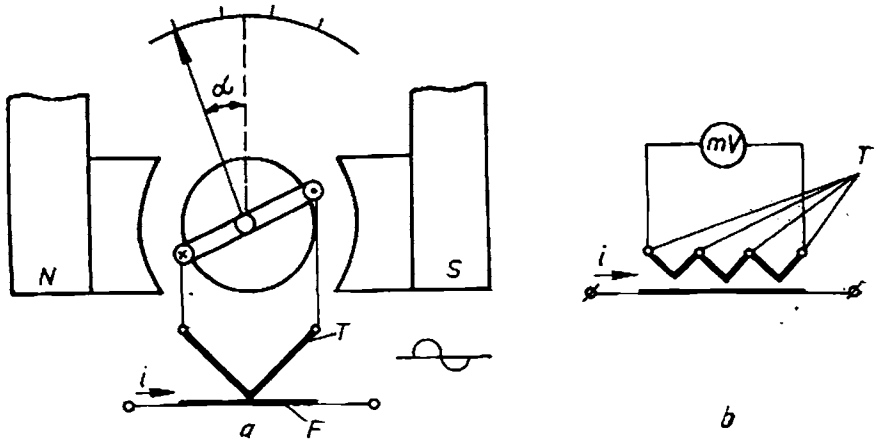


Fig. 5-9

5.2.4. Aparate magnetoelectrice cu termocupluri

Aparatele magnetoelectrice cu termocupluri, denumite şi *termoelectrice*, utilizează ca redresor un termocuplu (fig. 5-9).

Firul încălzitor (F) este parcurs de curentul alternativ de măsurat din circuit. Datorită diferenţei de temperatură dintre capătul cald (sudat de firul F) şi capetele reci ale termocuplului, în circuit apare o tensiune termoelectromotoare. Aceasta este direct proporţională cu diferenţa de temperatură şi este o tensiune continuă ce se poate măsura cu ajutorul aparatului magnetoelectric conectat conform figurii 5-9 *a*. Temperatura firului depinde, conform efectului Joule-Lenz, de rezistenţa sa R şi de pătratul curentului (I^2R). Deci, tensiunea termoelectromotoare (deviaţia α a aparatului), este proporţională cu pătratul valorii efective a curentului din circuit. Aparatele magnetoelectrice cu termocupluri au scara neliniară, gradată în valori efective ale mărimii de măsurat.

Încălzirea termocuplului poate fi realizată direct (fig. 5-9, *a*) sau indirect, în acest caz termocuplurile (T) nu au contact cu firul încălzitor (figura 5-9, *b*, cu trei elemente în serie). În practică, aparatele magnetoelectrice cu termocupluri se folosesc şi la determinarea diferenţelor de temperatură între două puncte, prin măsurarea tensiunii electromotoare (termocuplul fiind traductorul electric adică elementul sensibil temperatură — t.e.m.).

Aparatele magnetoelectrice cu termocuplu prezintă unele calităţi: influenţă redusă a temperaturii mediului ambiant, deviaţia α nu este influenţată de variaţiile frecvenţei în limite largi (sînt utilizate pentru măsurări în radiotehnică). Aceste aparate prezintă şi unele dezavantaje: consum de putere ridicat, capacitate de supraîncărcare redusă, deviaţia acului indicator se stabileşte cu o anumită întîrziere (deoarece regimul stabil al firului încălzitor se stabileşte după un timp oarecare) şi altele.

5.3. APARATE ELECTROMAGNETICE

Aparatele electromagnetice se bazează pe acţiunea exercitată de cîmpul magnetic al unei bobine fixe parcurse de curent asupra unor piese feromagnetice solidare cu axul echipajului mobil (v. 4.1.4. — fig. 4-6). Piesele fero-

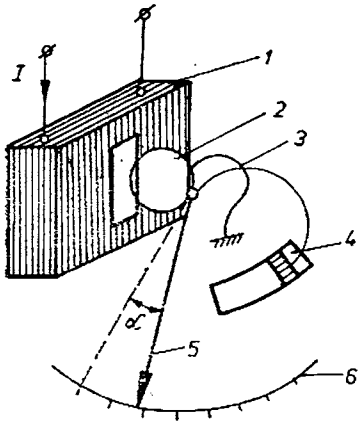


Fig. 5-10

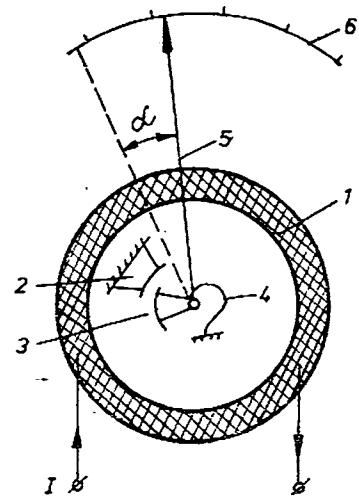


Fig. 5-11

magnetice mai poartă numele de armături şi sînt fixate excentric pe axul aparatului. Curentul de măsurat străbate conductoarele bobinei fixe şi crează cîmpul de inducţie magnetică B. Aceste aparate se construiesc în mai multe variante, cele mai frecvent întîlnite fiind cele cu bobină plată (cu atracţie) şi cu bobină cilindrică (cu repulsie).

5.3.1. Aparate electromagnetice cu bobină plată

Aparatele cu bobină plată (fig. 5-10) sînt formate dintr-o bobină plată (*1*), parcursă de curentul I, ce creează un cîmp de inducţie magnetică B care va atrage piesa din fier moale (*2*) ce se roteşte odată cu axul echipajului mobil şi acul indicator (*5*) fixat de acesta. Cuplul rezistent se realizează pe cale mecanică cu ajutorul resortului spiral (*3*). Amortizarea oscilaţiilor se asigură cu sistemul pneumatic (*4*).

5.3.2. Aparate electromagnetice cu bobină cilindrică

Aceste tipuri de aparate (fig. 5-11) sînt formate dintr-o bobină cilindrică (*1*), parcursă de curentul de măsurat I. În interiorul bobinei se amplasează două piese din fier moale: una fixă (*2*) faţă de bobină, iar cealaltă (*3*) — fixată de axul aparatului — se poate roti odată cu axul.

La trecerea curentului prin bobina fixă cele două piese feromagnetice se magnetizează identic şi se resping. Ca urmare, are loc rotirea axului echipajului mobil, deci deviaţia acului indicator (*5*). Cuplul rezistent se asigură cu ajutorul resoartelor spirale (*4*), iar amortizarea oscilaţiilor printr-un sistem pneumatic.

Cuplul activ, pentru ambele variante constructive ale aparatelor electromagnetice, este dat de teorema forţelor generalizate (v. 4.1.4. şi relaţia 4-11) prin derivata energiei electromagnetice în raport cu deviaţia α a echipajului mobil:

$$M_a = \left(\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\alpha}\right)_{i=ct.} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{LI^2}{2}\right) = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\alpha}.$$

Cuplul rezistent are expresia: $M_r = K_r\alpha$, iar din $M_a = M_r$ de la echilibru rezultă valoarea deviației:

$$\alpha = K \frac{1}{2} \frac{dL}{d\alpha} I^2. \tag{5-5}$$

Deviația α a aparatului este proporțională cu pătratul curentului (K este o constantă constructivă a aparatului). Scara este neuniformă, diviziunile scării fiind mai restrînse la începutul ei și mai extinse spre sfîrșit. Deviația α fiind proporțională cu pătratul curentului, rezultă că semnul cuplului activ nu depinde de semnul curentului, aparatele utilizîndu-se atît în curent continuu cît și în curent alternativ. Avînd o inerție mecanică mare, echipajul mobil al aparatelor electromagnetice nu poate urmări variația în timp a mărimii i^2, acesta fiind sensibil numai la valoarea medie pe o perioadă care reprezintă tocmai valoarea efectivă a curentului.

În curent continuu, măsurările sînt influențate nefavorabil datorită remanenței magnetice a plăcuțelor din fier moale, mai ales la creșterea sau descreșterea curentului.

Aparatele electromagnetice sînt puternic influențate de cîmpurile magnetice exterioare, fapt pentru care acestea se construiesc cu o solenație mare. Aceste tipuri de aparate au o construcție simplă, robustă, prezintă capacitate mare de supraîncărcare (curentul nu trece prin rezistențele spirale). Avînd clasa de precizie 1,5—2,5, sînt utilizate în industrie dar și ca aparate de laborator. Frecvent sînt întîlnite în industrie ca ampermetre și voltmetre, dar se construiesc și ca logometre electromagnetice, faradmetre, frecvențmetre, wattmetre etc.

5.3.3. Logometre electromagnetice

Logometrul electromagnetic se compune din două bobine b_1 și b_2 fixe, străbătute de curenții i_1 și i_2, și două palete mobile (piese din fier moale) fixate pe același ax al echipajului mobil (fig. 5-12, *a*).

Logometrul magnetoelectric poate fi realizat și cu un singur miez (piese din fier moale), care este atras sau orientat în cîmpul magnetic creat de curenții i_1 și i_2 (fig. 5-12, *b*).

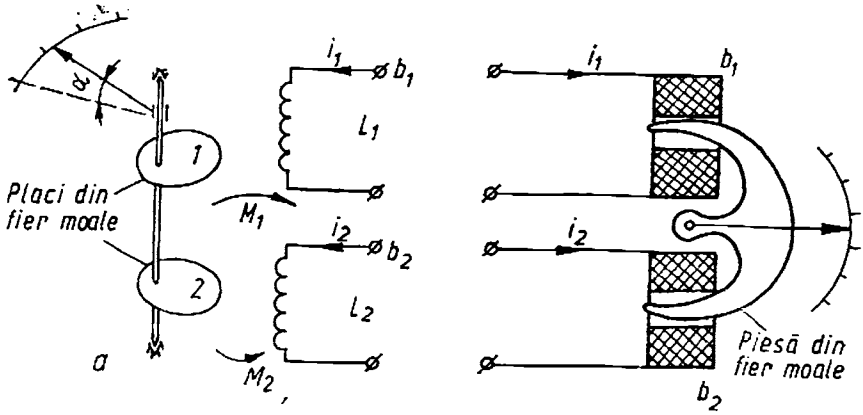


Fig. 5-12

Prin construcție, cele două cupluri active M_1 și M_2 acționează în sensuri opuse asupra axului aparatului. Valorile lor trebuie să fie funcții diferite de unghiul de deviație α al echipajului mobil al aparatului, condiție ce se asigură prin forme adecvate și poziții inițiale corespunzătoare ale pieselor din fier moale față de bobinele fixe.

La echilibru se obține o deviație dată de expresia:

$$\alpha = f\left(\frac{i_1}{i_2}\right), \tag{5-6}$$

adică deviația α a echipajului mobil este o funcție neliniară a raportului celor doi curenți ce parcurg spirele celor două bobine fixe ale logometrului magnetoelectric.

5.3.4. Frecvențmetre cu lamele vibrante

Frecvențmetrul cu lamele vibrante este un aparat de tip electromagnetic întîlnit și sub denumirea de aparat feromagnetic cu rezonanță. Acesta are două variante constructive: cu acționare directă și cu acționare indirectă (fig. 5-13). În ambele variante electromagnetul (*1*) se alimentează cu tensiunea alternativă ($\sim u$) a cărei frecvență f se măsoară. Traversa (*2*) este fixată de carcasa aparatului prin lamelele elastice (*3*). De traversa (*2*), ce poate oscila, este fixată plăcuța feromagnetică (*4*), ea constituind armătura aparatului, precum și lamelele vibrante (*5*) confecționate din oțel.

Alimentînd cu curentul i bobina electromagnetului, acesta va atrage și respinge plăcuța (*4*), deci ea va oscila. Oscilațiile prin intermediul traversei (*2*) se vor transmite lamelelor (*5*). Întrucît forța portantă a electromagnetului este proporțională cu pătratul curentului i, rezultă că oscilațiile plăcii (*4*) vor fi de frecvență dublă față de frecvența curentului ($f = 2f_x$). Lamela a cărei frecvență proprie este $2f_x$ va intra în rezonanță, avînd amplitudinea de vibrație maximă, diferențiindu-se astfel de celelalte lamele. Pe partea frontală a aparatului se pot observa amplitudinile maxime ale lamelelor vibrante; se vor vedea capetele acestor lamele, vopsite în alb. În dreptul capetelor lamelelor este scrisă valoarea frecvenței (f_x) corespunzătoare. Aceste aparate se construiesc pentru frecvențe industriale, 50 Hz $\pm$ 10%, adică cu domeniul între 45 și 55 Hz, lamelele fiind acordate pentru fiecare 0,5 Hz. Frecvențmetre de acest tip au consum propriu ridicat, dar și precizia ridicată (clasa 0,5 și 1).

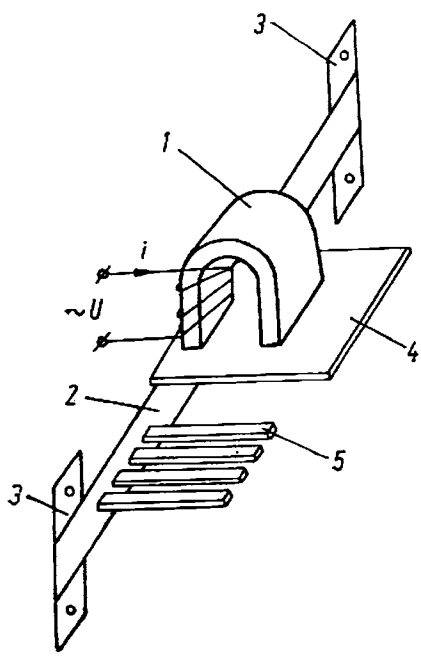


Fig. 5-13

5.4. APARATE ELECTRODINAMICE

Aparatele electrodinamice se bazează pe interacțiunea dintre două bobine parcurse de curenți, dintre care una fixă și alta mobilă (forța lui Ampère — v. relația 4 - 3). Bobinele pot fi amplasate pe miezuri magnetice și în acest caz aparatul poartă denumirea de *ferodinamic.* După modul de realizare a cuplului rezistent, aparatele electrodinamice pot fi clasificate astfel:

— *electrodinamometre,* aparate electrodinamice simple, cu cîmp radial uniform, cuplul rezistent fiind realizat pe cale mecanică;

— *logometre electrodinamice,* aparate electrodinamice care au cuplul rezistent realizat pe cale electromagnetică.

5.4.1. Electrodinamometre

Electrodinamometrul (fig. 5 - 14) este format dintr-o bobină fixă (*1 — 1'*), constituită din două jumătăți identice, cu un număr de N_1 spire, străbătută de curentul i_1. Aparatul este prevăzut cu o bobină mobilă (*2 — 2'*), parcursă de curentul i_2, ce se rotește odată cu axul (*3*) și acul indicator (*6*).

De axul aparatului se fixează dispozitivul de amortizare a oscilațiilor (*5*), resoartele spirale (*4*) cu ajutorul cărora se realizează cuplul rezistent, ele servind totodată și la alimentarea bobinei mobile (*2*).

Cele două bobine fiind parcurse de curenții i_1 și i_2, produc între ele forțe electrodinamice care vor da naștere unui cuplu activ sau motor ce poate fi calculat din expresia (4 - 13):

$$M_a = Ki_1i_2. \tag{5-7}$$

Prin construcție se asigură o variație liniară a inductivității mutuale față de α, deci un $K = const.$ Cuplul rezistent mecanic este dat de două resorturi spirale, iar la echilibru se obține:

$$K_r\alpha = Ki_1i_2,$$

de unde deviația α are expresia:

$$\alpha = K(\alpha)\, i_1i_2. \tag{5-8}$$

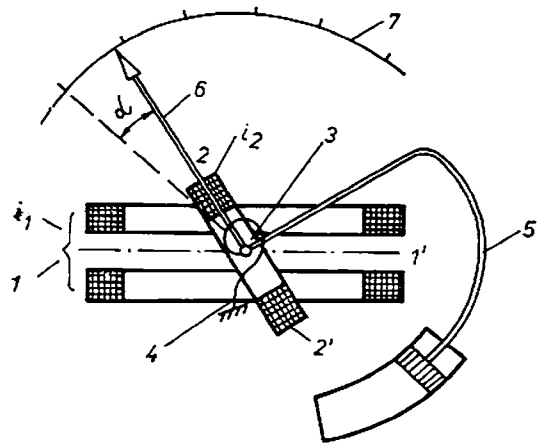


Fig. 5-14

Aparatele electrodinamice cu cîmp radial au deviația bobinei mobile, deci deviația acului indicator, proporțională cu produsul intensităților celor doi curenți ce străbat cele două bobine, fixe și mobile.

În cazul în care alimentarea bobinelor se face în curent alternativ, dispozitivul electrodinamic reacționează numai la valoarea medie a cuplului activ, deviația α a aparatului fiind dată de relația:

$$\alpha = K(\alpha)\, I_1 I_2 \cos \varphi, \qquad (5\text{-}9$$

unde: I_1 și I_2 sînt valorile efective ale intensităților celor doi curenți și φ defazajul dintre ei. La conectarea în serie a celor două bobine expresia deviației α devine:

$$\alpha = K(\alpha)\, I^2, \qquad (5\text{-}10)$$

unde I reprezintă intensitatea curentului în curent continuu sau valoarea efectivă a curentului în curent alternativ. Aparatele electrodinamice se construiesc ca ampermetre, voltmetre, wattmetre, contoare de energie electrică în circuitele de curent continuu.

5.4.2. Aparate ferodinamice

Principial, aparatele ferodinamice (fig. 5 - 15) nu se deosebesc de electrodinamometre. Se face însă precizarea că, în scopul măririi cîmpului magnetic propriu, bobina fixă a aparatului (*1*) este așezată pe un miez feromagnetic moale (*2*). Bobina mobilă (*3*) se amplasează în întrefierul aparatului avînd posibilitatea să se rotească.

Aceste tipuri de aparate au cuplurile active de cca 20 ori mai mari decît aparatele fără fier. Se realizează în acest fel o reducere simțitoare a influenței cîmpurilor magnetice exterioare, precizia lor însă scade din cauza curenților turbionari și a fenomenului de histerezis.

Întrucît curentul de măsurat străbate echipajul mobil, supraîncărcarea aparatelor electrodinamice nu este posibilă. Aceste tipuri de aparate au clasele de precizie 1 și 2,5.

Aparatele electrodinamice sînt des întîlnite și în varianta constructivă logometrică ca fazmetre, frecvențmetre, faradmetre și altele.

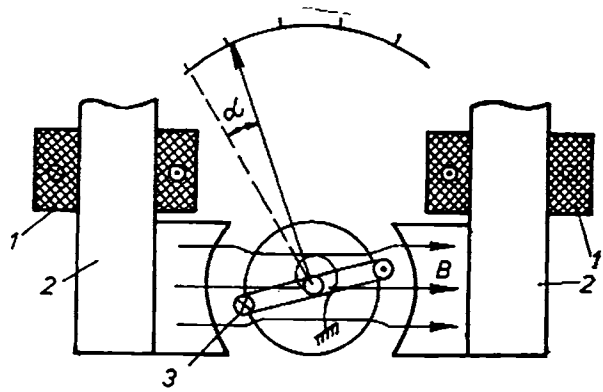


Fig. 5-15

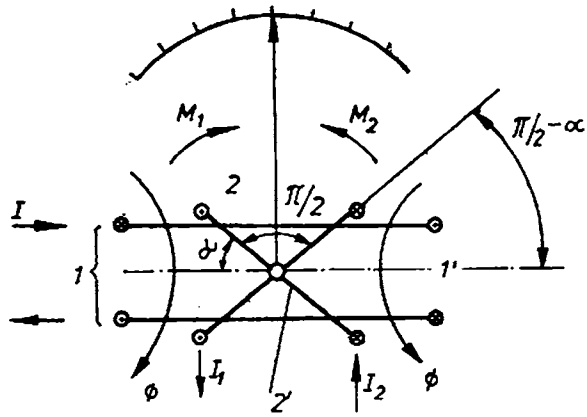


Fig. 5-16

5.4.3. Logometre electrodinamice (ferodinamice)

Principiul constructiv al logometrului electrodinamic este prezentat în figura 5-16. El se compune din două sisteme de bobine, unul fix (*1 — 1'*), cu sau fără miez de fier, și altul mobil realizat la rîndul său tot din două bobine (*2 — 2'*) dispuse sub un unghi de $\pi/2$ una față de alta. Bobinele mobile sînt parcurse de curenții I_1 și I_2 aduși prin intermediul a două benzi flexibile.

Cele două bobine creează cuplurile M_1 și M_2 de sensuri opuse. Deci, asupra echipajului mobil vor acționa două cupluri, unul activ și altul rezistent:

$$M_1 = K_1 I I_1 \sin(\pi/2 - \alpha) = K I I_1 \cos\alpha,$$

$$M_2 = K_2 I I_2 \sin\alpha = K\, I I_2 \sin\alpha,$$

unde $K_1 = K_2 = K$ reprezintă o constantă de proporționalitate (cîmpul magnetic B este omogen, bobinele mobile sînt identice).

Echipajul mobil este în echilibru cînd cele două cupluri devin numeric egale, adică:

$$K I I_1 \cos\alpha = K I I_2 \sin\alpha$$

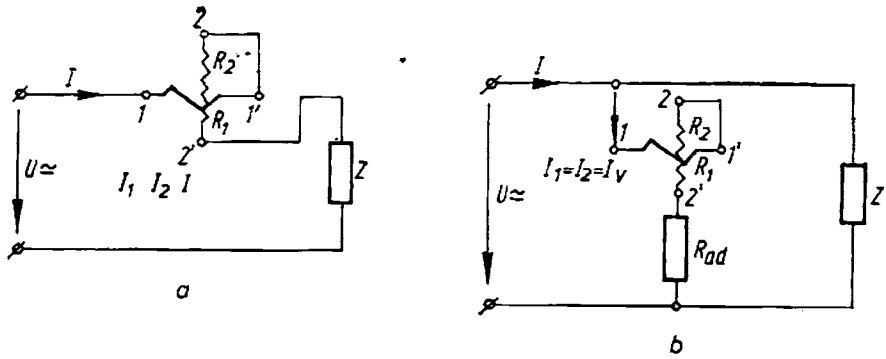
și astfel, deviația α depinde de raportul curenților ce parcurg cele două bobine mobile:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{I_1}{I_2} \text{ deci } \alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}\right). \tag{5-11}$$

Logometrele electrodinamice sînt utilizate cel mai frecvent în curent alternativ (în curent continuu au performanțe inferioare logometrelor magnetoelectrice).

5.4.4. Moduri de conectare în circuit a aparatelor electrodinamice

După modul de conectare în circuitul electric a bobinelor aparatului electrodinamic deosebim: ampermetre, voltmetre, wattmetre și varmetre electrodinamice.



Figl 5-17

Ampermetrul electrodinamic (fig. 5-17, *a*) se realizează prin conectarea în serie a celor două bobine, dar în serie și cu circuitul în care se face măsurarea curentului I, curent ce este egal cu cel al bobinelor ($I_1 = I_2 = I$), iar deviația α a aparatului este dată de relația:

$$\alpha = KI^2. \tag{5-12}$$

În cazul măsurării curenților ce depășesc valoarea limită a ampermetrului electrodinamic, se vor monta în paralel cu aparatul rezistențe mai mici, denumite șunturi.

Voltmetrul electrodinamic (fig. 5-17, *b*) se poate obține prin legarea bobinei fixe (*1 — 1'*) în serie cu bobina mobilă (*2 — 2'*), iar acest ansamblu în paralel în circuitul impedanței Z (sarcina). În serie cu cele două bobine se leagă și o rezistență adițională (R_{ad}). Curentul voltmetrului, adică al derivației, va fi:

$$I_V = I_1 = I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_{ad}} = \frac{U}{R_V},$$

astfel că (5-8) devine:

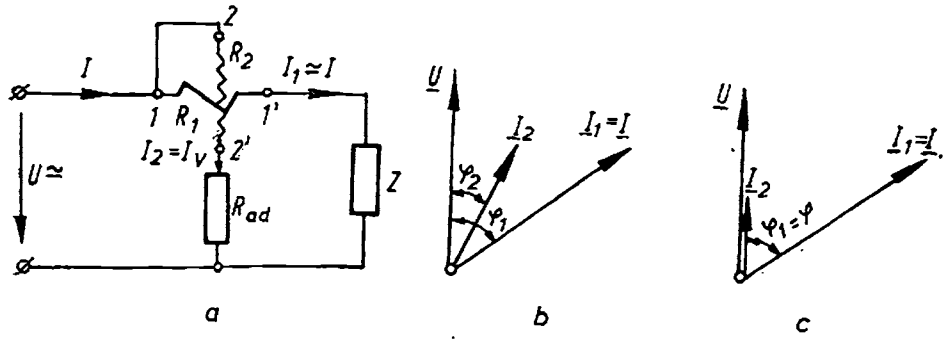
$$\alpha = KI_V^2 = \frac{K}{R_V^2} U^2 = f(U^2), \tag{5-13}$$

unde cu R_V s-a notat rezistența derivației (cele trei rezistențe înseriate), neglijîndu-se inductivitatea celor două bobine ale voltmetrului electrodinamic.

Extinderea domeniului de măsurare se face cu rezistențe adiționale (R_{ad}), iar peste 750 V cu transformatoare de măsură.

Wattmetrul electrodinamic (fig. 5-18, *a*) poate fi realizat cu ajutorul dispozitivului de măsurat electrodinamic legînd bobina fixă (*1 — 1'*), confecționată din sîrmă groasă cu spire puține, în serie în circuit (fiind parcursă de curentul I_1 absorbit de receptor) și cea mobilă, denumită bobina de tensiune a wattmetrului, în paralel cu receptorul. În serie cu bobina de tensiune (*2 — 2'*) se leagă o rezistență adițională (R_{ad}). Alimentînd în curent continuu circuitul și ținînd cont că prin bobina mobilă trece curentul I_2, pentru wattmetrul din figura 5-18, *a* rezultă:

$$I_2 = I_V = \frac{U}{R_2 + R_{ad}} \text{ și } I_1 \simeq I,$$



a b c

Fig. 5-18

iar deviația:

$$\alpha = KI_1I_2 = \frac{K}{R_2 + R_{ad}} UI = K_pUI = K_pP, \qquad (5\text{-}14)$$

K_p fiind constanta wattmetrului.

La utilizarea în curent alternativ este necesar să se țină seama de defazajul φ_2 introdus de inductivitatea bobinei de tensiune (fig. 5-18, *b*); valorile instantanee ale curenților sînt date de relațiile:

$$i_1 = I_{m1} \sin (\omega t - \varphi_1).$$

$$i_2 = I_{m2} \sin (\omega t - \varphi_2).$$

Cuplul instantaneu și deviația aparatului se determină în funcție de valorile și decalajele celor doi curenți.

Întrucît inductivitatea bobinei mobile este neglijabilă față de rezistența $R_2 + R_{ad}$, deci $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = 0$, iar curentul $\underline{I}_2$ este în fază cu tensiunea $\underline{U}$ (fig. 5-18, *c*), se poate scrie:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R_2 + R_{ad}},$$

deviația aparatului va fi dată de relația:

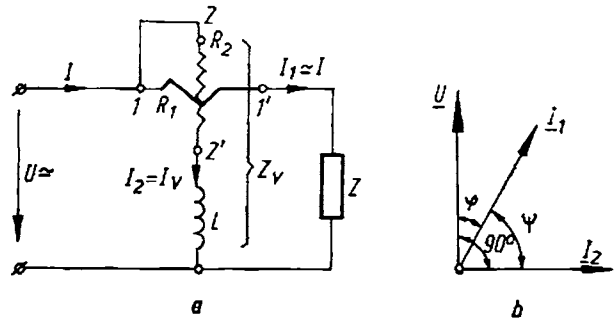
$$\alpha = KI_1I_2 \cos \varphi = \frac{K}{R_2 + R_{ad}} UI \cos \varphi = K_pUI \cos \varphi = K_pP, \qquad (5\text{-}15)$$

adică este proporțională cu puterea activă absorbită de receptor.

Pentru ca deviația acului aparatului să fie în sensul scării este necesară conectarea corectă în circuit a aparatului (intrarea I și U conectate la bornele marcate cu *, + sau ↓ ale wattmetrului); schimbarea sensului curentului într-un circuit inversează sensul cuplului activ, deci al deviației acului.

Wattmetrul electrodinamic se utilizează, cel mai frecvent, pentru măsurarea puterii în curent alternativ, deoarece în curent continuu puterea poate fi măsurată și cu ajutorul voltmetrului și ampermetrului (puterea rezultînd din produsul $UI = P$).

Prin construcție (formă potrivită a bobinelor) se urmărește compensarea scării pătratice a wattmetrului electrodinamic, realizîndu-se la construcțiile moderne scări uniforme.



Figl 5-19

Varmetrul electrodinamic (fig. 5-19, *a*) are conectat în locul rezistenței adiționale o inductanță adițională (L), care va produce decalajul ψ între curenții din cele două bobine.

Receptorul, de impedanță Z, introducînd un defazaj φ (fig. 5-19, *b*) în circuit, inductanța adițională la rîndul său defazează curentul I_2 cu $\pi/2$ în urma tensiunii. Defazajul între cei doi curenți $\psi = (\underline{I}_1, \underline{I}_2)$, va fi: $\varphi + \psi = 90°$ și $\psi = 90° - \varphi$.

Deviația α a aparatului va avea expresia:

$$\alpha = KI_1I_2 \cos \psi = \frac{K}{Z_V} UI \cos (90° - \varphi) = K_Q UI \sin \varphi = K_Q Q, \quad (5\text{-}16)$$

adică deviația α este proporțională cu puterea reactivă din circuit (K_Q este constanta varmetrului electrodinamic).

5.5. APARATE CU INDUCȚIE

Aceste aparate se bazează pe interacțiunea reciprocă dintre fluxurile magnetice alternative, create de una sau mai multe bobine, și curenții turbionari induși de aceste fluxuri în piese conductoare mobile (discul conductor). Constructiv, aceste aparate pot fi realizate cu un singur flux (flux unic), sau cu mai multe fluxuri (fluxuri multiple), clasificare ce se referă la numărul de „intersecții" cu echipajul mobil. În funcție de forma piesei conductoare mobile deosebim: aparate cu disc și aparate cu tambur. Aparatele cu inducție se utilizează numai în curent alternativ.

5.5.1. Dispozitivul cu inducție cu un flux

Principiul constructiv este prezentat în figura 5-20. Dispozitivul se compune dintr-o bobină fixă (*1*), parcursă de curentul I, și un disc de aluminiu (*3*) fixat pe axul aparatului (*4*), disc în care se induc curenții turbionari I_t. Bobina este așezată pe miezul de fier (*2*). Cuplul activ M_a este produs de interacțiunea dintre fluxul Φ_a și curenții turbionari induși de flux în discul de aluminiu, de intensitate I_t, ambele mărimi dependente de curentul I. Deviația α a aparatului depinde de curentul I de măsurat.

Dispozitivele de inducție cu un flux se pot folosi ca ampermetru, voltmetru sau logometru.

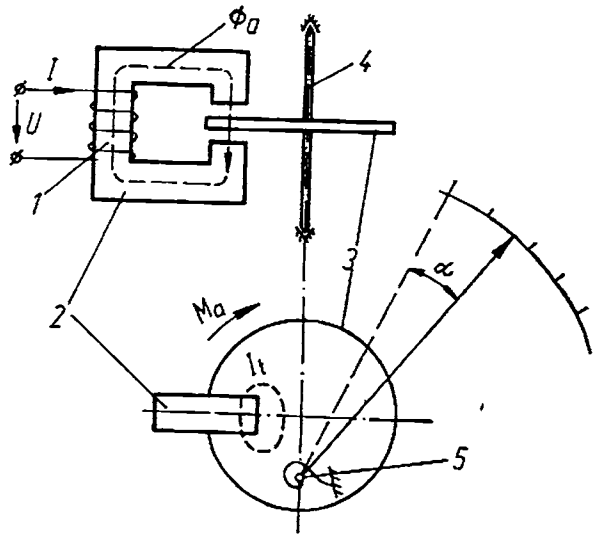


Fig. 5-20

5.5.2. Aparate cu inducție cu două fluxuri

Principiul de funcționare este prezentat în figura 5-21, Aparatul se compune din doi electromagneți a_1 și a_2, ale căror bobine sînt străbătute de curenți sinusoidali defazați cu unghiul φ, care produc fluxurile Φ_1 și Φ_2, respectiv cîmpurile magnetice corespunzătoare. Cele două bobine avînd N_1 și N_2 spire și fiind străbătute de curenții i_{a1} și i_{a2}, produc fluxurile magnetice Φ_1 și Φ_2, mărimi sinusoidale ca și curenții, adică:

$$\Phi_1 = \Phi_{1m} \sin \omega t,$$

$$\Phi_2 = \Phi_{2m} \sin (\omega t - \varphi).$$

Fluxurile Φ_1 și Φ_2 variabile în timp, induc în discul (A) pe care-l străbat, prin inducție electromagnetică, de-a lungul unor contururi închise Γ_{i1} și Γ_{i2}, tensiunile electromotoare:

$$u_{e1} = \int_{\Gamma_{i1}} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi_1}{dt},$$

$$u_{e2} = \int_{\Gamma_{i2}} \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi_2}{dt}.$$

Dacă r_1 și r_2 sînt rezistențele electrice ale discului de aluminiu, în lungul contururilor prin care se închid curenții i_1 și i_2, și dacă se neglijează inductivitățile contururilor Γ_{i1} și Γ_{i2}, tensiunile electromotoare determină în discul (A) curenții:

$$i_1 = \frac{u_{e1}}{r_1} = -\frac{1}{r_1}\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{r_1}\omega\Phi_{1m}\cos\omega t,$$

$$i_2 = \frac{u_{e2}}{r_2} = -\frac{1}{r_2}\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{1}{r_2}\omega\Phi_{2m}\cos(\omega t - \varphi).$$

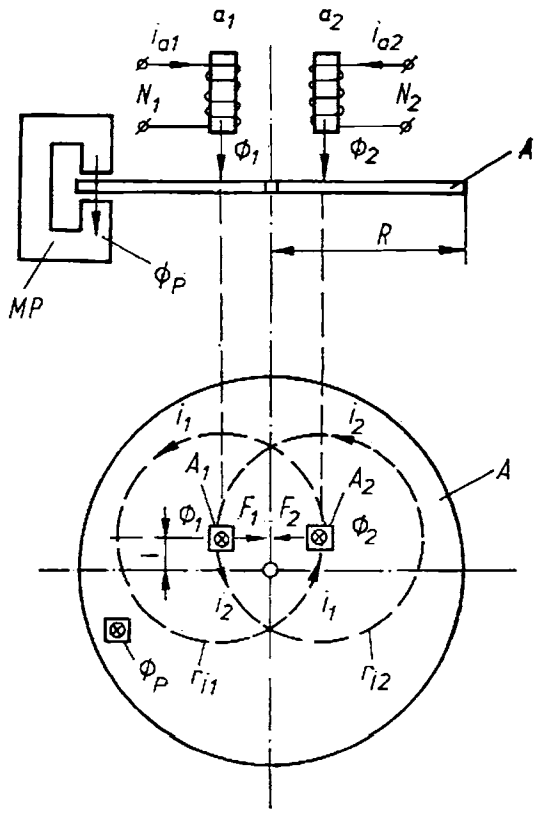


Fig. 5-21

În regiunile A_1 și A_2 din dreptul polilor celor doi electromagneți, fluxurile magnetice sînt diferite de zero, deci și curenții i_1 și i_2 pe aceste porțiuni au valori diferite de zero; ca urmare, asupra acestor regiuni ale discului vor acționa forțele F_1 și F_2 date de relațiile:

$$F_1 = K_1 \Phi_1 i_1 \text{ și } F_2 = K_2 \Phi_2 i_2.$$

Cuplul activ mediu pe durata unei perioade, determinat de aceste forțe, față de centrul O al discului, este:

$$M_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T (F_1 - F_2)\, d \cdot dt = K_M \cdot \Phi_{1m} \cdot \Phi_{2m} \cdot \sin \varphi,$$

unde: $K_M = \frac{\omega d}{2}\left(\frac{K_1}{r_1} + \frac{K_2}{r_2}\right)$ reprezintă o constantă și d este distanța de la o dreaptă ce unește punctele de aplicație a forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ și centrul 0 al discului.

În ipoteza unui disc omogen, a parametrilor R și L ai înfășurărilor de excitație constanți, a miezurilor electromagnetiților nesaturate, a mărimilor sinusoidale ale curenților i_{a1} și i_{a2}, fluxurile magnetice Φ_1 și Φ_2 sînt proporționale și în fază cu cei doi curenți care le-au produs

$$\Phi_1 = \Phi_{1m} \sin \omega t \cong K_1 i_{a1} = K_1 \sqrt{2}\, I_{a1} \sin \omega t,$$

$$\Phi_2 = \Phi_{2m} \sin (\omega t - \varphi) = K_2 i_{a2} = K_2 \sqrt{2}\, I_{a2} \sin (\omega t - \varphi).$$

Cuplul activ mediu în aceste condiții poate fi pus sub forma:

$$M = K_i I_{a1} I_{a2} \sin \varphi,$$

unde K_i reprezintă o constantă $K_i = 2K_M K_1 K_2$.

Cuplul activ mediu tinde să rotească discul metalic cu o turație n ⟨rot/s⟩, uniform accelerată.

Cuplul rezistent, sau de frînare, se realizează cu ajutorul magnetului permanent M_p, al cărui flux Φ_p intersectează discul de aluminiu (fig. 5-21), în care induce curenți turbionari, determinînd, în funcție de turație valoarea cuplului rezistent $M_r = K_r n$.

La egalitatea celor două cupluri (discul execută o mișcare uniformă), avem:

$$K_i I_{a1} I_{a2} \sin \varphi = K_r n,$$

de unde rezultă:

$$n = \frac{K_i}{K_r} I_{a1} I_{a2} \sin \varphi. \qquad (5\text{-}17)$$

Aparatele cu inducție pot fi utilizate ca voltmetre, ampermetre, wattmetre, dar cel mai frecvent sînt întîlnite în măsurarea energiei (contoare electrice). Sînt destinate măsurărilor industriale și de laborator.

5.5.3. Contorul cu inducție monofazat

Principiul de funcționare a contorului monofazat se bazează pe interacțiunea dintre două sau mai multe fluxuri. Contorul monofazat (fig. 5-22, *a*), se compune dintr-o bobină cu N_i spire străbătută de $\underline{I}_i = \underline{I}$, ce reprezintă curentul din circuit. Bobina de curent creează un flux $\underline{\Phi}_i$, iar bobina de tensiune cu N_u spire străbătută de curentul $\underline{I}_u$, creează la rîndul său fluxul $\underline{\Phi}_u$ (fig. 5-22, *b*).

Pentru simplificare se neglijează rezistența bobinei de tensiune în raport cu reactanța sa; în aceste condiții curentul $\underline{I}_u$ este practic decalat cu 90° în urma tensiunii $\underline{U}$. Între cei doi curenți vom avea decalajul $\psi = \pi/2 - \varphi$, unde φ reprezintă decalajul între tensiunea $\underline{U}$ și curentul $\underline{I}$ al receptorului cu impedanța $\underline{Z}$. Fluxurile alternative Φ_i și Φ_u sînt proporționale și în fază.

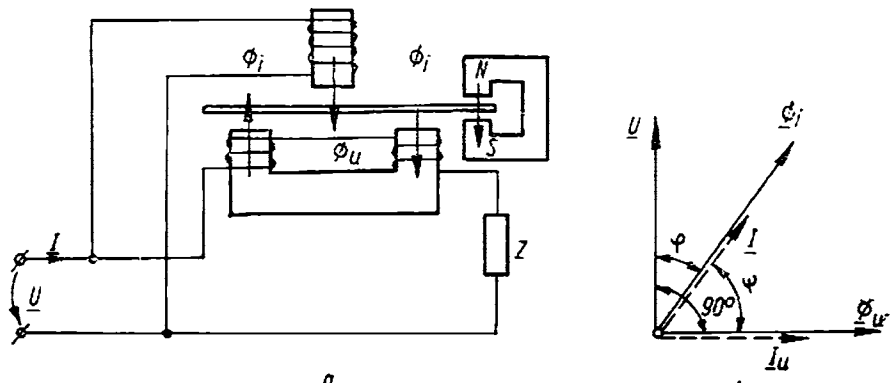


Fig. 5-22

cu curenții care le produc, străbat discul metalic și determină un cuplu activ ce poate fi scris:

$$M = K_t I_t I_u \sin \psi,$$

unde:

$$I_t = I; \quad I_u = \frac{U}{\omega L}; \quad \psi = \pi/2 - \varphi.$$

Cuplul activ mediu poate fi pus și sub forma:

$$M = K_t I \frac{U}{\omega L} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{K_t}{\omega L} UI \cos \varphi = K_p P;$$

cuplul este, deci, proporțional cu puterea activă $P = UI \cos \varphi$ din circuitul alternativ monofazat. Cuplul rezistent se produce la rotirea discului de aluminiu între polii unui magnet permanent; mișcarea de rotație a discului este uniformă cînd cele două cupluri sînt egale:

$$M = M_r; \quad K_p P = K_r n,$$

de unde rezultă:

$$P = \frac{K_r}{K_p} n. \tag{5-18}$$

Integrînd (5-18) pe un interval de timp de la zero la t, se va determina energia consumată în acel interval:

$$W_a = \int_0^t P \cdot \mathrm{d}t = \frac{K_r}{K_p} \int_0^t n \, \mathrm{d}t = K_w n_t,$$

sau

$$n_t = \frac{1}{K_w} \cdot W_a = K_c W_a, \tag{5-19}$$

unde: n_t reprezintă numărul de rotații efectuat de disc, în intervalul de timp considerat și K_c este constanta contorului, adică numărul de rotații ale discului ce corespunde unui consum de energie de 1 kWh.

Contorul electric fiind un aparat integrator, indicația se obține cu ajutorul unui mecanism de înregistrare, acționat prin șurub-melc de către axul discului de aluminiu. Energia consumată este afișată direct în unități de energie (frecvent în kWh).

Pentru măsurarea energiei active în circuitele trifazate se utilizează contoare trifazate (în general cu trei dispozitive de măsurat). Contoarele cu inducție se pot utiliza numai în curent alternativ. Contoarele cu inducție se construiesc cu valori nominale pînă la 650 V și 100 A, pentru legare directă în circuit (fig. 5-23, *a*) și de asemenea cu valorile de 100 V și 5 A pentru conectarea prin intermediul transformatoarelor de măsură de tensiuni (TV) și curenți mari (TI), după schema din figura 5-23, *b*.

Pentru măsurarea energiei active într-un sistem trifazat se utilizează contoare trifazate cu un element de rotație, cu două elemente de rotație sau contoare trifazate cu trei elemente de rotație. În cazul tensiunilor și curenților consumatorilor mai mari decît valorile nominale contoarele se conectează la secundarele transformatoarelor de măsură.

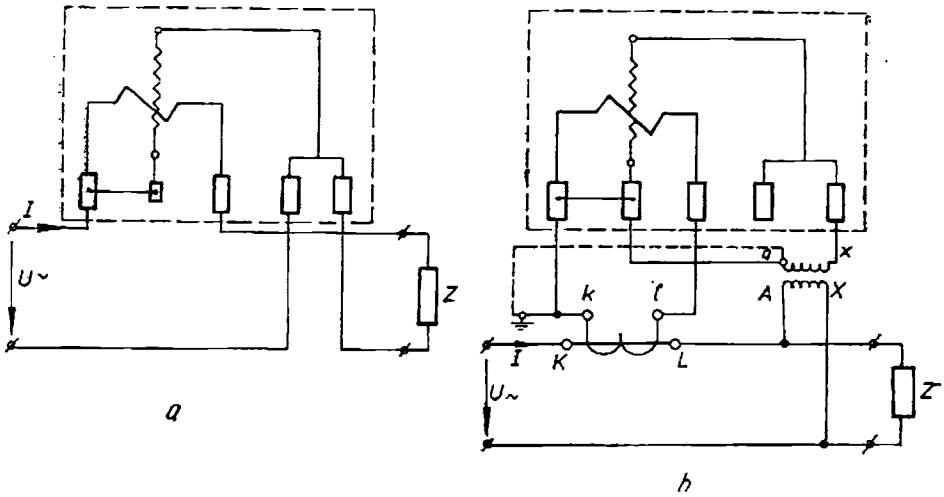


Fig. 5-23

5.6. APARATE TERMICE

Principiul de funcționare a aparatelor termice se bazează pe proprietatea conductoarelor metalice de a se alungi sub acțiunea termică a curentului electric ce le străbate. Aparatele termice (fig. 5-24) se compun dintr-un fir metalic (*1*) din platin-iridiu sau platin-argint, întins între două borne (b_1, b_2). Firul, care este termorezistent și are coeficient de dilatare mare, este străbătut de curentul a cărui intensitate I trebuie să fie măsurată. De mijlocul firului conductor este prins un fir neextensibil (*2*) iar acesta este legat de un fir de mătase (*3*) care se înfășoară pe rola (*4*) și care poate fi tensionat cu resortul lamelar din oțel (*5*). Cu ajutorul mecanismului (fir-rolă-arc de tensionare) variația lungimii conductorului se transformă în deviație unghiulară a acului indicator. Amortizarea oscilațiilor se realizează pe cale magnetică. La trecerea curentului I prin firul conductor (*1*) acesta dezvoltă o cantitate de căldură în funcție de rezistența R a firului și de intervalul de timp t, dată de relația:

$$Q_c = 0{,}24\ RI^2t.$$

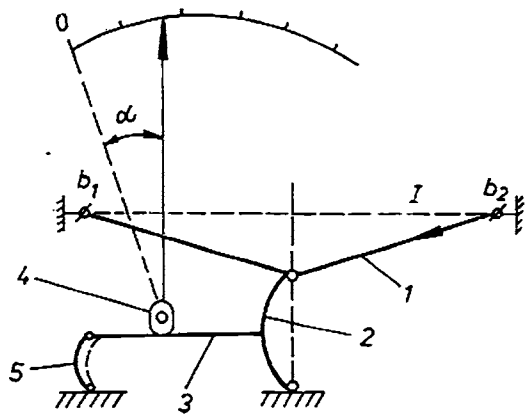


Fig. 5-24

Prin convecție și radiație firul disipă în mediul înconjurător o cantitate de căldură ce este o funcție de suprafața firului S și de intervalul de timp t:

$$Q_d = K_c S(\theta - \theta_0)\, t,$$

unde: K_c — coeficientul total de transmisie (disipare) a căldurii;
θ și θ^0 — temperaturile finale și inițiale (ale mediului înconjurător).

Cînd cele două cantități de căldură sînt egale ($Q_c = Q_d$), rezultă o supraîncălzire a firului conductor, o variație de temperatură $\Delta\theta$, care va determina o variație a lungimii firului (Δl), dată de relația:

$$\Delta l = l - l_0 = l_0 \beta \Delta\theta, \tag{5-20}$$

unde l și l_0 sînt lungimile finale și inițiale ale firului conductor. Înlocuind valoarea $\Delta\theta$ determinată din condiția de echilibru termic, (5-20) are forma:

$$\Delta l = l_0 \beta = \frac{0{,}24\, R}{K_c S} I^2 = K' I^2.$$

Mărimile R, β (coeficientul de dilatare liniară), S și K_c se consideră constante, reprezentate prin constanta globală K'.

Deviația acului indicator este proporțională cu alungirea firului conductor, deci cu pătratul intensității curentului de măsurat:

$$\alpha = f(\Delta l) = KI^2, \tag{5-21}$$

aparatul termic avînd o scară pătratică.

Transmiterea alungirii firului conductor la acul indicator se face cu amplificare datorită mecanismului aparatului.

Aparatele termice se folosesc ca ampermetre, voltmetre în curent continuu și alternativ. Aceste tipuri de aparate nu sînt influențate de cîmpurile magnetice exterioare și de frecvența mărimii de măsurat.

Dezavantajele aparatelor termice se referă la influența temperaturii mediului ambiant asupra indicațiilor, consum propriu ridicat, inerție mare (datorită inerției firului) și precizie de măsurare redusă (clasele 1,5—2,5).

Aparatele termice se utilizează pentru măsurări la frecvențe înalte, iar în ultima vreme acestea sînt tot mai mult înlocuite cu aparate magnetoelectrice prevăzute cu termocuplu.

5.7. APARATE ELECTROSTATICE

Funcționarea aparatelor electrostatice se bazează pe forța generalizată exercitată de cîmpul electric asupra armăturilor unui condensator (v. „Fizica").

În principiu, aparatele electrostatice se compun dintr-un sistem de armături fixe și mobile, ce alcătuiesc un condensator. Constructiv pot fi două tipuri de aparate: cu variație liniară (deplasarea liniară) a distanței între armături (fig. 5-25), sau cu variație a suprafeței active a armăturilor (deplasare unghiulară). Aparatele cu deplasare liniară se compun din armăturile fixe (*1*) și armătura mobilă (*2*), confecționate dintr-o tablă de aluminiu subțire, suspendată de o bandă flexibilă (*3*). Deplasarea armăturii mobile este transmisă acului indicator (care realizează o deplasare unghiulară), prin intermediul tijei (*4*) și a pîrghiei (*5*). Cuplul rezistent se realizează pe cale mecanică cu resortul (*6*), iar amortizarea oscilațiilor cu dispozitive pneumatice.

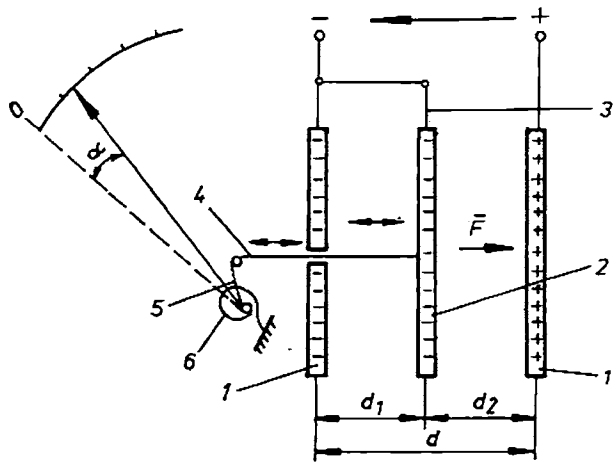


Fig. 5-25

În cazul alimentării aparatului electrostatic cu tensiune continuă cu polaritatea din figura 5-25, armătura mobilă (2) va fi respinsă de armătura (1) negativă și atrasă spre armătura (1) pozitivă, determinînd o deviație α a acului indicator. Forța de atracție se calculează cu teorema forțelor generalizate luînd în considerare energia înmagazinată în cîmpul electric al condensatorului plan:

$$F = \left(\frac{\partial W_e}{\partial d}\right)_{U=const.} = \frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{CU^2}{2}\right)_{U=const.} = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial d} = -\frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon S}{d^2} = K_1 U^2,$$

unde $C = \frac{\varepsilon S}{d}$ este capacitatea condensatorului plan, iar K_1 o constantă constructivă globală.

Întrucît cuplul rezistent este dat de un resort spiral, la echilibru se obține $K_2\alpha = K_1 U^2$ și deci:

$$\alpha = KU^2, \tag{5-22}$$

ceea ce arată că scala aparatelor electrostatice este pătratică.

La alimentarea cu tensiune alternativă a bornelor aparatului, semnul sarcinilor de pe armături variază ca și tensiunea dar forța F își păstrează același sens, iar unghiul de deviație α va fi o funcție de valoare efectivă a tensiunii sinusoidale. Aparatele electrostatice sînt folosite ca voltmetre pentru tensiuni continue sau alternative foarte mari, sînt gradate în kilovolți, au clasa de precizie 1,5, precum și un consum propriu extrem de redus. Indicațiile acestor aparate nu sînt influențate de cîmpurile magnetice exterioare, de forma curbei tensiunii de măsurat și de frecvență (pînă la ordinul 10^2 MHz).

Dintre neajunsurile aparatelor electrostatice menționăm: influența cîmpurilor electrice exterioare; modificarea permitivității dielectricului dintre armături, deci și a capacității aparatului, datorită influenței temperaturii și umidității; sensibilitate scăzută în zona inferioară a tensiunii de funcționare; supraîncărcare limitată de rigiditatea dielectricului aparatului.

5.8. APARATE ELECTRONICE

Tehnica de măsurare este dominată în prezent de echipamentele analogice, dar se manifestă tendinţe din ce în ce mai mult de implantare a tehnicii de măsurat numerice.

Aparatele electronice dobîndesc o largă răspîndire datorită performanţelor acestora, printre care consemnăm:

— viteză mare de răspuns la variaţia mărimii de măsurat (măsoară mărimi cu frecvenţă de ordinul megahertzilor);

— consum propriu foarte mic (neglijabil), fiind astfel recomandate la măsurarea unor mărimi electrice mici, de regulă a tensiunilor;

— posibilitate de amplificare repetată, pe cale electronică a mărimii de măsurat;

— mijlocesc convertirea în semnale electrice a mărimilor neelectrice;

— mărimile măsurate pot fi afişate numeric şi prelucrate simplu cu ajutorul calculatorului, ceea ce pledează pentru utilizarea tehnicii de măsurat numerice;

— statistic s-a dovedit că un operator uman comite de 20—60 ori mai multe erori la citirea unei indicaţii analogice, faţă de o indicaţie numerică, evident în condiţii identice.

Datorită realizărilor din domeniul electronicii se construiesc, în ultima vreme, o varietate mare de aparate electronice cum sînt: voltmetre, ampermetre, wattmetre, ohmmetre, frecvenţmetre, fazmetre, indicatoare de zero şi altele; construcţia şi funcţionarea acestora va fi prezentată în cadrul cursului „Electronică industrială şi automatizări".

5.9. MĂSURAREA INTENSITĂŢII CURENTULUI ELECTRIC

Intensitatea curentului electric se poate măsura fie prin metoda directă, aparatul utilizat fiind numit ampermetru (metoda cea mai des utilizată), fie prin metode indirecte.

Ampermetrele pot fi de tip magnetoelectric (pentru curent continuu), magnetoelectric cu redresor (pentru curent alternativ), electromagnetic, electrodinamic, termic (în curent continuu şi alternativ), cu inducţie (numai în curent alternativ). Ampermetrele se conectează în serie cu receptorul, iar unghiul de deviaţie α al echipajului mobil (al acului indicator) este o funcţie de intensitate a curentului electric I.

5.9.1. Măsurarea directă a intensităţii curentului electric

Metoda de măsurare directă a intensităţii curentului electric constă în introducerea în circuit, în serie cu receptorul, a unui dispozitiv de măsurat a curentului, de obicei cu citire directă. Măsurarea curenţilor de intensitate foarte mică (10^{-12} — 10^{-6}A) se face cu ajutorul galvanometrelor cu ac indicator sau spot luminos (în c.c.). Intensităţile cuprinse între 10^{-6} şi 10^{2} A se măsoară cu ajutorul apmermetrelor prin conectare directă în circuit. Intensităţile mai mari decît 10^{2}A se măsoară cu ampermetru cu şunt (în c.c.) sau cu transformatoare de curent (în curent alternativ).

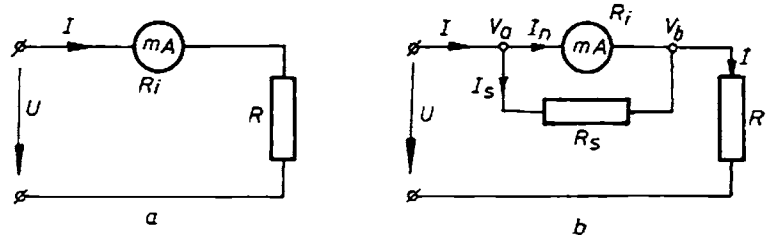


Fig. 5-26

La măsurarea intensității curentului, aparatul cu citire directă (fiind conectat în serie cu rezistența R) este străbătut de curentul de intensitate I ce urmează a fi măsurat (fig. 5-26, *a*). Rezistența R_i a ampermetrului trebuie să fie cît mai mică pentru a nu modifica sensibil curentul din circuit. Curentul din circuit trebuie să fie mai mic sau cel mult egal cu curentul nominal al ampermetrului I_n.

Pentru curenți mai mari decît curentul nominal al aparatului ($I > I_n$), se va conecta în paralel cu microampermetrul sau miliampermetrul, de rezistență interioară R_i, un rezistor cu rezistență R_s (fig. 5-26, *b*) de valoare foarte mică, denumită *șunt*. Mărimea R_s se determină cu relațiile:

$$V_a - V_b = I_n R_i = I_s R_s = (I - I_n)\, R_s,$$

de unde:

$$R_s = \frac{R_i}{K_I - 1}. \tag{5-23}$$

Raportul de șuntare $K_I = \dfrac{I}{I_n}$, denumit și raport de multiplicare al șuntului, este întotdeauna supraunitar.

Ampermetrele de laborator și aparatele universale sînt prevăzute cu mai multe șunturi, realizînd deci mai multe scări (fig. 5-27). Șunturile se confecționează din manganină sub formă de bobine, bare rotunde sau bandă; pentru curenți mici (de ordinul zecilor de amperi) acestea se montează în interiorul carcasei aparatului, iar pentru curenți mari șunturile se montează în exteriorul aparatului.

La măsurarea intensității curenutui alternativ de valoare mare, aparatul (de tip electromagnetic, electrodinamic) se conectează în circuit printr-un transformator de măsură de intensitate (*TI*), denumit și reductor de curent (fig. 5-28).

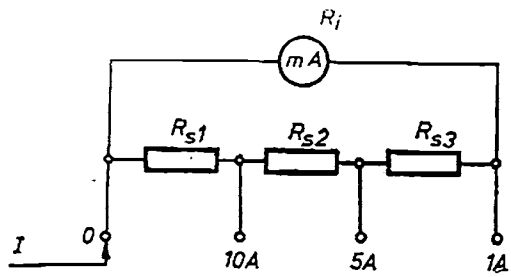


Fig. 5-27

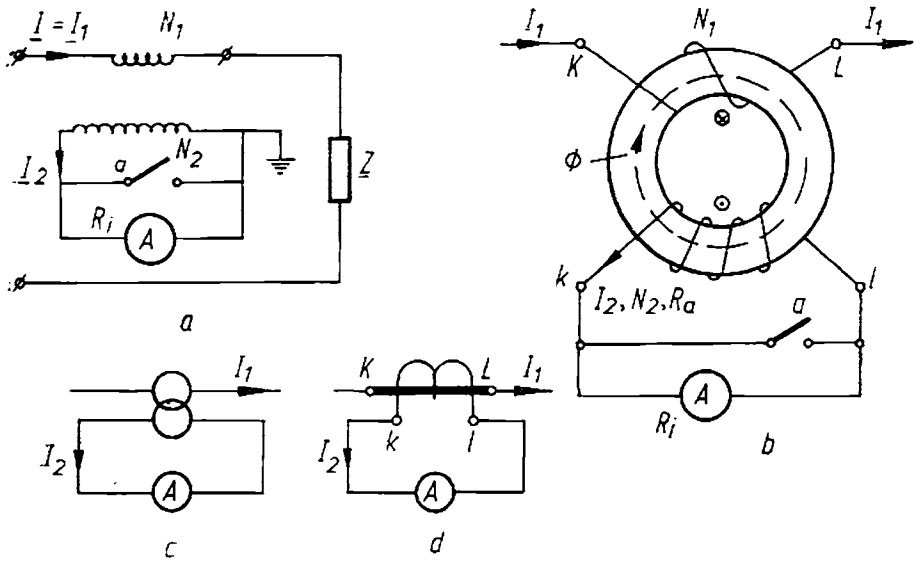


Fig. 5-28

Transformatorul de curent are rolul de a reduce curentul într-un raport convenabil, astfel încît în secundarul său valoarea efectivă maximă a curentului să fie 5 A (în unele cazuri 1 A).

Principiul de funcţionare a transformatorului de măsură de intensitate este identic cu cel al transformatoarelor de forţă, care funcţionează în regim apropiat de regimul în scurtcircuit (v. § 6.1). Înfăşurarea primară cu N_1 spire (spire puţine, sîrmă groasă) se leagă în serie cu receptorul de impedanţă Z, fiind străbătută de curentul I_1, ce trebuie măsurat (fig. 5-28, *a*). Înfăşurarea secundară cu N_2 spire (spire multe) este străbătută de curentul I_2 în circuitul căreia se conectează ampermetrul A. După cum vom arăta (v. § 6.1) $N_1\underline{I}_{10} = N_1\underline{I}_1 + N_2\underline{I}_2$.

Dacă se neglijează curentul de magnetizare, I_{10}, atunci $N_1\underline{I}_1 = -N_2\underline{I}_2$ sau, în valori efective: $I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2$, unde $\frac{N_2}{N_1} = K_I$ denumit raportul de transformare. Deoarece K_I este constant, rezultă:

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2. \tag{5-24}$$

Regimul nominal de funcţionare al acestui transformator este regimul de scurtcircuit; una din borne se leagă la masă (pămînt), cu scopul de a se evita pericolul de electrocutare (la deteriorarea izolaţiei dintre primar şi secundar), mai ales atunci cînd circuitul primar aparţine unei linii de înaltă tensiune (v. fig. 5-28, *a*).

Utilizarea transformatorului de intensitate în regimul de mers în gol ($I_2 = 0$) este periculoasă, deoarece în acest caz fluxul creşte la valori mari (determinate numai de solenaţia N_1I_1), saturînd miezul magnetic, iar tensiunea secundară poate atinge astfel valori periculoase pentru operator. De asemenea, creşterea pierderilor în fier va produce supraîncălzirea transformatorului; de aceea bornele secundare ale acesteia sînt prevăzute cu o cheie de scurtcircuitare (*a* în figura 5-28, *a*).

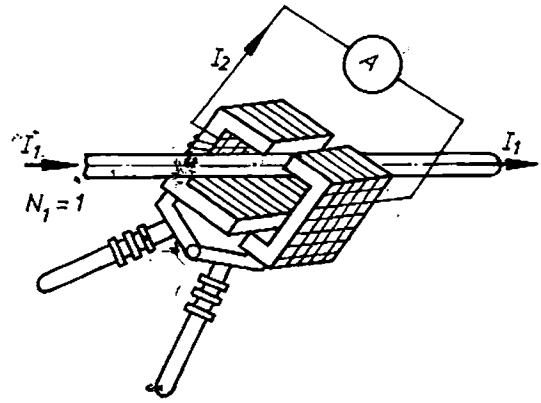


Fig. 5-29

Măsurările de verificare sau de laborator se fac de obicei cu ajutorul transformatoarelor de curent portabil (fig. 5-28, *b*), cu miezuri toroidale la care numărul de spire al primarului N_1 se realizează direct cu conductorul al cărui curent urmează a fi măsurat.

În figurile 5-28, *c* și *d*, sînt indicate două moduri de reprezentare a transformatoarelor de curent.

În circuitele de curent alternativ, măsurarea curenților de valori mari, fără întreruperea conductoarelor, se poate face cu ajutorul *cleștelui ampermetric* (fig. 5-29). În acest caz, conductorul parcurs de curentul de măsurat I_1 îndeplinește rolul de înfășurare primară, miezul de fier înconjurînd conductorul. Cleștele ampermetric are o precizie redusă.

5.9.2. Măsurarea indirectă a intensității curentului electric

Curenții electrici mari se pot măsura indirect cu ajutorul unor dispozitive bazate pe efectul Hall, deci cu *traductorul Hall*.

Un dispozitiv Hall (fig. 5-30, *a*) se compune dintr-un circuit magnetic cu întrefier, ce poate crea un cîmp de inducție magnetică B dacă spirele N_B sînt străbătute de un curent de intensitate I_B. Transversal pe direcția cîmpului de inducție magnetică B se amplasează o plăcuță semiconductoare

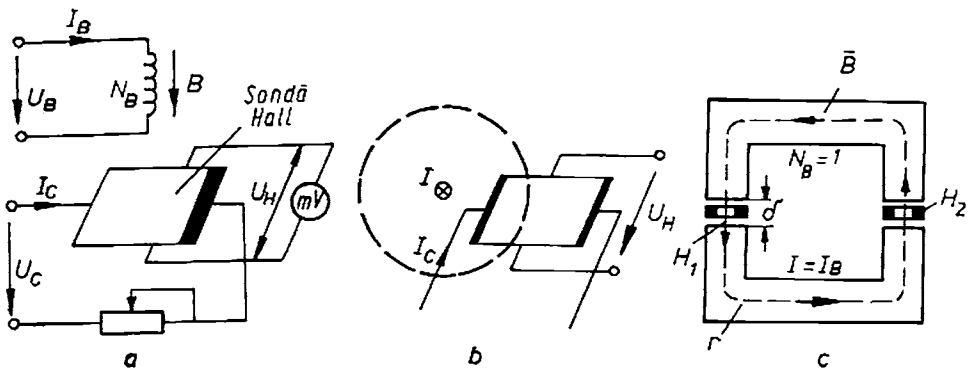


Fig. 5-30

(cu dimensiunile 4× 2 × 0,5 mm), străbătută longitudinal de curentul I_c, denumit curent de comandă.

În cazul unei caracteristici magnetice liniare a circuitului magnetic, inducția magnetică poate fi pusă sub forma:

$$B = K_B I_B N_B = K_N I_B.$$

Una din caracteristicile esențiale ale traductorului Hall este aceea de a produce o tensiune Hall (U_H) proporțională cu curentul de comandă I_c și inducția B a cîmpului magnetic în care este introdus:

$$U_H = R_H \frac{BI_c}{d_H}, \tag{5-25}$$

unde R_H este constanta Hall, iar d_H grosimea sondei.

În cazul amplasării sondei Hall în apropierea unui conductor parcurs de curentul I (fig. 5-30, *b*), ținînd cont de expresia inducției magnetice, tensiunea Hall se poate scrie:

$$U_H = K_H B I_c = K_H I_c K_N I_B = K I_c I_B,$$

unde K_H este o constantă ce ține seama de temperatură și de inducție și poartă numele de sensibilitate în sarcină a multiplicatorului Hall. Dacă curentul de comandă (I_c) se menține constant, se observă din (5-25) că tensiunea Hall (U_H) este o măsură a intensității curentului $I_B = I$, pusă în evidență de milivoltmetru (mV). Aparatul de măsurat poate fi etalonat direct în valorile lui I.

Montajul cu două sonde Hall (fig. 5-30, *c*), amplasate în două întrefieruri ale unui circuit magnetic și legate în serie, asigură o măsurare cu mai mare precizie. Tensiunile date de cele două plăcuțe se adună și se măsoară cu un milivoltmetru. Amplasarea conductorului ($N_B = 1$) în interiorul circuitului magnetic asigură un cîmp de inducție magnetică mai ridicată, deci o măsurare cu o precizie mai mare.

5.10. MĂSURAREA TENSIUNII ELECTRICE

Măsurarea tensiunii electrice se face cu ajutorul voltmetrului, aparat ce nu diferă principial de ampermetru. Voltmetrul este deci un miliampermetru, legat în serie cu o rezistență. Rezistența întregului aparat (R_V), are în acest caz valori foarte mari (100—1000 Ω pentru fiecare volt al scării). Voltmetrul se conectează în paralel cu receptorul de rezistență R, a cărui tensiune la borne urmează să se măsoare (fig. 5-31). Pentru a nu influența buna funcționare a circuitului în care se efectuează măsurarea, curentul ce străbate voltmetrul (I_V), trebuie să fie neglijabil în raport cu curentul I, adică $R_V \gg R$, iar puterea consumată de voltmetru trebuie să fie cît mai mică. Întrucît curentul ce străbate voltmetrul este proporțional cu tensiunea U, adică

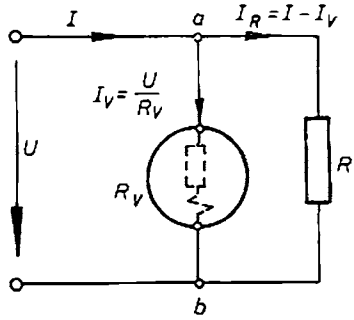


Fig. 5-31

$I_V = \frac{U}{R_V}$, deviația α a voltmetrului (rezistența R_V este constantă), va fi proporțională cu tensiunea U:

$$\alpha = f(I_V) = f\left(\frac{U}{R_V}\right) \text{ sau } \alpha = f(U).$$

Măsurarea tensiunilor electrice se poate face prin metode directe sau prin metode de compensație.

5.10.1. Măsurarea directă a tensiunii electrice

Metoda directă de măsurare a tensiunii utilizează aparate indicatoare (de tipul magnetoelectric) cu citire directă a valorii de măsurat. Extinderea limitei sau domeniului de măsurare al voltmetrului la o tensiune U (cu mult mai mare decît căderea de tensiune U_V pe dispozitivul de măsurat), se realizează prin conectarea în serie cu rezistența R_V a unei singure rezistențe adiționale R_a, de valoare convenabilă (fig. 5-32, *a*) sau a unei rezistențe adiționale multiple (fig. 5-32, *b*).

Pentru una sau mai multe limite de măsurare rezistența adițională se calculează avînd în vedere factorul de multiplicare n, de obicei un multiplu de zece:

$$n = \frac{U}{U_V} = 10;\quad 100; \ldots .$$

Tensiunea la borne are expresia:

$$U = U_V + U_a = I_V R_V + I_V R_a,$$

din care rezultă curentul voltmetrului (fig. 5-32, *a*):

$$I_V = \frac{U_V}{R_V} = \frac{U_a}{R_a},$$

de unde:

$$R_a = R_V \frac{U_a}{U_V} = R_V \frac{U - U_V}{U_V} = R_V\left(\frac{U}{U_V} - 1\right) = R_V(n - 1). \qquad (5\text{-}26)$$

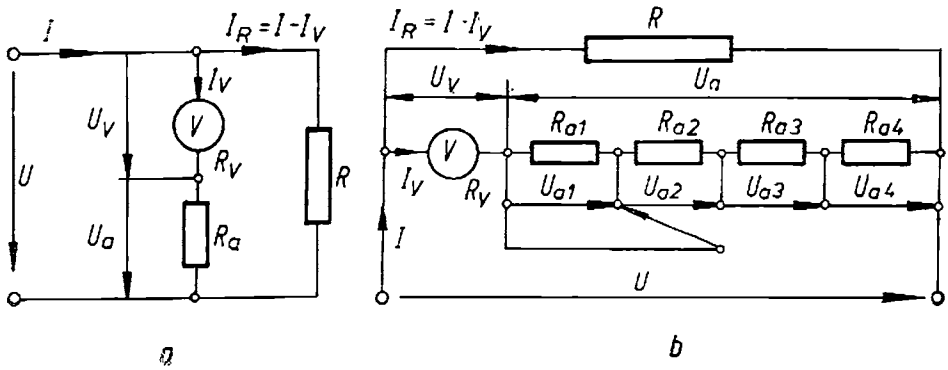


Fig. 5-32

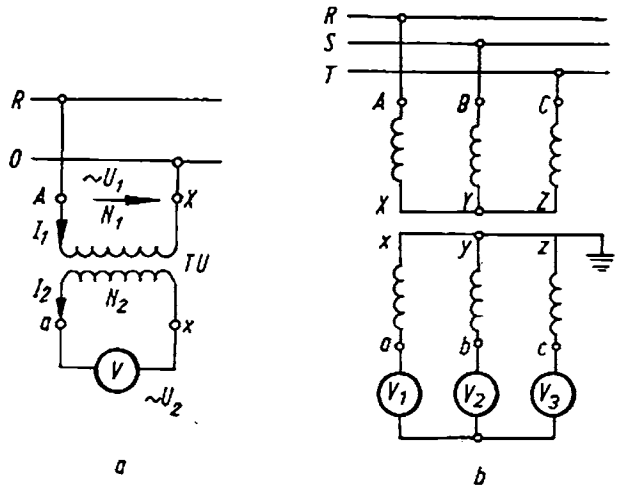


Fig. 5-33

Rezistențele adiționale se confecționează din manganină și se montează în interiorul aparatului, în cazul aparatelor cu limitele 750—1 000 V; la depășirea acestor domenii, montarea rezistențelor adiționale se face în exteriorul aparatului. Limita de măsurare poate fi extinsă și cu ajutorul divizorului de tensiune rezistiv, tensiunile repartizîndu-se proporțional cu rezistențele divizorului.

Pentru măsurarea directă a tensiunilor alternative monofazate și trifazate de valori mari (peste 750 V) se utilizează voltmetre electrostatice sau voltmetre obișnuite conectate prin intermediul transformatoarelor de măsură de tensiune denumite și reductoare de tensiune (fig. 5-33).

Transformatoarele de tensiune reduc tensiunea înaltă la valoarea standard a secundarului de 100 V, tensiune ce se măsoară cu ajutorul voltmetrelor obișnuite.

Tensiunile trifazate de linie se pot măsura cu două sau cu trei transformatoare monofazate, sau cu transformatorul de tensiune trifazat (fig. 5-33, *b*). Legarea la pămînt a secundarului transformatorului este obligatorie, asigurîndu-se astfel limitarea tensiunii maxime secundare la 100 V (în oricare punct al secundarului), deci protecția împotriva supratensiunilor.

Întrucît în secundarul transformatorului este conectată o impedanță mare (aceea a voltmetrului), regimul de funcționare este apropiat de regimul de funcționare în gol a transformatoarelor de forță (v. 6.1.4). În acest caz, cu o mică eroare, se poate considera că $U_1 = E_1$ și $U_2 = E_2$, iar raportul de transformare K_u este dat de relația:

$$K_u = \frac{U_1}{U_2} \cong \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = const.$$

Raportul nominal de transformare va fi: $K_{un} = U_{1n}/U_{2n}$ și deci

$$U_1 = K_{un} U_2, \tag{5-27}$$

unde U_{1n} și U_{2n} sînt tensiunile nominale, primare și secundare. Tensiunea primară de măsurat U_1 se obține (cu o anumită eroare) ca produs dintre ra-

portul nominal de transformare și tensiunea U_2 măsurată cu voltmetrul. Transformatoarele de măsură de tensiune utilizate în laboratoare au clasele 0,1; 0,2 și de obicei mai multe limite de măsurare.

5.10.2. Măsurarea indirectă a tensiunii

Măsurarea tensiunii prin metode de opoziție sau compensare

Compensatoarele reprezintă instalații de măsurat bazate pe metoda compensației (opoziției) deci a metodei de zero, realizarea echilibrului făcîndu-se manual sau automat.

Metoda de zero constă în compararea a două mărimi (tensiuni) una cunoscută și cealaltă necunoscută; la echilibru, diferența între ele este nulă (sînt egale, deci s-au compensat).

În momentul măsurării cu metoda de zero, nu se consumă energie din circuitul de măsurare fapt ce a impus metoda mai ales în cazul circuitelor electrice de putere mică și a sursclor de tensiune cu rezistențe interne mari.

Principiul metodei de compensație simplă este prezentat în figura 5-34; poziția cursorului potențialului R_p (divizor de tensiune rezistiv) se reglează pînă cînd galvanometrul (indicatorul de nul) indică poziția zero, moment în care U_x este compensată de căderea de tensiune $I_a R_c$:

$$U_x = I_a R_c = \frac{U_N}{R_p} R_c. \qquad (5\text{-}28)$$

Mărimile: U_N (tensiunea unui element normal Weston cu $U_N = 1{,}01865$ V), R_p, R_c (rezistența de precizie decadică ce alcătuiesc divizorul de tensiuni) și curentul auxiliar I_a (măsurat cu un instrument de precizie) fiind cunoscute, se poate calcula ușor U_x. Sursa de tensiune ce se măsoară (U_x) nu este parcursă de curent, determinîndu-se tensiunea de mers în gol.

Metoda de compensație prin substituție este prezentată în figura 5—35. Ea constă, de fapt, în două compensări a tensiunii elementului normal și a tensiunii necunoscute, cu ajutorul căderilor de tensiune produse de curentul auxiliar I_a. Curentul auxiliar I_a, produs de sursa auxiliară U_a, este reglat cu ajutorul reostatului reglabil R_p (întreruptorul K fiind pus pe poziția zero) și are valoarea $I_a = (10^{-3} \ldots 10^{-4})$ A. Pentru compensarea tensiunii U_N, întreruptorul K va fi pus pe poziția *1*; se modifică poziția cursorului C reglîndu-se R_c pînă ce galvanomentrul indică zero, adică $R_c = R_{c1}$ iar căderea de tensiune de echilibru va fi $I_a R_{c1}$ adică:

$$U_N = I_a R_{c1},$$

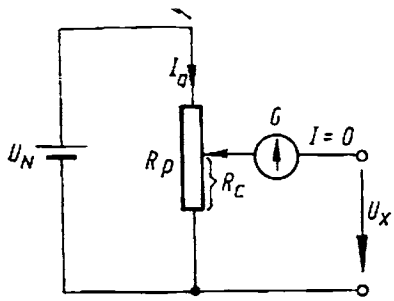


Fig. 5-34

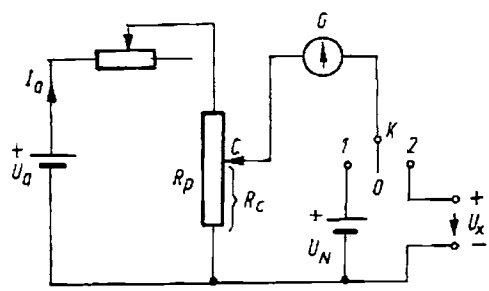


Fig. 5-35

unde R_{c1} este porțiunea rezistenței R_P pentru care s-a obținut $I_G = 0$. La aplicarea la borne a tensiunii de măsurat U_x(comutatorul K se fixează în poziția 2); se modifică din nou poziția cursorului pînă cînd galvanometrul va indica zero. În acest caz $R_c = R_{c2}$, căderea de tensiune $I_a R_{c2}$ va compensa tensiunea de măsurat U_x, dată de relația:

$$U_x = I_a R_{c2}.$$

În ambele experiențe (comutatorul fixat pe poziția *1* și *2*), curentul din circuitul auxiliar I_a a rămas neschimbat.

Din raportul celor două tensiuni se află tensiunea de măsurat:

$$U_x/U_N = I_a R_{c2}/I_a R_{c1} = R_{c2}/R_{c1} \text{ sau } U_x = U_N \frac{R_{c2}}{R_{c1}}, \qquad (5\text{-}29)$$

unde U_N, R_{c2} și R_{c1} sînt mărimi cunoscute.

5.11. MĂSURAREA REZISTENȚELOR

În funcție de natura rezistoarelor (metalice, electrolitice, de izolație etc.), de ordinul de valori ale rezistențelor lor și de precizia măsurării se utilizează o gamă largă de metode de măsurare. Metodele de măsurare a rezistențelor pot fi industriale sau de laborator (de exemplu: măsurarea în curent continuu a rezistoarelor metalice).

În capitolul de față ne vom ocupa de metodele industriale printre care amintim: metoda ampermetrului și voltmetrului, voltmetrului și rezistenței etalon, ohmmetrului etc., precum și de unele metode de laborator (metoda punților, metode diferențiale etc.).

5.11.1. Metoda ampermetrului și voltmetrului

Această metodă se bazează pe determinarea rezistenței electrice după legea lui Ohm. În acest caz cu cele două aparate se măsoară căderea de tensiune și curentul prin rezistența necunoscută R_x.

Montajul se poate executa în două moduri:

— amonte (voltmetrul se conectează la borna de intrare a ampermetrului și la o bornă a rezistenței);

— aval (voltmetrul se conectează la bornele rezistenței).

Montajul amonte (fig. 5-36, *a*) se caracterizează prin faptul că ampermetrul măsoară valoarea reală a intensității curentului, iar voltmetrul măsoară o tensiune mai mare decît tensiunea la bornele rezistenței și anume cu căderea de tensiune pe rezistența ampermetrului R_A.

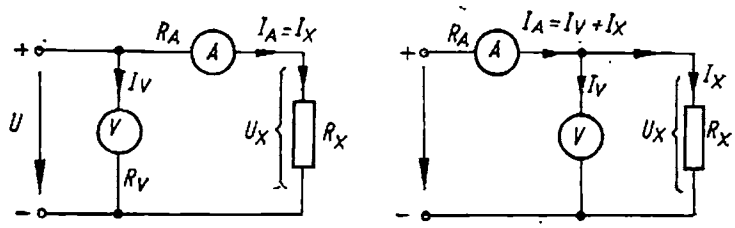


Fig. 5-36

Rezistența R_x se calculează cu relațiile:

$$I_A = I_x,\ U_V = I_x R_x + I_x R_A = I_x(R_x + R_A),$$

de unde:

$$R'_x = R_x + R_A = \frac{U_V}{I_x}. \tag{5-30}$$

Se observă că eroarea absolută, la măsurare (conform montajului) are valoarea: $\Delta R = +R_A$, iar eroarea relativă $\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_A}{R_x}$. Eroarea relativă tinde spre zero cînd R_x, tinde spre infinit, în consecință montajul amonte se recomandă în cazul rezistențelor mari și mijlocii ($R_x > 10\ \Omega$).

Montajul aval (fig. 5-36, *b*) are voltmetrul conectat în derivație numai pe rezistența R_x iar curentul măsurat de ampermetru este mai mare decît curentul prin rezistență: $I_A = I_V + I_x$. Ampermetrul măsoară intensitatea curentului prin rezistența echivalentă R constituită din conectarea în paralel a rezistențelor R_V și R_x:

$$R = \frac{R_V R_x}{R_V + R_x}.$$

Curenții ramurilor paralele sînt:

$$I_V = \frac{U_V}{R_V} = \frac{U_x}{R_V} \text{ și } I_x = \frac{U_x}{R_x},$$

iar:

$$R'_x = \frac{U_V}{I_A} = \frac{U_x}{\frac{U_x}{R_V} + \frac{U_x}{R_x}} = \frac{R_x}{1 + \frac{R_x}{R_V}}. \tag{5-31}$$

Eroarea absolută dată de montajul aval va fi:

$$\Delta R = R - R_x = \frac{R_V R_x}{R_V + R_x} - R_x.$$

Eroarea relativă:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\frac{R_V R_x}{R_V + R_x} - R_x}{R_x} = \frac{-R_x}{R_x + R_V}$$

este negativă și cu atît mai mică cu cît rezistența de măsurat este mai mică. Montajul aval se folosește la măsurarea rezistențelor mici.

Metoda voltampermetrică este simplă dar de precizie scăzută; se recomandă pentru măsurarea rezistențelor de ordinul $10^{-2}\ \Omega$ pînă la $10^5\ \Omega$. În curent alternativ metoda poate fi folosită pînă la frecvența de ordinul 10^3 Hz; peste această valoare a frecvenței, efectul pelicular modifică sensibil rezistența, metoda nefiind adecvată.

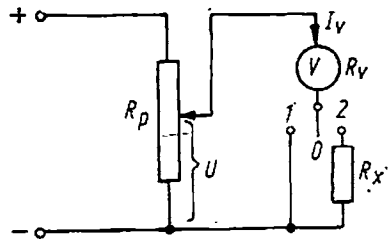


Fig. 5-37

5.11.2. Metoda voltmetrului

Reprezintă o metodă de comparație (fig. 5-37).

Indicația voltmetrului V dată prin conectarea directă la tensiunea U (K pe poziția *1*), se compară cu indicația voltmetrului conectat la aceeași tensiune U și rezistența adițională R_x(K pe poziția *2*).

Conectat pe poziția *1* voltmetrul măsoară tensiunea $U_{V1} = I_{V1}R_V$ și pe poziția *2* tensiunea $U_{V2} = I_{V2}R_V$. Întrucît valoarea tensiunii culeasă de pe reostatul potențiometrului este aceeași, rezultă valorile celor doi curenți:

$$I_{V1} = \frac{U}{R_V} \text{ și } I_{V2} = \frac{U}{R_V + R_x}.$$

Rezistența necunoscută R_x se determină prin compararea celor două tensiuni

$$\frac{U_{V1}}{U_{V2}} = \frac{I_{V1}R_V}{I_{V2}R_V} = \frac{U}{\frac{U}{R_V + R_x}R_V} = \frac{R_V + R_x}{R_V},$$

de unde:

$$R_x = \left(\frac{U_{V1}}{U_{V2}} - 1\right)R_V. \qquad (5\text{-}32)$$

În montajul din figura 5-37 poate fi utilizată o sursă de tensiune continuă de 4 V ($U = 4$V) de la un acumulator și se pot măsura astfel rezistențe cu valorile 25Ω pînă la 50 kΩ; dacă $U = 80$ V rezistențele pot fi între 2 kΩ și 4 MΩ.

5.11.3. Metoda voltmetrului și rezistenței etalon

Reprezintă de asemenea o metodă de comparație (fig. 5-38); compararea se face între două intensități ale curenților măsurați cu ampermetrul: curentul I_e ce străbate rezistența etalon R_e(cunoscută) și curentul I_x ce străbate rezistența de măsurat R_x. Conectarea în circuit a celor două rezistențe se face cu ajutorul comutatorului K, la aceeași tensiune $U = const.$, menținută prin modificarea poziției cursorului reostatului R_p.

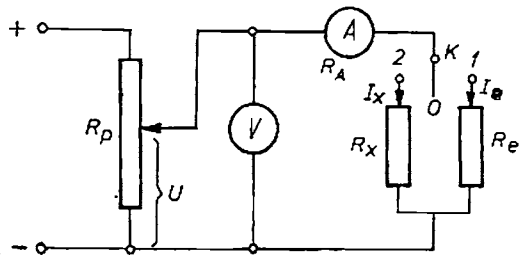


Fig. 5-38

Cei doi curenți sînt dați de relațiile:

$$I_e = \frac{U}{R_A + R_e},$$ comutatorul K în poziția *1*,

$$I_x = \frac{U}{R_A + R_x},$$ comutatorul K în poziția *2*.

Dacă se compară cele două măsurări se obține $\frac{I_e}{I_x} = \frac{R_A + R_x}{R_A + R_e}$, de unde rezultă:

$$R_x = \frac{I_e}{I_x}(R_e + R_A) - R_A. \tag{5-33}$$

În practică $R_e \gg R_A$ precum și $R_x \gg R_A$; rezultă astfel posibilitatea utilizării unei relații aproximative pentru determinarea rezistenței necunoscute:

$$R_x = \frac{I_e}{I_x} R_e. \tag{5-34}$$

5.11.4. Măsurarea rezistențelor foarte mici prin metoda compensației

Măsurarea se bazează pe compensarea căderilor de tensiune pe rezistența etalon R_e și rezistența necunoscută R_x cu o tensiune continuă reglabilă U_2, la valoarea zero a curentului în circuitul de compensație (fig. 5-39). Rezistența etalon R_e și rezistența necunoscută R_x se conectează în serie și sînt străbătute de curentul I_1, iar raportul lor este egal cu cel al căderilor de tensiune:

$$\frac{U_x}{U_e} = \frac{R_x}{R_e}.$$

Compensarea ambelor căderi de tensiune se face prin deplasarea contactului pe firul rezistent AB, anulîndu-se curentul în circuitul de compensație, deviația acului microampermetrului revenind la zero. Între raportul rezistențelor și al lungimilor avem relația $\frac{R_x}{R_e} = \frac{l_x}{l_e}$ de unde rezultă:

$$R_x = R_e \frac{l_x}{l_e}. \tag{5-35}$$

Funcționarea normală a schemei are loc la conectarea corectă a tensiunilor precum și la valoarea tensiunii U_2 mai mare decît a tensiunilor de compensat U_e și U_x.

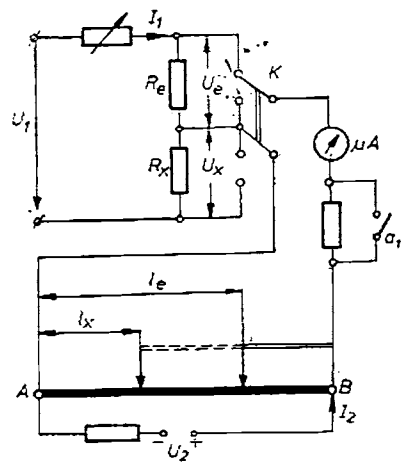


Fig. 5-39

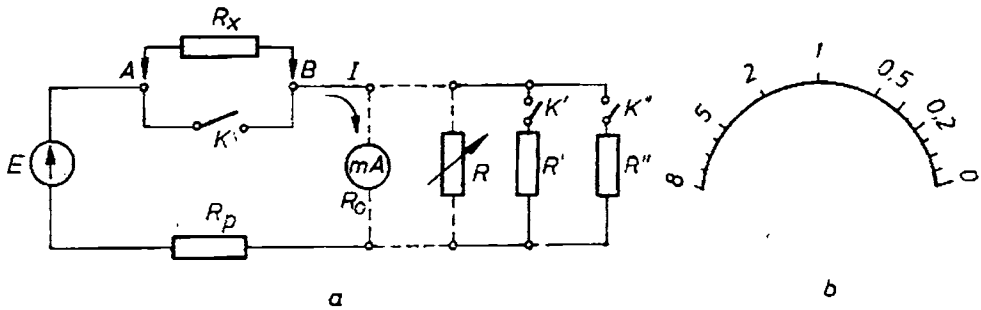


Fig. 5-40

5.11.5. Metoda ohmmetrului

Măsurarea directă a rezistențelor se face cu ajutorul ohmmetrului. În principiu, ohmmetrele se compun dintr-o sursă de tensiune continuă și un dispozitiv magnetoelectric cu bobină simplă sau cu două bobine încrucișate (tipul logometric).

Montajul se poate realiza cu dispozitivul de măsurat conectat în serie sau în paralel cu rezistența necunoscută.

Ohmmetrul serie (fig. 5-40, *a*) are o sursă de tensiune electromotoare constantă E, înseriată cu dispozitivul magnetoelectric și rezistența de protecție R_p; la bornele aparatului se conectează rezistența necunoscută R_x.

Curentul I prin miliampermetru este dat de relația:

$$I = \frac{E}{R_0 + R_p + R_x} = C_I \alpha,$$

iar deviația α are valoarea:

$$\alpha = \frac{I}{C_I} = \frac{E}{C_I(R + R_p + R_x)} = \frac{K_1}{K_2 + R_x}, \qquad (5\text{-}36)$$

unde K_1, K_2 sînt termeni constanți.

Scara aparatului este neuniformă (hiperbolică) cu o densitate mai mare a gradațiilor spre valoarea $R_x = \infty$ (fig. 5-40, *b*) și gradată invers.

Extinderea domeniului de utilizare a aparatului poate fi realizată prin șuntarea miliampermetrului cu rezistențele R' și R''. Ohmmetrul serie are clasa de precizie mică (2,5—5) și se utilizează pentru măsurarea rezistențelor de ordinul $10^2\Omega$ pînă la $10^4\ \Omega$. Precizia scade și mai mult în cazul măsurării rezistențelor mari.

Ohmmetrul derivație (fig. 5-41) se caracterizează prin conectarea în paralel a dispozitivului de măsurat la bornele rezistenței necunoscute R_x. Curentul I prin miliampermetru este dat de relația:

$$I = \frac{R_x}{R_x + R_0} \cdot \frac{E}{R_p + \dfrac{R_x R_0}{R_0 + R_x}} = C_I \alpha,$$

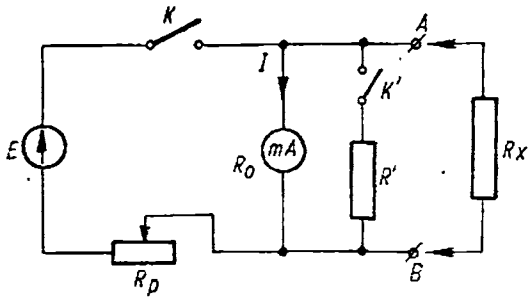


Fig. 5-41

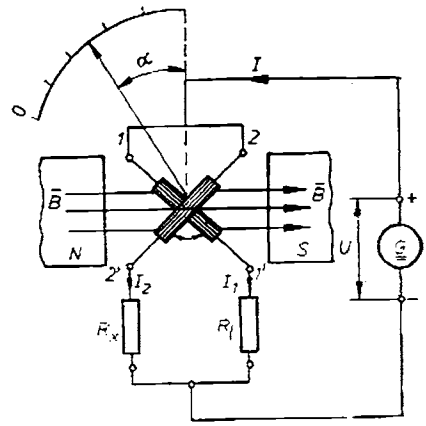


Fig. 5-42

iar deviația α are expresia:

$$\alpha = \frac{I}{C_I} = \frac{ER_x}{C_I R_P (R_x + R_0) + R_0 R_x} = \frac{R_x}{K_1 + K_2 R_x}, \qquad (5\text{-}37)$$

unde C_I, K_1, K_2 sînt constante.

La montajul derivație scara este neuniformă, gradată în sens normal (zero în partea stîngă). Domeniul de utilizare poate fi extins prin șuntare; clasa de precizie depinde de constanța tensiunii U și se utilizează pentru măsurarea rezistențelor cuprinse între 100 și 1 000 Ω.

Ohmmetrul logometric (megohmmetrul) se compune în principiu dintr-un dispozitiv logometric, sursa de tensiune ($U = 500—2500$ V), rezistența de comparație R_c și rezistența necunoscută R_x(fig. 5-42). Cele două bobine ale dispozitivului logometric sînt dispuse sub un unghi de 90°, într-un cîmp magnetic transversal uniform. La absența curenților prin bobine, acul indicator rămîne într-o poziție oarecare a scalei. Aparatul este destinat măsurării rezistențelor mari (rezistențe de izolație a instalațiilor electrice).

Limitele de măsurare ale megaohmmetrelor sînt între 0,2 MΩ—500 MΩ, uneori chiar și 10 000 MΩ.

După modul de conectare a rezistenței necunoscute, ohmmetrul logometric poate fi de tipul serie (fig. 5-42) sau derivație. Sursa de tensiune continuă poate fi un generator sau un redresor. În cazul dispozitivelor de măsurat de tipul logometrului magnetoelectric, deviația se poate obține din relațiile:

$$I_1 = \frac{U}{R}; \quad I_2 = \frac{U}{R_x},$$

de unde:

$$\alpha = K\frac{I_1}{I_2} = K\frac{U/R_c}{U/R_x} = K\frac{R_x}{R_c} = CR_x. \qquad (5\text{-}38)$$

În montajul din figura 5-42, logometrul măsoară rezistența electrică, valoare ce se indică direct pe scală. Indicația este practic independentă de valoarea sursei de alimentare U, clasa de precizie fiind mijlocie 1 sau 1,5.

5.11.6. Metoda punții

Metoda punții este o metodă indirectă ce se bazează pe compararea rezistenței necunoscute R_x cu rezistențe cunoscute, la echilibru.

Punțile pot fi *echilibrate* (cu echilibrare manuală, semiautomată sau automată) și *neechilibrate.*

Măsurarea rezistențelor mici (10^{-6} — 1) Ω se poate face cu puntea Thomson, iar rezistențele mijlocii pot fi măsurate cu puntea Wheatstone.

Puntea Wheatstone (fig. 5-43) este compusă din rezistențele cunoscute (R_1, R_2, R_3) și o rezistență necunoscută R_x, ce alcătuiesc brațele punții. În diagonala punții este amplasat un galvanometru, folosit ca instrument de nul (indică absența curentului din diagonala punții, adică realizarea stării de echilibru). Puntea mai este prevăzută cu o sursă de tensiune continuă, precum și rezistențe de reglaj și protecție R_6. La echilibrul punții $I_5 = 0$, punctele C și D sînt la același potențial, deci și tensiunile la bornele rezistențelor R_1, R_2 și R_x sînt egale două cîte două: $I_1R_1 = I_2R_2$ și $I_xR_x = I_3I_3$ unde $I_1 = I_x$ și $I_2 = I_3$.

Făcînd raportul ecuațiilor tensiunilor obținem: $\frac{R_1}{R_x} = \frac{R_2}{R_3}$, deci:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_3, \tag{5-39}$$

care constituie condiția de echilibru a punții Wheatstone.

Rezistența interioară a sursei și cea a instrumentului de nul nu influențează condiția de echilibru. Pentru realizarea echilibrului punții e necesar ca una sau mai multe dintre rezistențele R_1, R_2, R_3 să fie variabilă. Există variante de reglare în care raportul R_1/R_2 poate fi reglat continuu sau discret, iar R_3 menținută constantă.

Puntea dublă Thomson (fig. 5.44) este destinată măsurării rezistențelor cu valori mici, de ordinul (10^{-6} — 10^{-2}) Ω cum sînt: rezistențele de contact,

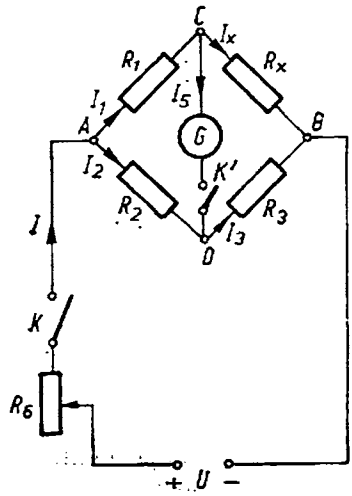


Fig. 5-43

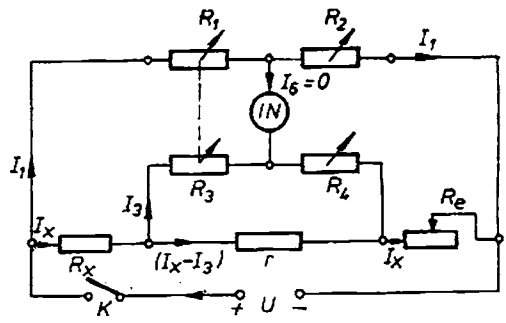


Fig. 5-44

rezistențele ampermetrelor, ale bobinelor de curent, ale wattmetrelor, rezistențele șunturilor, ale unor bobine, ale siguranței fuzibile etc.

Prin schema prezentată în figura 5-44 se elimină influențele rezistențelor de contact și a conductoarelor de legătură, îmbunătățind astfel performanțele punții și ale procesului de măsurare. Punțile duble se construiesc cu raportul $R_1/R_2 = R_3/R_4$ variabil și anume prin reglarea rezistențelor R_1 și R_3 (rezistență dublă în decade cu manete). Rezistențele R_2 și R_4 se fixează cu ajutorul unor fișe; R_e este o rezistență etalon.

La echilibrul punții ($I_6 = 0$), rezistențele ce alcătuiesc puntea verifică relațiile: $\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_3}{R_4} = 0$, adică $r \cong 0$ precum și corecția $\Delta R \cong 0$, de unde rezultă valoarea rezistenței necunoscute:

$$R_x = R_e \frac{R_1}{R_2},$$

relație asemănătoare cu (5-39), de la măsurarea cu ajutorul punții lui Wheatstone.

Rezistența r reprezintă un conductor electric de secțiune foarte mare și de lungime mică. Practic, puntea Thomson poate fi realizată în două variante: cu rezistența R_e variabilă și raportul R_1/R_2 constant, sau cu rezistența R_e constantă și raportul R_1/R_2 variabil.

5.11.7. Măsurarea și verificarea rezistenței de izolație a instalațiilor electrice

Măsurarea rezistenței de izolație a instalațiilor electrice

Poate fi realizată cu ajutorul megaohmmetrelor cu inductor (MΩ), măsurarea executîndu-se după montajele din figurile 5-45, cu instalațiile scoase de sub tensiune, în curent continuu sau alternativ (monofazat — figura 5-45, *a*, sau trifazat — figura 5-45, *b*).

În figurile 5-45 cu R_{12}, R_{23} și R_{31} s-au notat rezistențele de izolație dintre conductoarele de linie *1*, *2*, *3*, iar cu R_{10}, R_{20}, R_{30} rezistențele de izolație dintre conductoare și pământ, al cărui potențial este considerat nul ($V_0 = 0$). Prin conectarea megohmmetrului între conductoare sau între un conductor și pământ se pot măsura rezistențele de izolație arătate mai sus.

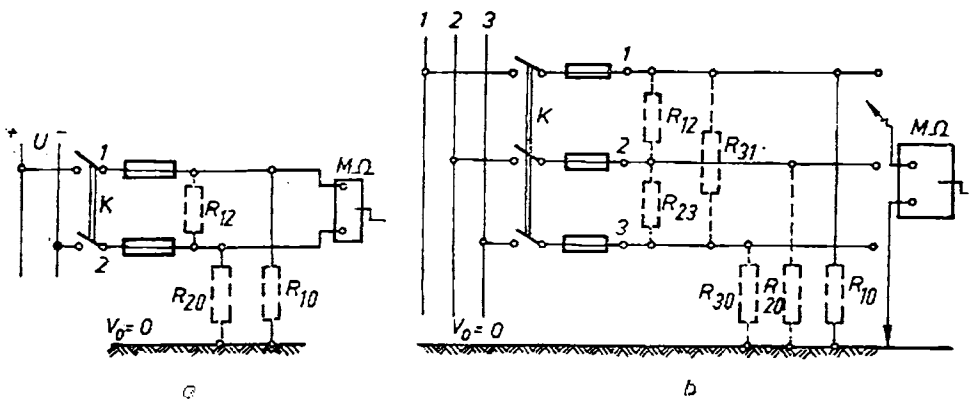


Fig. 5-45

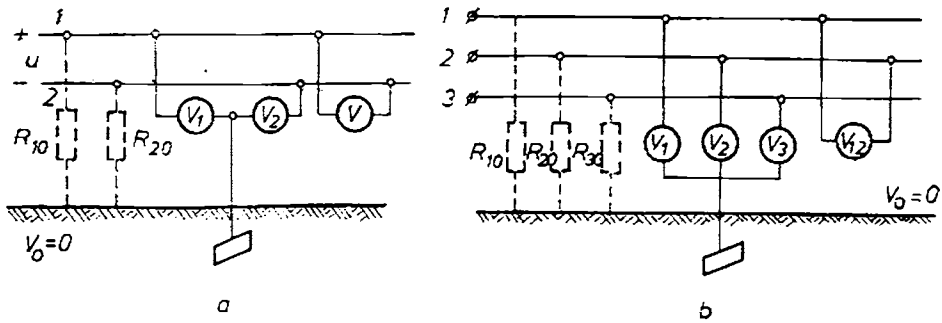


Fig. 5-46

Verificarea continuă a rezistențelor de izolație ale instalațiilor electrice sub tensiune se poate face prin metoda voltmetrelor electrice. În cazul instalațiilor de curent continuu și a celor de curent alternativ monofazat, conectarea voltmetrelor se face conform schemei din figura 5-46, *a*, iar în instalațiile trifazate după schema din figura 5-46, *b*.

Se consideră bune rezistențele de izolație ale conductoarelor dacă sînt satisfăcute relațiile:

— instalații de c.c. sau c.a. monofazat $U_1 = U_2 = U/2$,

— în instalații de c.a. trifazat $U_1 = U_2 = U_3 = U_{12}$.

Această metodă comodă și eficientă de verificare a rezistenței de izolație impune ca rezistențele interioare ale tuturor voltmetrelor să fie egale. Dacă rezistența de izolație dintre un conductor și pămînt este scăzută, voltmetrul corespunzător acestei faze va indica o tensiune mai mică decît celelalte voltmetre de fază.

La instalațiile de înaltă tensiune conectarea voltmetrelor se face cu ajutorul transformatoarelor de tensiune (identice). Schemele de mai sus pot fi înzestrate cu dispozitive de semnalizare și avertizare (sonore, vizuale) la apariția defectelor de izolație.

5.11.8. Măsurarea rezistenței electrice a prizelor de pămînt

Punerea la pămînt reprezintă conectarea electrică voită a unora din elementele instalației la priza de pămînt. *Priza de pămînt* este formată din unul sau mai mulți electrozi metalici introduși în sol, care au rolul de a asigura legătura directă cu pămîntul. Legătura între priză și instalații se face prin conductoare de legare la pămînt. *Punerile la pămînt* pot fi *de exploatare* (care asigură buna funcționare a instalației) și *de protecție* (legarea părților metalice la pămînt, care în mod normal nu sînt sub tensiune, contra pericolului de electrocutare).

Rezistența prizei de pămînt (R_p) constă din rezistența de trecere de la electrodul metalic (priză) așezat în sol, la pămînt; prin norme se impune ca $R_p \leqslant 4\Omega$.

Conductoarele utilizate la realizarea prizei de pămînt au o rezistivitate foarte mică, ca și electrodul propriu-zis al prizei. Ca urmare, rezistența prizei de pămînt depinde de conductibilitatea electrică a solului, deci de umiditatea acestuia, de conținutul de săruri, de temperatură etc. Periodic rezistențele de punere la pămînt trebuie să se măsoare. Conform normativelor, se leagă la pămînt: carcasele mașinilor, transformatoarelor și aparatelor electrice; păr-

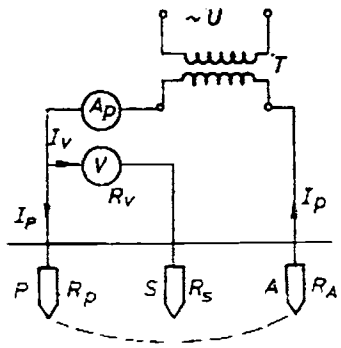


Fig. 5-47

țile metalice ale tablourilor de distribuție, învelișurile metalice ale cablurilor electrice, punctul neutru al transformatoarelor, mașinilor electrice etc.

Măsurarea rezistenței electrice a prizelor de pământ se face numai în curent alternativ, astfel se elimină efectele de polarizare a solului, de electroliză și corodare ce pot apărea la utilizarea curentului continuu. Rezistența unei prize de pământ (R_P) poate fi măsurată prin diferite metode, toate însă presupun o priză auxiliară A și o sondă S amplasată între priza P și priza A; distanța între A și P este de 40 m (v. fig. 5-47).

Metoda voltampermetrică. Conform schemei (fig. 5—47), transformatorul de separare T alimentează circuitul $P—A$ cu un curent electric de intensitate $I_P = 10$ A (pus în evidență de ampermetrul A_P). Cu ajutorul voltmetrului V se poate măsura tensiunea între priză și sondă, U_{PS}, curentul prin voltmetru (I_V) fiind foarte mic, practic neglijabil (R_V este foarte mare). În acest caz rezistența prizei (R_p) este calculabilă cu relația:

$$R_p = \frac{U_{PS}}{I_P}. \tag{5-40}$$

Dacă între cele două prize P și A (fig. 5-48, *a*), se aplică o tensiune continuă se poate observa ușor variația potențialului între punctele P și A de-a lungul liniilor ce unesc cele două prize P și A, măsurat cu ajutorul unui voltmetru V cu rezistență interioară foarte mare. În apropierea prizelor se constată o variație importantă a potențialului; în afara acestor zone potențialul rămîne aproape constant. Față de potențialul zero se pot defini diferențele de potențialul U_P și U_A (fig. 5-48, *b*), ale prizelor P și A, denumite tensiunile prizelor față de pământ.

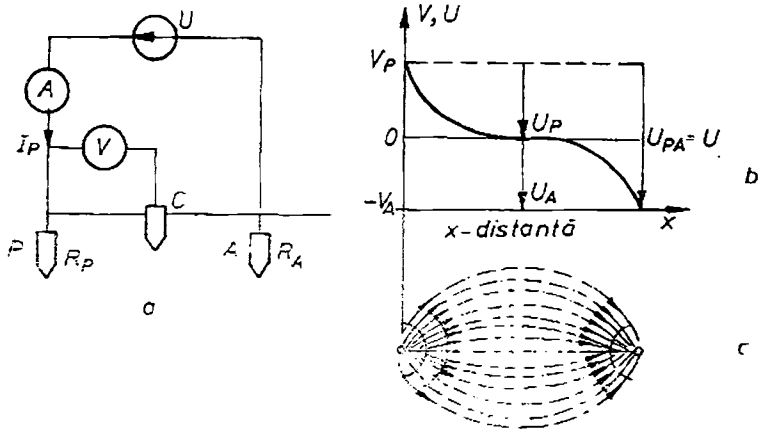


Fig. 5-48

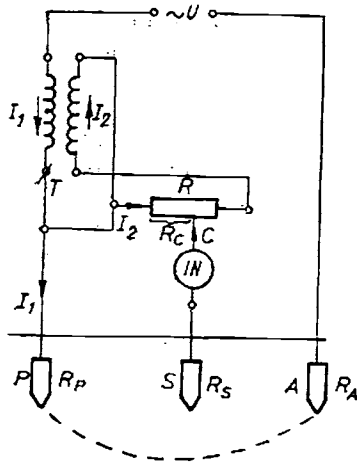


Fig. 5-49

Valoarea rezistențelor prizelor de pământ R_P și R_A se determină ca raport între tensiunea prizei și curentul care o parcurge:

$$R_P = \frac{U_P}{I_P}; \quad R_A = \frac{U_A}{I_A}. \qquad (5\text{-}41)$$

În practică, cel mai des se utilizează prize ale căror rezistențe sînt sub 4Ω.

Forma curbei de distribuție a potențialului pe suprafața pămîntului, de-a lungul liniei care leagă electrozii P și A, nu depinde de curent ci de configurația și modul de așezare al electrozilor (fig. 5-48, *c*). Curba de potențial ne permite să determinăm sub ce diferență de potențial se va găsi un om care vine în atingere cu două puncte ale pămîntului sau cu un punct al instalației pusă la pămînt și unul din punctele pămîntului. Punctele de pe suprafața pămîntului care se află în zona în care nu se observă nici o cădere de tensiune (zona $C-D$, fig. 5-48, *b*) sînt considerate puncte de potențial zero.

Măsurarea rezistenței prizelor de pămînt prin metoda compensației

Transformatorul T (fig. 5-49) are un raport de transformare 1 pe 1, deci $I_1 = I_2$. Primarul transformatorului este conectat în circuitul format din sursa alternativă U și rezistențele R_P, R_A. Schema mai cuprinde un indicator de nul (IN) conectat între sonda S și cursorul C al rezistenței R. Valoarea rezistenței R_C (parte din rezistența R funcție de poziția cursorului C) este o mărime cunoscută. Prin deplasarea cursorului C poate fi găsită poziția în care prin sonda S curentul să fie nul; cu alte cuvinte nu este cădere de tensiune pe rezistența R_S. În această situație căderile de tensiune în priza de pămînt I_1R_P și pe rezistența R_C (cunoscută) I_2R_C sînt egale; cum $I_1 = I_2$ rezultă:

$$R_P = R_C. \qquad (5\text{-}42)$$

Rezistențele prizelor auxiliare nu intervin în calcul. Indicatorul de nul de tip magnetoelectric se asociază cu o punte redresoare.

Măsurarea rezistențelor utilizînd metoda punții, cu anumite adaptări specifice a găsit o largă utilizare în localizarea defectelor în cablurile electrice fără a le dezgropa pe distanțe mari.

5.12. MĂSURAREA IMPEDANȚELOR

Impedanțele circuitelor de curent alternativ pot fi măsurate prin metode de deviație sau cu ajutorul punților (metode de zero). Aparatele destinate măsurării directe a impedanței sînt asemănătoare ohmmetrelor.

5.12.1. Metode de deviație

Impedanța se determină prin calcul pe baza măsurărilor efectuate cu scheme în care aparatele pot fi conectate după montajul amonte sau aval.

Modulul impedanței se determină cu raportul dintre indicațiile voltmetrului și ampermetrului (fig. 5-50, *a*), după o relație cunoscută: $Z =$

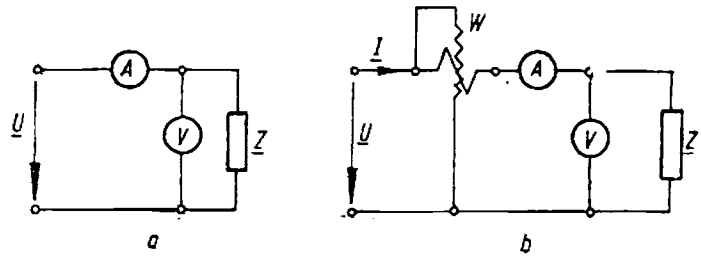


Fig. 5-50

$= \frac{U}{I}$. Pentru determinarea expresiei complexe a impedanței $\underline{Z} = Z|\underline{\varphi}$ a unui circuit de curent alternativ se va utiliza montajul din figura 5-50, *b*. Modulul impedanței ca și în cazul precedent se determină cu relația $Z = U/I$, iar faza $\varphi = \arccos\frac{P}{UI}$, din expresia puterii active P absorbite de impedanța Z, putere măsurată cu ajutorul wattmetrului W.

5.12.2. Metoda punții

Impedanțele $\underline{Z}$ (Z și φ) pot fi măsurate precis cu ajutorul punților în curent alternativ. Punțile de curent alternativ sînt de fapt punți de tip Wheatstone la care rezistențele laturilor s-au înlocuit cu impedanțe. Alimentarea punții se asigură de la o sursă de tensiune alternativă, iar în diagonala punții se montează un indicator de nul de c.a (fig. 5-51). În cazul alimentării cu o tensiune de frecvență industrială (50 Hz) indicatorul de nul este un galvanometru de vibrații (GV), iar în cazul frecvențelor acustice ($f < 20$ kHz) ca indicator de nul se poate utiliza o cască telefonică, un voltmetru electronic sau un osciloscop catodic. Întrucît în brațele punții sînt conectate impedanțe (mărimi complexe) condiția de echilibru este dată de egalitatea părților reale și imaginare ale impedanțelor. Curentul I_0 prin diagonala punții fiind zero ($I_0 = 0$), între curenții și căderile de tensiune din laturile adiacente ale punții se pot scrie relațiile:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_x; \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_3,$$

$$\underline{I}_1\underline{Z}_1 = \underline{I}_2\underline{Z}_2; \quad \underline{I}_3\underline{Z}_3 = \underline{I}_x\underline{Z}_x,$$

de unde se poate scrie condiția de echilibru: $Z_1/Z_x = Z_2/Z_3$ sau:

Notînd: $\underline{Z}_1\underline{Z}_3 = \underline{Z}_2\underline{Z}_x.$

$$\underline{Z}_1 = Z_1|\underline{\varphi}_1 = R_1 + jX_1,$$

$$\underline{Z}_2 = Z_2|\underline{\varphi}_2 = R_2 + jX_2, \qquad (5\text{-}43)$$

$$\underline{Z}_3 = Z_3|\underline{\varphi}_3 = R_3 + jX_3,$$

$$\underline{Z}_x = Z_x|\underline{\varphi}_x = R_x + jX_x,$$

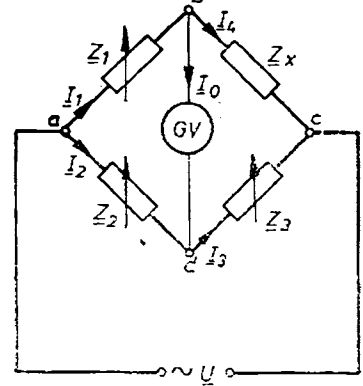


Fig. 5-51

atunci relația (5-43) este echivalentă cu relațiile:

$$\begin{cases} Z_1 Z_3 = Z_2 Z_x \\ \varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_x \end{cases} \tag{5-44}$$

sau:

$$\begin{cases} R_1 R_3 - X_1 X_3 = R_2 R_x - X_2 X_x \\ R_1 X_3 + R_3 X_1 = R_2 X_x + R_x X_2 \end{cases}$$

În starea de echilibru a punții trebuie îndeplinite condițiile de egalitate ale modulelor și argumentelor impedanțelor. Condițiile (5-44) dau posibilitatea realizării unui mare număr de scheme de măsurare; pentru obținerea mai comodă a echilibrului se preferă un număr restrîns de parametri variabili. Pe două din brațele punții se va conecta, spre exemplu, două rezistențe reglabile cunoscute, iar pe brațul al treilea se pune o impedanță reglabilă (cunoscută) formată dintr-o rezistență de precizie în serie sau în paralel cu un condensator fără pierderi; în ultimul braț se va conecta impedanța necunoscută Z_x.

5.12.3. Impedanțmetrul

Este un aparat modern destinat măsurării directe a modulului și fazei impedanței, $\underline{Z}_x$, și constă (fig. 5-52) dintr-un generator G de frecvență joasă (50—120 Hz) ce alimentează cu o tensiune în formă de dinți de ferăstrău (amplificatorul operațional A). În schema de principiu a impedanțmetrului cu U, I și φ s-au notat blocurile care măsoară tensiunea la bornele impedanței, curentul și defazajul φ. Aparatul indică direct Z_x și φ_x în limite largi de valori (1 Ω—10 MΩ și de la 0 la $\pm 90°$), fără reglaje complicate. Precizia de măsurare e redusă (2% pentru Z și 6% pentru φ).

În industrie se întîlnesc și alte variante de aparate cu ajutorul cărora se măsoară direct R și X (L sau C) într-o gamă largă de frecvențe (5 Hz la 500 kHz), dar tot cu precizie redusă.

5.13. MĂSURAREA CAPACITĂȚII CONDENSATOARELOR ELECTRICE

Condensatorul ideal, fără pierderi în dielectric, este caracterizat de capacitatea sa electrică C.

Condensatorul real (cu pierderi în dielectric) nu se poate caracteriza numai prin capacitatea sa electrică, ci printr-o schemă echivalentă ce conține atît o capacitate electrică ideală C_x cît și o rezistență ohmmică R_{cx}. Cei doi parametri ai schemei echivalente pot fi conectați în serie sau în paralel.

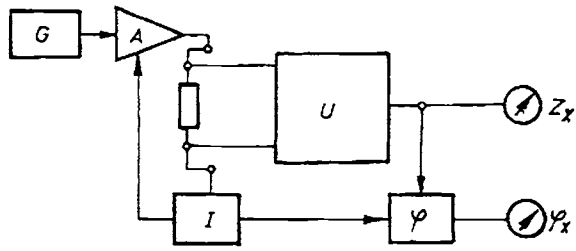


Fig. 5-52

Măsurarea capacității condensatorului electric poate fi realizată prin diferite metode, directe sau indirecte. Aparatele utilizate pentru măsurarea directă se numesc *faradmetre* și se construiesc cu dispozitive electromagnetice sau electrodinamice.

5.13.1. Metoda voltampermetrică

Capacitatea condensatoarelor alimentate în curent alternativ, la frecvența industrială de 50 Hz, poate fi măsurată prin metoda ampermetrului și voltmetrului (metodă industrială, indirectă) care nu ține seama de pierderile în dielectric.

Metoda are la bază faptul că un condensator de capacitate C_x, deci de reactanță X_{cx}, conectat la o tensiune alternativă de frecvență f și valoare efectivă U_x, absoarbe un curent I_x ce are valoarea efectivă dată de relația:

$$I_x = \frac{U_x}{X_{cx}} = 2\pi f C_x U_x,$$

deoarece $X_{cx} = \dfrac{1}{2\pi f C_x}$, rezultînd:

$$C_x = \frac{I_x}{2\pi f U_x}. \tag{5-45}$$

Măsurarea se poate face (ca și în cazul rezistențelor) cu ajutorul unor montaje amonte (fig. 5-53, *a*) sau aval (5-53, *b*).

Cu ajutorul potențiometrului R_h se pot obține diferite valori pentru tensiunea alternativă de alimentare a schemei:

— în cazul montajului *amonte:*

$$I_A = I_x,\ U_x = \sqrt{U_V^2 - (I_A R_A)^2},$$

rezultînd:

$$C_x = \frac{I_x}{2\pi f U_x} = \frac{1}{2\pi f\left[\left(\dfrac{U_V}{I_A}\right)^2 - R_A^2\right]^{1/2}} \tag{5-46}$$

— pentru schema *aval:*

$$U_x = U_v \text{ și } I_x = \sqrt{I_A^2 - I_V^2} = \sqrt{I_A^2 - \left(\frac{U_V}{R_V}\right)^2},$$

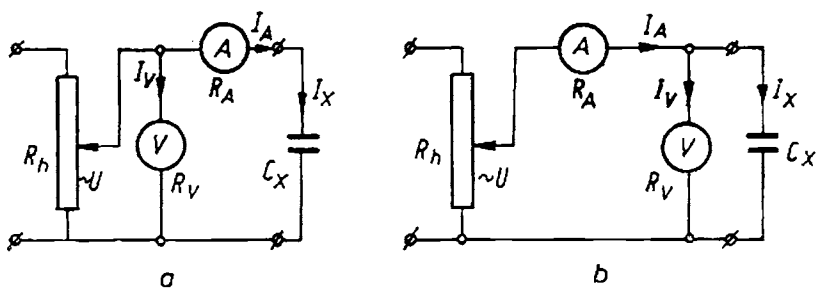


Fig. 5-53

astfel că:

$$C_x = \frac{I_x}{2\pi f U_x} = \frac{1}{2\pi f} \cdot \frac{\sqrt{I_A^2 - I_V^2}}{U_V}. \tag{5-47}$$

În funcție de valoarea capacității se recomandă unul din montaje; montajul amonte se va utiliza la măsurarea capacităților mici (0,1—10 μF), deci curenți mici, putîndu-se neglija R_E față de U_V/I_A; montajul aval la măsurarea capacităților mari, cînd circuitul capacității este străbătut de curenți mari și deci se poate neglija I_V față de I_A.

În cazul în care R_A este mult mai mic decît U_V/I_A, respectiv $I_V \ll I_A$, capacitatea poate fi determinată pe baza indicațiilor ampermetrului și voltmetrului, conectate în una din scheme, după o formulă aproximativă:

$$C_x = \frac{I_A}{2\pi f U_V}, \tag{5-48}$$

unde f este frecvența industrială.

5.13.2. Metoda voltmetrului, ampermetrului și wattmetrului

Reprezintă tot o metodă industrială indirectă, în care pierderile în condensator sînt luate în considerare printr-o rezistență R_x în serie cu capacitatea C_x. Conectarea celor trei aparate de măsurat poate fi realizată în montaj amonte (fig. 5-54, *a*) sau aval (fig. 5-54, *b*).

Impedanța circuitului echivalent serie al condensatorului este dată de relația:

$$Z_c = \sqrt{R_{cx}^2 + \left(-\frac{1}{C_x \omega}\right)^2} = \frac{U_c}{I_c},$$

iar capacitatea C_x poate fi exprimată sub forma:

$$C_x = \frac{1}{\omega [Z_c^2 - R_{cx}^2]^{1/2}}. \tag{5-49}$$

Parametrii schemei se determină prin calcul pe baza măsurărilor și anume:

— impedanța Z_c este raportul între tensiune și curent măsurate cu voltmetrul V și ampermetrul A;

— rezistența R_{cx} se poate calcula pe baza puterii active, măsurată cu wattmetrul W.

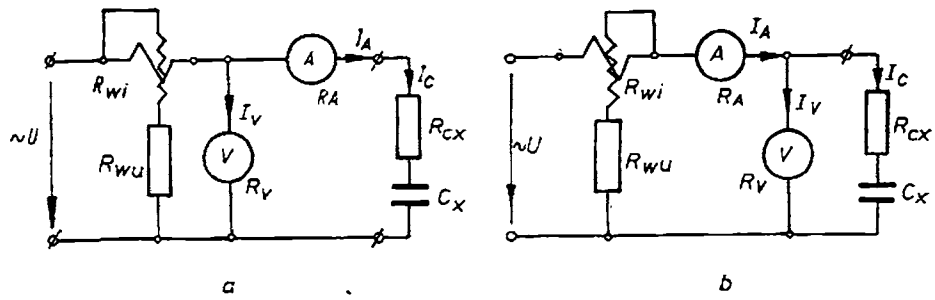


Fig. 5-54

Întrucît consumurile de putere activă ale aparatelor din schemă sînt mici și pot fi neglijate, în cazul măsurării capacităților mari ($I_c^2 R_{cx}$ reprezintă valori mari), parametrii schemei (pentru ambele montaje) se determină cu relațiile:

$$Z_c = \frac{U_c}{I_c} = \frac{U_V}{I_A}, \quad I_A \cong I_c, \quad P_w = I_A^2 R_{cx},$$

de unde rezultă:

$$R_{cx} = \frac{P_W}{I_A^2} \text{ iar } X_{cx} = \sqrt{Z_{cx}^2 - R_{cx}^2}.$$

Cu aceste valori (5-49) va avea forma:

$$C_x = \frac{I_A^2}{2\pi f[(U_V \cdot I_A)^2 - P_W^2]^{1/2}}. \tag{5-50}$$

Pentru a avea precizia indicată este necesar ca în relația rezistenței R_{cx} să se țină seama de tipul montajului (amonte sau aval).

5.13.3. Metoda comparației

Se utilizează la determinarea capacității C_x a condensatoarelor fără pierderi (fig. 5-55). Compararea se face între cele două capacități etalon C_e și necunoscută C_x, respectiv între curenții I_e și I_x absorbiți de cele două capacități. Rezistența R_A a ampermetrului se neglijează în raport cu reactanța capacitivă a condensatoarelor. Cu ajutorul comutatorului K se conectează cele două circuite, curenții indicați de ampermetru fiind dați de relațiile:

$$I_e = \omega C_e U, \quad I_x = \omega C_x U,$$

de unde rezultă:

$$C_x = C_e \frac{I_x}{I_e}. \tag{5-51}$$

Utilizînd o capacitate C_e variabilă (de valoare cunoscută), se poate regla pînă la obținerea egalității curenților ($I_e = I_x$), deci egalitatea capacităților $C_e = C_x$.

5.13.4. Metoda directă

Capacitatea condensatoarelor electrice se poate măsura indirect cu ajutorul faradmetrelor, denumite și capacimetre, realizate cu dispozitive de tip logometru electromagnetic sau electrodinamic.

Metoda se recomandă pentru măsurarea capacității condensatorului fără pierderi. Faradmetrul de tip logometru electromagnetic (fig. 5-56) se conectează cu o capacitate cunoscută (etalon) C_e și capacitatea necunoscută C_x în serie cu cele două bobine. La aplicarea tensiunii alternative U, bobinele logometrului vor fi parcurse de curenții I_1 și I_2, valorile cărora sînt invers proporționale cu impedanțele ramurilor. La echilibru, deviația α a echipajului mobil

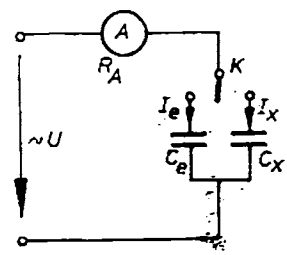


Fig. 5-55

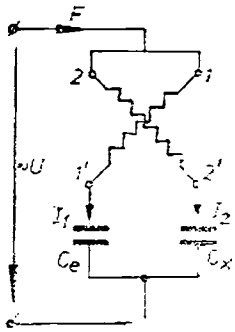


Fig. 5-56

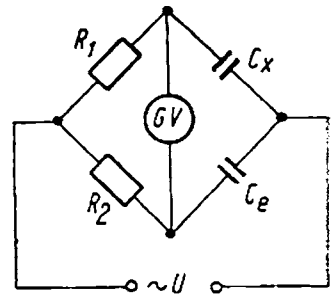


Fig. 5-57

al logometrului este proporțională cu raportul curenților la pătrat, deci cu capacitatea necunoscută:

$$\alpha = K\frac{I_1^2}{I_2^2} = K\left(\frac{U/Z_e}{U/Z_x}\right)^2 = K\left(\frac{Z_x}{Z_e}\right)^2 = f(C_x^2).$$

Aparatul are scala gradată în unități de capacitate (farazi).

5.13.5. Metoda punții

Capacitatea condensatoarelor poate fi măsurată cu diferite tipuri particulare de punți simple, de curent alternativ. Pe baza relațiilor (5-44) a punții pentru măsurarea impedanțelor, s-a conceput puntea din figura 5-57 pentru măsurarea capacității condensatoarelor fără pierderi. Măsurarea se realizează independent de valoarea frecvenței sursei, iar din condiția de echilibru $\dot{X}_x = \frac{R_1}{R_2}\dot{X}_e$ se determină valoarea capacității necunoscute:

$$C_x = \frac{R_2}{R_1}C_e.$$

În diagonala punții se conectează un galvanometru cu vibrații (GV) pentru frecvențe industriale.

5.14. MĂSURAREA INDUCTIVITĂȚILOR

Inductivitatea electrică L reprezintă un parametru specific al bobinelor sau înfășurărilor electrice. Bobinele electrice sînt caracterizate și de rezistența electrică R_b a spirelor. Într-o schemă electrică, o bobină este reprezentată printr-o rezistență R_b în serie cu inductivitatea proprie L. Rezistența R_b poate fi măsurată în curent continuu reprezentînd chiar rezistența firului bobinei. Bobinele uzuale utilizate în tehnică au inductivități cuprinse între 10^{-6} și (1—3) H.

5.14.1. Măsurarea inductivității proprii

Inductivitatea proprie poate fi măsurată prin metode indirecte, directe sau cu ajutorul punților.

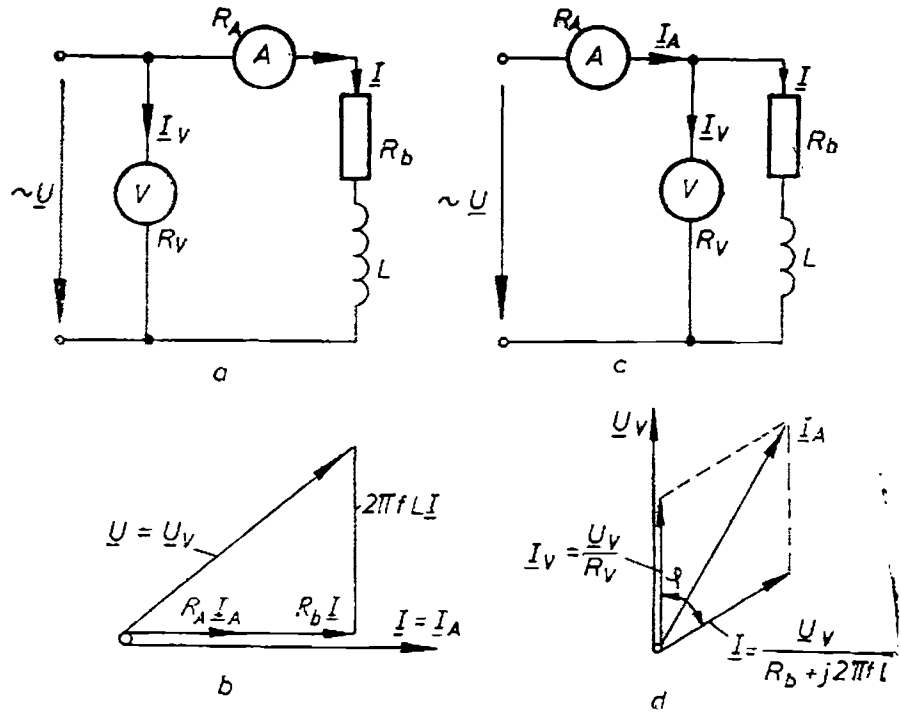


Fig. 5-58

Metoda voltampermetrică este o metodă industrială și constă în măsurarea tensiunii U și a curentului I ce străbate o bobină conectată la o sursă de tensiune sinusoidală cu frecvența f cunoscută (fig. 5-58). Prin calcul se determină apoi impedanța bobinei Z_b precum și inductivitatea proprie L:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R_b^2 + (2\pi fL)^2},$$

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{Z_b^2 - R_b^2} = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R_b^2} \qquad (5\text{-}52)$$

In funcție de mărimea rezistenței bobinelor se poate folosi metoda amonte (fig. 5-58, *a*) sau aval (fig. 5-58, *c*).

Aparatele conectate în schemă vor măsura tensiunea U_V și intensitatea curentului I.

În figura 5-58, *b* s-a reprezentat diagrama fazorială a montajului amonte, pe baza căreia se poate scrie relația:

$$U_V^2 = (I_A R_A + I_A R_b)^2 + (I_A 2\pi fL)^2,$$

de unde:

$$L = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{U_V^2}{I_A^2} - (R_b + R_A)^2}. \qquad (5\text{-}53)$$

Curentul măsurat de ampermetru în cazul montajului aval se poate determina din diagrama fazorială (fig. 5-58, *d*), astfel:

$$I_A^2 = I_V^2 + I^2 + 2I_V I \cos \varphi,$$

iar inductivitatea proprie a bobinei poate fi scrisă:

$$L = \frac{1}{2\pi f}\left[\frac{U_V^2 + 2R_b R_V U_V^2}{I_A^2 R_V^2 - U_V^2}\right]^{1/2}. \tag{5-54}$$

Determinarea mai puțin pretențioasă, care nu ține seama de erorile de metodă, la cele două montaje analizate mai sus, se poate face pe baza calculului impedanței (Z_b), ca raport al celor două mărimi măsurate U_A și I_V:

$$Z_b = \frac{U_V}{I_A} \sqrt{R_b^2 + (2\pi f L)^2},$$

iar inductivitatea:

$$L = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\left(\frac{U_V}{I_A}\right)^2 - R_b^2}. \tag{5-55}$$

Montajul amonte se recomandă pentru cazul în care $R_b \gg R_A$ (curenți mici și tensiuni mari), iar montajul aval pentru curenți mari ($I \gg I_V$) și tensiuni mici.

Metoda directă constă în măsurarea inductivității proprii L cu ajutorul henrymetrului (dispozitiv electrodinamic, de tip logometru). Henrymetrul (fig. 5-59) are o bobină fixă străbătută de curentul I și două bobine mobile străbătute de curenții I_1 și I_2. Pentru simplificare, se neglijează impedanța celor două bobine față de reactanțele inductive ωL_c și ωL, cu care sînt conectate în serie, caz în care curenții sînt dați de relațiile:

$$I_1 = \frac{U}{\omega L_c}, \quad I_2 = \frac{U}{\omega L}.$$

Întrucît deviația α a logometrului electrodinamic este o funcție de raportul curenților ce străbat bobinele mobile, pe baza relațiilor de mai sus obținem:

$$\alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = f\left(\frac{\frac{U}{\omega L_c}}{\frac{U}{\omega L}}\right) = f\left(\frac{L}{L_c}\right) = f(L),$$

deci scara henrymetrului poate fi gradată în unități de inductivitate.

Metoda punții poate fi realizată cu diferite scheme de montaj. În figura 5-60 se prezintă o punte simplă de tip Maxwell pentru măsurarea inductivității proprii (compară L_x cu L). Echilibrarea punții se poate obține prin variația lui L_2, a raportului R_3/R_4 precum și a rezistențelor R_1 și R_2. Din condiția de echilibru se obține:

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} = L_c \frac{R_1' + R_1}{R_2}. \tag{5-56}$$

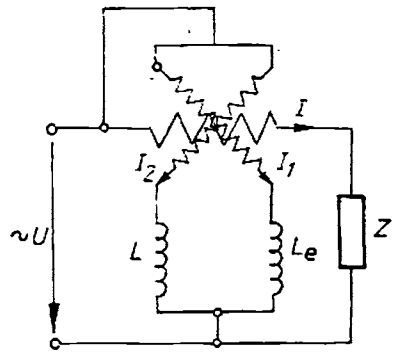


Fig. 5-59

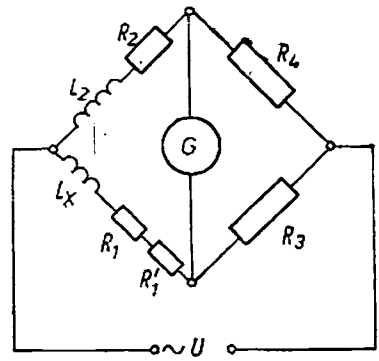


Fig. 5-60

Dintre punțile folosite frecvent la măsurarea parametrilor bobinelor mai prezentăm puntea Maxwell-Wien (fig. 5 - 61). La echilibrul punții rezultă următoarele relații de calcul:

$$L_x = R_1 R_3 C_0,$$

$$R_x = \frac{R_1 R_3}{R_0}. \tag{5-57}$$

Factorul punții reglabil în trepte îl constituie $R_1 R_3$.

5.14.2. Măsurarea inductivităților mutuale

Inductivitatea mutuală M_{12} între două bobine, cu inductivitățile proprii L_1 și L_2, poate fi măsurată prin diferite metode.

La legarea în serie adițională a două bobine (cu borne polarizate și marcate distinct) inductivitatea totală va fi formată din inductivitățile proprii la care se adună inductivitatea mutuală, iar în cazul conectării în serie diferențială (în opoziție) din cele două inductivități proprii se va scădea inductivitatea mutuală. Legarea serie-adițional și serie-diferențial se utilizează în metoda indirectă de măsurare a inductivităților mutuale.

Metoda indirectă constă în măsurarea inductivităților totale adiționale L_{ad} și diferențiale L_{op} a două bobine cuplate magnetic și determinarea prin calcul a inductivității mutuale M_{12}. Pentru măsurarea inductivității L_{ad} (prin una din metodele de măsurare a inductivității proprii cunoscute), cele două bobine se leagă în serie — adițional (fig. 5-62, *a*), iar la măsurarea inductivității L_{op} se utilizează legarea din figura 5-62, *b*.

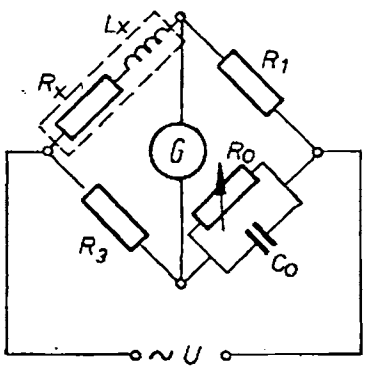


Fig. 5-61

Valorile inductivităților totale măsurate sînt date de relațiile:

$$L_{ad} = L_1 + L_2 + 2M_{12},$$

$$L_{op} = L_1 + L_2 - 2M_{12}. \tag{5-58}$$

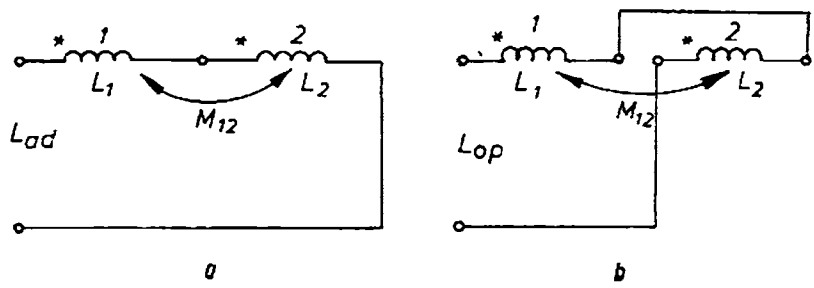


Fig. 5-62

Inductivitatea mutuală rezultă prin scăderea inductivității L_{op} (de valoare mică) din inductivitatea L_{ad} și împărțind cu 4:

$$M_{12} = \frac{1}{4}(L_{ad} - L_{op}). \tag{5-59}$$

Metoda voltampermetrică reprezintă tot o metodă indirectă (fig. 5 - 63). Conform schemei o bobină este alimentată cu tensiunea sinusoidală u_1, de frecvență f_1, iar la a doua bobină tensiunea U_2 se măsoară cu ajutorul voltmetrului V_2. Valoarea efectivă a curentului I_1 variabil în timp, ce străbate bobina de inductivitate L_1, poate fi măsurat cu ampermetrul A_1 și produce un flux variabil în timp ce străbate și spirele bobinei 2 de inductivitate L_2. Acest flux induce în bobina 2 o tensiune electromotoare a cărei valoare este dată de relația $e_2 = M_{12}\frac{di_1}{dt}$.

În cazul în care se neglijează impedanța bobinei 2 față de rezistența mare R_{V2} a voltmetrului V_2 avem: $e_2 = -M_{12}\frac{di_1}{dt} = u_2 = i_2 R_{V2}$, sau $-j\omega M_{12}\underline{I}_1 = \underline{I}_2 R_{V2} = \underline{U}_2$, adică $\omega M_{12} I_1 = R_{V2} I_2 = U_2$.

Inductivitatea mutuală M_{12}, poate fi pusă sub forma:

$$M_{12} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{U_2}{2\pi f_1 I_1}. \tag{5-60}$$

Metoda punții. Pentru măsurarea inductivității mutuale se utilizează diferite tipuri de punți dintre care prezentăm, ca exemplu, puntea CAREY-FORSTER (fig. 5-64). Puntea are o latură cuplată magnetic și o capacitate etalon C_1, utilizată ca element de comparație pentru determinarea inductivității mutuale M_x. Puntea mai are rezistențele variabile r, R_1 și R_4, iar impedanța în brațul AD este practic zero ($X_3 \simeq 0$, $R_3 \simeq 0$). Echilibrarea punții

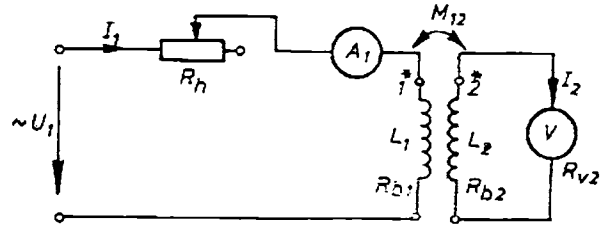


Fig. 5-63

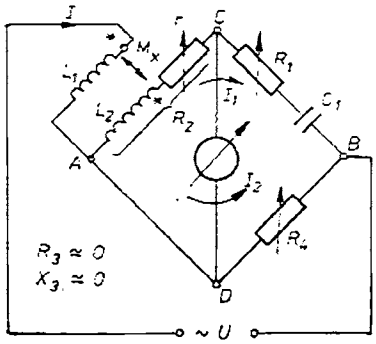


Fig. 5-64

se face pentru valori alese inițial ale lui C_1 și R_4, variind rezistențele R_1 și r (pornind de la valori nule).

Starea de echilibru a punții este caracterizată de relațiile:

$$U_{AC} = U_{AD} = 0, \quad U_{CB} = U_{DB},$$

iar din condițiile de echilibru inductivitatea mutuală M_x se poate scrie:

$$M_x = C_1 R_2 R_4 = L_1 \frac{R_4}{R_1 + R_4}. \quad (5\text{-}61)$$

Relațiile (5-58) pot fi utilizate și pentru determinarea lui L_1, în funcție de R_2, R_4 și M_x:

$$L_1 = M_x(1 + R_1/R_4). \quad (5\text{-}62)$$

5.15. MĂSURAREA PUTERILOR ELECTRICE

5.15.1. Măsurarea puterii în circuitele de curent continuu

Puterea electrică generată de sursele de curent continuu P_G, sau puterea consumată de receptoarele de curent continuu P_R, este dată, prin definiție, de produsul dintre tensiunea la borne și curentul debitat sau absorbit:

$$P_G = U_G I_G, \quad P_R = U_R I_R.$$

Măsurarea puterii poate fi realizată direct cu ajutorul wattmetrului sau prin metoda indirectă a ampermetrului și voltmetrului.

Metoda voltampermetrică este o metodă industrială și constă în măsurarea tensiunii U cu ajutorul voltmetrului, a curentului I cu ampermetrul, puterea determinîndu-se apoi prin produsul $P = UI$. Conectarea voltmetrului și a ampermetrului se execută după schema amonte (fig. 5-65, *a*) sau aval (fig. 5-65, *b*).

Dacă U, I sînt indicațiile voltmetrului și ampermetrului, aparate ale căror rezistențe interioare au fost notate cu R_V și R_A, puterile absorbite de receptorul R în cazul celor două montaje sînt date de relațiile:

— în montajul amonte:

$$P_R = U_R I_R = (U - R_A I)\, I = UI - R_A I^2; \quad (5\text{-}63)$$

— în montajul aval:

$$P_R = U_R I_R = U(I - I_V) = UI - \frac{U^2}{R_V} \quad (5\text{-}64)$$

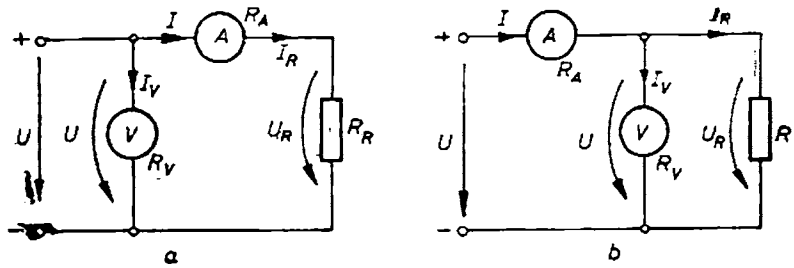


Fig. 5-65

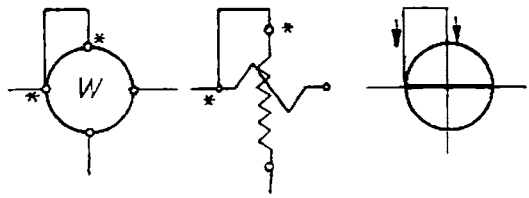


Fig. 5-66

Puterile consumate de receptorul R sînt egale cu produsul indicațiilor aparatelor de măsurat, din care se scad puterile consumate de aparate ($p_A = R_A I^2$, $p_V = U^2/R_V$).

Puterile consumate de aparatele de măsurat sînt mici (0,5—5 W), astfel că acestea pot fi neglijate, puterea calculîndu-se ca produs al indicațiilor celor două aparate. Schema de montaj amonte se recomandă la măsurarea puterilor cînd $R \gg R_A$, iar montajul aval pentru rezistențe $R \ll R_V$.

Metoda wattmetrului. O largă utilizare în practică o are wattmetrul electrodinamic datorită simplității construcției, preciziei ridicate precum și robusteței sale. Simbolurile utilizate pentru reprezentarea wattmetrului (în general) sînt indicate în figurile 5-66. Bobina fixă, realizată cu un număr mic de spire groase, este parcursă de curentul receptorului. Bobina mobilă se realizează cu un număr mare de spire subțiri și are o rezistență mare; este înseriată cu rezistența adițională și este conectată la tensiunea bornelor receptorului. După modul de legare în circuitul de măsurare a celor două bobine rezultă montajul amonte (fig. 5-67, *a*) sau aval (fig. 5-67, *b*).

Curentul I_2, ce parcurge bobina de tensiune, este direct proporțional cu tensiunea U, iar curentul I_1 din bobina de curent în serie cu receptorul este $I_1 = I$; rezultă atunci că deviația α a wattmetrului este dată de relația:

$$\alpha = KUI = KP. \tag{5-65}$$

În montajul amonte, wattmetrul măsoară pe lîngă puterea P absorbită de receptor și puterea consumată de bobina de curent ($R_{wi}I^2$), iar în montajul aval și puterea consumată de circuitul de tensiune al wattmetrului $\left(\frac{U^2}{R_{wu} + R_a}\right)$.

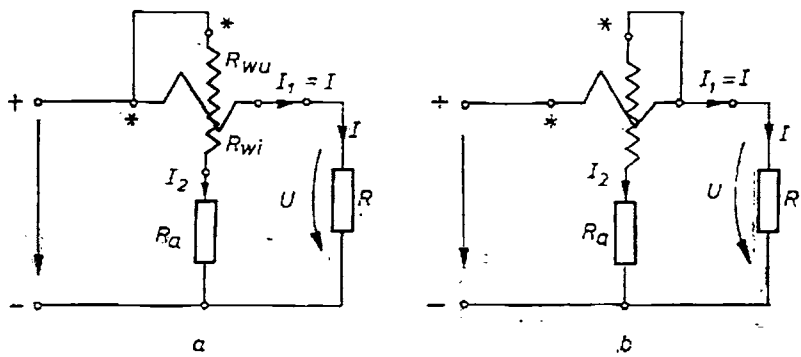


Fig. 5-67

Bornele bobinelor wattmetrului (una de la fiecare) sînt marcate distinct (o steluță, asterisc, săgeată sau literele U, I). Pentru ca indicația wattmetrului să fie în sensul normal al scalei, bornele polarizate se leagă la același conductor al circuitului.

5.15.2. Măsurarea puterii active în circuite de curent alternativ monofazat

Metodele utilizate se bazează pe relațiile stabilite în capitolul 2. Dacă tensiunea și curentul sînt mărimi sinusoidale cu valorile efective U și I, cu unghiul de defazaj φ, puterea activă într-un circuit de impedanță $Z^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$, este dată de relația:

$$P = UI \cos \varphi.$$

Măsurarea puterii active se poate realiza prin metoda directă a wattmetrului electrodinamic sau prin metoda indirectă care utilizează trei aparate (trei ampermetre sau trei voltmetre).

Metoda celor trei voltmetre

Cele trei voltmetre se conectează în circuitul monofazat conform schemei din figura 5-68, *a*.

Tensiunile măsurate de cele trei voltmetre (dacă impedanțele lor interne sînt foarte mari) pot fi scrise astfel:

$$U_1 = IZ_1 = I\sqrt{(R + R_e)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$U_2 = IR_e,$$

$$U_3 = IZ = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

a căror diagramă fazorială este reprezentată în figura 5-68, *b*.

Determinarea puterii prin această metodă utilizează relațiile dintre laturile unui triunghi oarecare. În cazul analizat (fig. 5-68, *b*), tensiunea la bornele unei rezistențe cunoscute R_e, parcursă de curentul I al receptorului, este

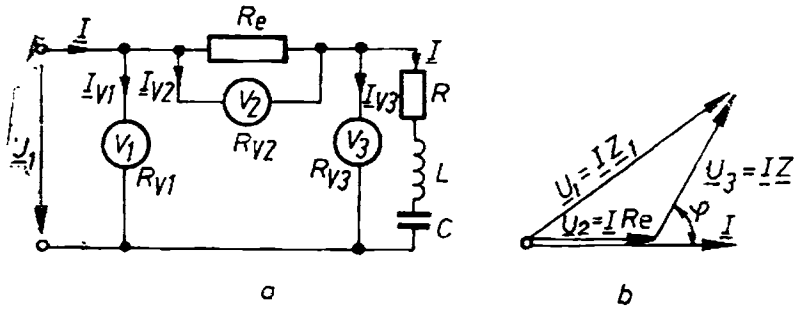
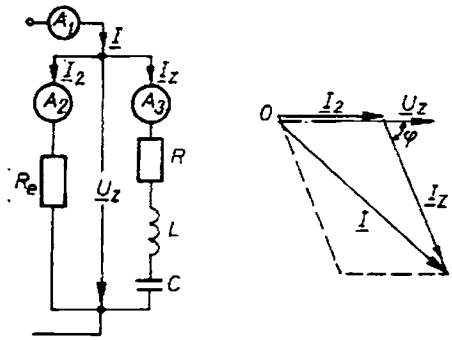


Fig. 5-68



a b

Fig. 5-69

$U_2 = IR_e$, iar la bornele receptorului $U_3 = IZ$; atunci tensiunea totală U_1 va fi dată de relația:

$$U_1^2 = U_2^2 + U_3^2 + 2U_2U_3 \cos \varphi =$$

$$= (IR_e)^2 + U_Z^2 + 2R_eIU_Z \cos \varphi,$$

puterea activă obținîndu-se cu:

$$P = U_ZI \cos \varphi = (U_1^2 - U_2^2 - U_3^2)\frac{1}{2R_e}. \qquad (5\text{-}66)$$

În metoda analizată mai sus au fost neglijați curenții din circuitele voltmetrelor în raport cu curentul I din circuitul principal.

Metoda celor trei ampermetre

Conectarea în circuitul monofazat a celor trei ampermetre se face după schema din figura 5-69, *a*. În această metodă se neglijează căderile de tensiune pe ampermetru (rezistențe foarte mici ale ampermetrelor). Curentul total I ce străbate circuitul se determină din diagrama fazorială (fig. 5-69, *b*), în mod analog metodei celor trei voltmetre:

$$I^2 = \left(\frac{U}{R_e}\right)^2 + I_Z^2 + 2\frac{U}{R_e}I_Z \cos \varphi,$$

puterea activă calculîndu-se cu relația:

$$P = UI_Z \cos \varphi = \frac{R_e}{2}(I^2 - I_{R_e}^2 - I_Z^2). \qquad (5\text{-}67)$$

Precizia ambelor metode este redusă, au însă avantajul că pot fi aplicate la frecvențe înalte (utilizînd aparate adecvate).

Metoda wattmetrului

Această metodă utilizează același montaj folosit și la măsurarea puterii în curent continuu.

Wattmetrul electrodinamic este tipul cel mai frecvent utilizat și poate fi conectat după schema amonte (fig. 5-70, *a*) sau aval (fig. 5-70, *b*). În ambele montaje, bobina de tensiune are o rezistență adițională R_a.

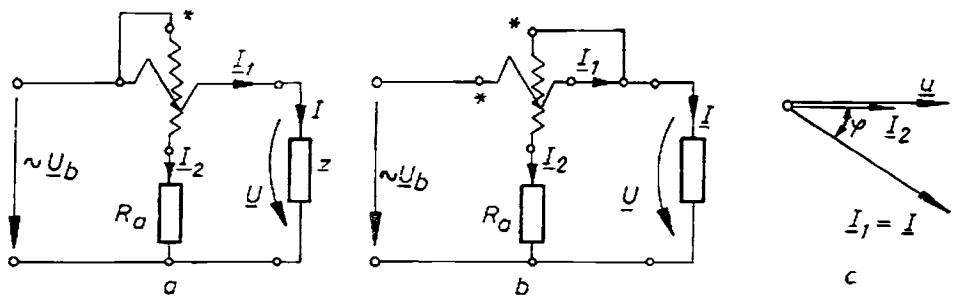


Fig. 5-70

Neglijînd căderile de tensiune pe bobinele de curent ale wattmetrului față de U ($U = U_b$ în ambele montaje) și curenții din bobinele de tensiune față de curentul I al receptorului ($I_1 = I$), s-a reprezentat o diagramă simplificată a curenților (fig. 5-70, *c*). Curentul $\underline{I}_2$ s-a reprezentat în fază cu tensiunea $\underline{U}$ întrucît s-a neglijat reactanța inductivă X_{wu} a bobinei mobile față de R_a. Puterea activă $P = UI \cos \varphi$ absorbită de receptor este în funcție de puterea indicată de wattmetru ($P_W = K_W \alpha$) care mai conține și puterea consumată de wattmetru:

— în montajul amonte $P_W = P + \Delta P_i$,

— în montajul aval $P_W = P + \Delta P_u$,

unde ΔP_i și ΔP_u sînt consumurile de putere absorbite de bobina de curent și circuitul de tensiune al wattmetrului.

În circuitele de curenți mari ($I > 50$ A) și tensiuni ridicate ($U > 650$ V), wattmetrele se conectează în circuit prin intermediul transformatoarelor de curent (TI), respectiv de tensiune (TU), care „reduc" curentul la 5 A si tensiunea la 100 V.

5.15.3. Măsurarea puterii reactive în circuitele de curent alternativ monofazat

Puterea reactivă, în cazul circuitelor monofazate alimentate în curent alternativ sinusoidal este dată de relația:

$$Q = U I \sin \varphi.$$

Puterea reactivă consumată de receptoare este pozitivă, adică $\sin \varphi > 0$, dacă circuitul este inductiv. Dacă circuitul este capacitiv ($\sin \varphi < 0$), puterea este negativă și debitată de către receptor rețelei de alimentare.

Măsurarea puterii reactive se poate face prin numeroase metode directe și indirecte, dintre care prezentăm cîteva.

Metoda indirectă de măsurare a puterii reactive (fig. 5 - 71) se bazează pe relațiile dintre puterea activă P, reactivă Q și aparentă S dintr-un circuit alimentat în curent sinusoidal monofazat. Cu ajutorul aparatelor conectate în schemă se măsoară puterea activă $P(W)$, tensiunea $U(V)$, curentul $I(A)$. Wattmetrul măsoară o putere P_W, mai mare decît cea absorbită de impedanța Z și anume cu puterile consumate în circuitul de tensiune al wattmetrului (U^2/R_{wu}) și în circuitul voltmetrului (U^2/R_V), adică:

$$P_W = P + \frac{U^2}{R_{wu}} + \frac{U^2}{R_V},$$

iar puterea reactivă este dată de relația:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(UI)^2 - \left(P_W - \frac{U^2}{R_{wu}} - \frac{U^2}{R_V}\right)^2}. \quad (5\text{-}68)$$

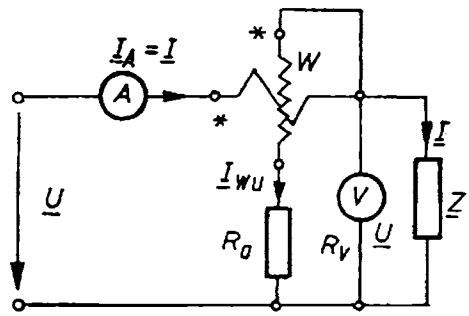


Fig. 5-71

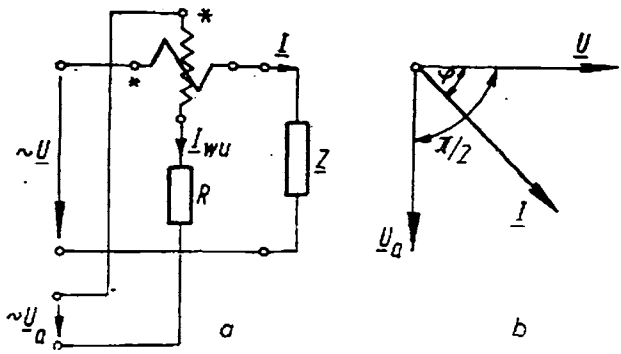


Fig. 5-72

În măsurările industriale, pentru puteri active mari, se pot neglija puterile consumate în circuitul de tensiune al wattmetrului și în circuitul voltmetrului. Puterea reactivă în acest caz se calculează cu relația:

$$Q = \sqrt{U_V^2 I_A^2 - P_W^2}. \tag{5-69}$$

Metoda indirectă de măsurare a puterii reactive cu ajutorul a trei aparate este o metodă de precizie mică.

Metoda wattmetrului (fig. 5-72, *a*) este o metodă indirectă, care utilizează însă alimentarea bobinei de tensiune a wattmetrului de la o sursă auxiliară de tensiune $\underline{U}_a$ defazată cu $\pi/2$ în urma tensiunii $\underline{U}$ a circuitului (fig. 5.72, *b*).

Într-o astfel de conexiune wattmetrul va indica o putere activă dată de relația:

$$P_a = U_a I \cos(\pi/2 - \varphi) = \frac{U_a}{U} UI \sin\varphi = \frac{U_a}{U} Q.$$

Dacă notăm $K_a = \dfrac{U}{U_a}$ rezultă:

$$Q = \frac{U}{U_a} P_a = K_a P_a. \tag{5-70}$$

Puterea reactivă se poate calcula pe baza puterii active măsurate și a tensiunilor de alimentare ale celor două bobine.

La egalitatea celor două tensiuni ($U = U_a$) și un defazaj între ele de $\pi/2$, puterea activă P_a indicată de wattmetru devine egală cu puterea reactivă Q.

Metoda varmetrului reprezintă o metodă directă de măsurare a puterii reactive, deoarece utilizează varmetrul electrodinamic (fig. 5-73, *a*). Varmetrul electrodinamic (prezentat la 5.4.4) poate fi conectat în circuit după montajul amonte sau aval.

Dacă în circuitul de tensiune al varmetrului se conectează capacitatea C_a, curentul $\underline{I}_{wu} = \underline{I}_{2C}$ va fi defazat cu $\pi/2$ în fața tensiunii, conform diagramei fazoriale din figura 5-73, *b*. Deviația α a varmetrului este proporțională cu puterea reactivă Q. Acul indicator al varmetrului va devia în sens opus devierii la utilizarea inductivității L_a în circuitul de tensiune:

$$\alpha = -KQ \text{ și } Q = K_{WC}\alpha. \tag{5-71}$$

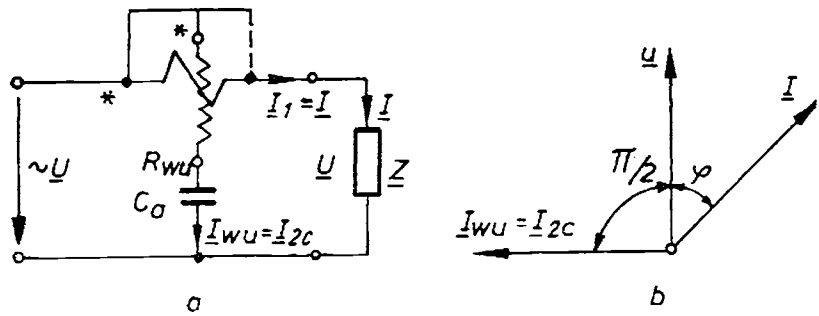


Fig. 5-73

5.15.4. Măsurarea puterii active în circuitele trifazate de curent alternativ

Puterea totală într-un circuit electric trifazat (echilibrat sau dezechilibrat), conectat în stea sau triunghi, este dată de relația:

$$P = U_{1f} I_{1f} \cos \varphi_1 + U_{2f} I_{2f} \cos \varphi_2 + U_{3f} I_{3f} \cos \varphi_3.$$

Dintre metodele de măsurare a acestei puteri prezentăm numai cîteva.

Metoda celor trei wattmetre

Expresia puterii active arată posibilitatea măsurării puterii cu ajutorul a trei wattmetre conectate cîte unul pentru fiecare fază. Receptorul trifazat poate fi conectat în circuit în stea cu conductor neutru (fig. 5-74) sau în stea fără conductor neutru (fig. 5-75). Puterea activă totală absorbită de receptorul trifazat conectat în stea cu nul accesibil (circuit cu patru conductoare) este suma puterilor măsurate de cele trei wattmetre:

$$P = P_1 + P_2 + P_3. \tag{5-72}$$

În cazul în care lipsește conductorul de nul, se realizează un nul artificial pentru toate ieșirile circuitelor de tensiune ale wattmetrelor; puterea totală se va calcula tot cu relația (5-72), ca sumă a indicațiilor celor trei wattmetre.

Metoda celor două wattmetre

Schema din figura (5-76, *a*) se obține conectînd punctul neutru al celor două wattmetre la potențialul unei faze (soluție mai economică de măsurare

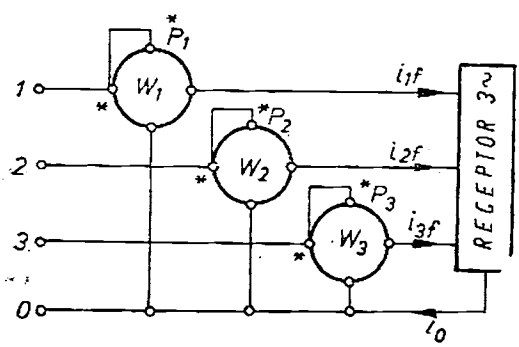


Fig. 5-74

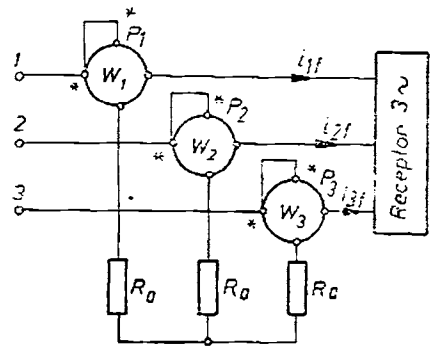


Fig. 5-75

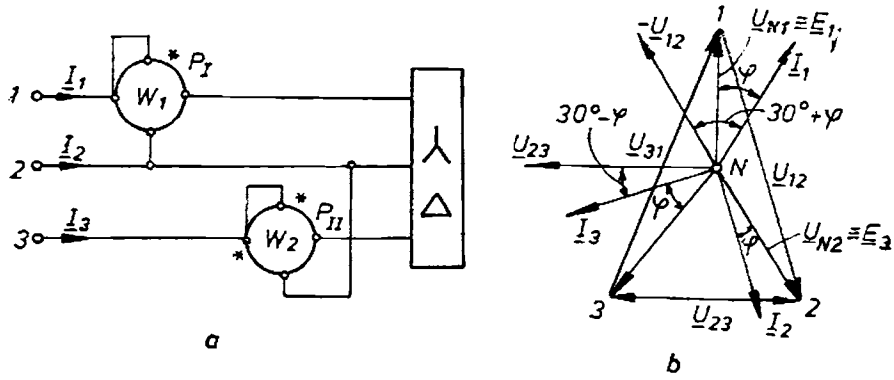


Fig. 5-76

a puterii într-un sistem trifazat). Metoda se poate aplica numai în cazul circuitelor cu trei conductoare (stea fără conductor neutru sau triunghi).

În cazul în care faza a doua se ia ca referință, deci $N \equiv 2$ tensiunile auxiliare devin: $U_{1N} = U_{12}$, $U_{2N} = U_{22} = 0$, $U_{3N} = U_{32}$ iar diagrama fazorială a circuitului (fig. 5-76, *b*) cu tensiuni simetrice și curenți echilibrați, îndeplinește condițiile:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U\,;\; I_1 = I_2 = I_3 = I,$$

$$(\widehat{E_1 I_1}) = (\widehat{E_2 I_2}) = (\widehat{E_3 I_3}) = \varphi.$$

Observăm de asemenea faptul (din diagrama fazorială) că defazajul dintre $\underline{U}_{12}$ și $\underline{I}_1$ este de $30° + \varphi$, iar defazajul între $\underline{U}_{32}$ și $\underline{I}_3$ este $30° - \varphi$.

Puterile măsurate de cele două wattmetre pot fi puse sub forma:

$$P_I = UI \cos (30° + \varphi),\quad P_{II} = UI\,(30° - \varphi),$$

sau:

$$P = P_I + P_{II} = \sqrt{3}\, UI \cos \varphi, \qquad (5\text{-}73)$$

adică puterea totală din circuitul electric trifazat (receptor echilibrat alimentat cu tensiuni simetrice) este egală cu suma puterilor indicate de cele două wattmetre.

În practică se utilizează frecvent wattmetrele duble de tip electrodinamic, într-o construcție unică. Măsurarea puterii trifazate cu ajutorul wattmetrelor se poate face și în cazul circuitelor cu tensiuni nesimetrice și sarcini dezechilibrate.

Extinderea domeniilor de măsurare ale wattmetrelor se realizează cu transformatoare de măsură de curent și tensiune.

Metoda unui singur wattmetru monofazat

Măsurarea puterii în circuitele trifazate cu un singur wattmetru monofazat se poate utiliza numai în cazul sistemelor de tensiuni simetrice și al receptoarelor echilibrate. Conectarea wattmetrului monofazat se face conform schemei din figura 5-77, *a* (circuite trifazate stea cu nul accesibil) sau din figura 5-77, *b* (circuite trifazate stea fără neutru sau triunghi).

Realizarea unui punct neutru artificial N are loc în condițiile conectării ansamblului celor trei rezistențe adiționale egale. Puterea activă absorbită de receptorul trifazat va fi dată de relația:

$$P = 3\, P_1 = \sqrt{3}\, UI \cos \varphi. \qquad (5\text{-}74)$$

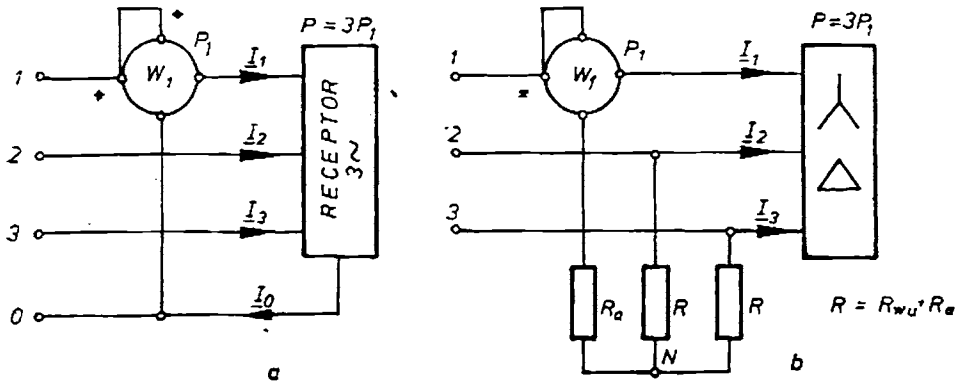


Fig. 5-77

Metoda de măsurare a puterii cu un singur wattmetru nu se recomandă în cazul microreceptoarelor (introduce nesimetrii în alimentarea microreceptorului datorită conectării pe o fază).

Scala wattmetrelor monofazate, montate permanent în circuitele trifazate echilibrate, este gradată direct în valorile puterii trifazate P.

5.15.5. Măsurarea puterii reactive în circuitele trifazate

Puterea reactivă totală în circuitele trifazate are expresia:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U_{1f}I_{1f} \sin \varphi_1 + U_{2f}I_{2f} \sin \varphi_2 + U_{3f}I_{3f} \sin \varphi_3.$$

În cazul receptoarelor echilibrate și alimentate cu un sistem simetric de tensiuni, puterea reactivă totală este dată de relația:

$$Q = 3U_fI_f \sin \varphi = \sqrt{3}\, UI \sin \varphi.$$

În practică se utilizează diferite metode de măsurare a puterii reactive în funcție de conexiunea fazelor, de felul tensiunilor de alimentare, precum și de natura receptorului (echilibrat sau dezechilibrat).

Măsurarea puterii reactive cu varmetrul monofazat

Reprezintă o metodă directă în care conectarea varmetrului în circuitele trifazate se poate face după schemele de conectare ale wattmetrului monofazat utilizat la măsurarea puterii active trifazate (folosind un singur varmetru, două sau trei varmetre). Reamintim că varmetrul a fost prezentat la 5.15.3.

Măsurarea puterii reactive cu un wattmetru monofazat

Puterea reactivă în circuitele trifazate simetrice și echilibrate poate fi măsurată cu un singur wattmetru (fig. 5-78, *a*). Bobina de tensiune a wattmetrului este conectată la tensiunea de linie $\underline{U}_{23}$, care este defazată cu $\pi/2$ față de tensiunea $\underline{U}_{1f}$ a primei faze, iar cea de curent e conectată pe faza *1*.

Tensiunile de linie (fig. 5-78, *b*) formează un sistem simetric $U_{12} = U_{23} = U_{31} = U$, ca și curenții $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Având în vedere simetria totală

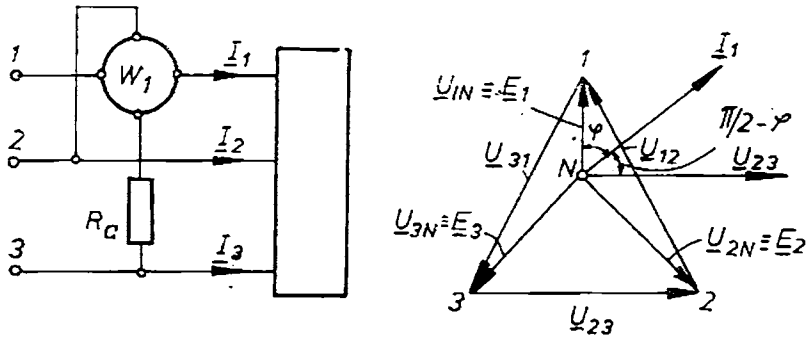


Fig. 5-78

(tensiune și curent) și ținînd seama de diagrama fazorială, puterea indicată de wattmetrul (W_1) poate fi pusă sub forma:

$$P_{W1} = U_{23} I_1 \cos(\pi/2 - \varphi) = UI \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}},$$

sau:

$$Q = \sqrt{3}\, P_{W1}, \qquad (5\text{-}75)$$

adică puterea reactivă este egală cu puterea activă indicată de wattmetrul W_1 multiplicată cu $\sqrt{3}$.

Măsurarea puterii reactive cu două wattmetre

Măsurarea puterii reactive în circuitele trifazate, fără conductor neutru sau în triunghi, cu tensiuni simetrice ce alimentează receptoare echilibrate, se poate face prin metoda celor două wattmetre.

Conectarea celor două wattmetre se face conform schemei utilizată la măsurarea puterii active cu două wattmetre.

În cazul circuitelor trifazate (stea fără conductor neutru sau triunghi) alimentate cu tensiuni simetrice și receptoare dezechilibrate, măsurarea puterii reactive poate fi făcută după schema din figura 5-79, *a*.

Rezistențele din circuitele bobinelor de tensiune sînt egale între ele și egale cu rezistența R_{a3} ($R_{a1} = R_{a2} = R_{a3}$), astfel că se poate realiza un nul artificial de potențial V_a. Cu ajutorul nulului artificial se asigură trei tensiuni de fază $\underline{U}_{1a}$, $\underline{U}_{2a}$, $\underline{U}_{3a}$, simetrice și defazate cu $\pi/2$ față de tensiunile de

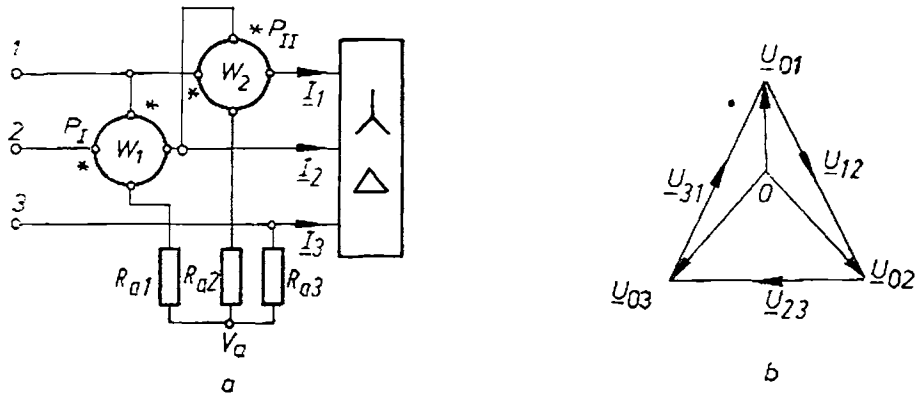


Fig. 5-79

linie $\underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}, \underline{U}_{12}$ (fig. 5-79, *b*). Întrucît bobinele wattmetrelor sînt conectate la tensiunile $\underline{U}_{2a}$ și $\underline{U}_{1a}$, puterea reactivă a receptorului va fi dată de relația:

$$Q = \sqrt{3}\,(P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}}). \tag{5-76}$$

În circuitele trifazate cu receptoare dezechilibrate (conectate în stea sau triunghi) alimentate cu tensiuni simetrice, puterea reactivă se poate măsura cu trei wattmetre conectate conform figurii 5-80. Puterea reactivă se determină cu relația:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} + P_{\mathrm{III}}). \tag{5-77}$$

Extinderea domeniilor de măsurare în variantele prezentate de măsurare a puterii reactive se face (ca și în cazul măsurării puterii active) prin utilizarea transformatoarelor de măsură de intensitate și de tensiune.

5.16. MĂSURAREA ENERGIEI ELECTRICE

Întrucît energia reprezintă integrala puterii (active sau reactive) în timp rezultă că orice contor trebuie să conțină în mod obligatoriu:

— unul sau mai multe dispozitive wattmetrice de măsurare a puterii active;

— un dispozitiv integrator, cu rol de a însuma în timp puterea măsurată;

— un dispozitiv (mecanism) indicator.

După principiul constructiv, contoarele de energie pot fi: contoare electrodinamice utilizate în curent continuu și contoare cu inducție folosite în curent alternativ.

În funcție de mărimea măsurată deosebim contoare de energie activă și de energie reactivă.

5.16.1. Măsurarea energiei electrice în circuitele de curent continuu

Energia electrică în circuitele de curent continuu se măsoară cu ajutorul contorului de tip electrodinamic, a cărui conectare în circuite este prezentată în figura 5-81. Bobina de curent a contorului este conectată în serie cu receptorul (*R*) de curent continuu (bornele *1* — *3*), iar cea de tensiune în paralel (bornele *2* — *5*). Cele două bobine pot fi conectate după montajul amonte sau aval.

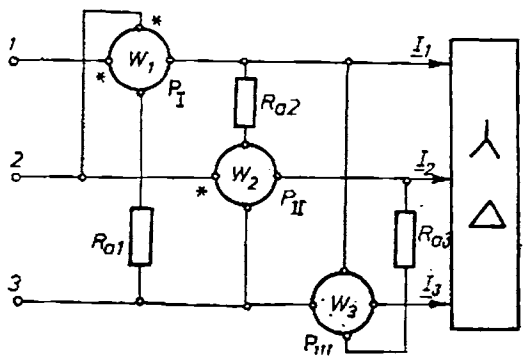


Fig. 5-80

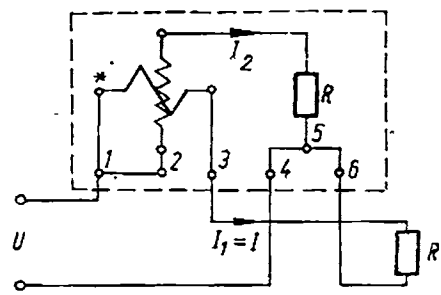


Fig. 5-81

5.16.2. Măsurarea energiei active

Măsurarea energiei active se face cu ajutorul contoarelor cu inducție monofazate sau trifazate. Contorul monofazat cu inducție se compune dintr-un dispozitiv wattmetric, al cărui cuplu activ este proporțional cu puterea activă, și dintr-un mecanism integrator-sistem de roți dințate. Principiul de funcționare precum și modul de conectare în circuit a contorului monofazat a fost prezentat în 5.5.3.

Energia electrică activă în circuitele trifazate se poate măsura cu ajutorul contoarelor monofazate sau trifazate. Conectarea contoarelor monofazate pentru măsurarea energiei active în circuitele trifazate se face după același montaj ca și în cazul măsurării puterii active (în circuite trifazate) cu unul, două sau trei wattmetre (prezentate în 5.15.4).

Tarifarea diferențială a energiei constituie o pîrghie importantă privind cointeresarea consumatorilor în utilizarea rațională a energiei electrice. Datorită consumurilor de vîrf în anumite perioade în timpul celor 24 de ore apare necesitatea măsurării diferențiale a energiei (în vederea aplatizării curbei de sarcină și pe această cale) și anume înregistrarea consumului de energie cu un tarif mai ridicat pentru perioada de vîrf de sarcină.

Dintre contoarele cu tarife speciale amintim:

— *contorul cu dublu tarif* (tarifare binomă) care are două mecanisme integratoare, ce se pun în funcțiune, manual sau automat (cu comandă de la un ceas electric), în funcție de anumite perioade de-a lungul celor 24 de ore;

— *contor cu triplu tarif* care are trei mecanisme integratoare și un dispozitiv electric sau mecanic ce realizează, în anumite ore, comutarea de pe un mecanism integrator pe altul (cele trei tarife sînt: tarif redus — pentru energia consumată în timpul nopții, tarif mai ridicat — pentru consumul din perioada vîrfului de sarcină și tarif normal — consum în restul zilei);

— *contorul cu plată anticipată* care are un singur mecanism integrator și un mecanism auxiliar, ce conectează consumatorii la rețea numai la introducerea în contor a unei monezi, moment în care se pune în funcțiune și contorul pentru înregistrarea energiei consumate (în momentul consumării energiei, corespunzătoare valorii monedei, mecanismul auxiliar deconectează consumatorul de la rețea).

În figura 5-82 se prezintă schema de conexiuni a unui contor trifazat, cu trei dispozitive într-un circuit trifazat cu patru conductoare.

Contorul trifazat pentru rețele de curent alternativ sînt în general contoare de inducție, dispozitivul de măsurat avînd trei echipaje (*RST*). Modul de

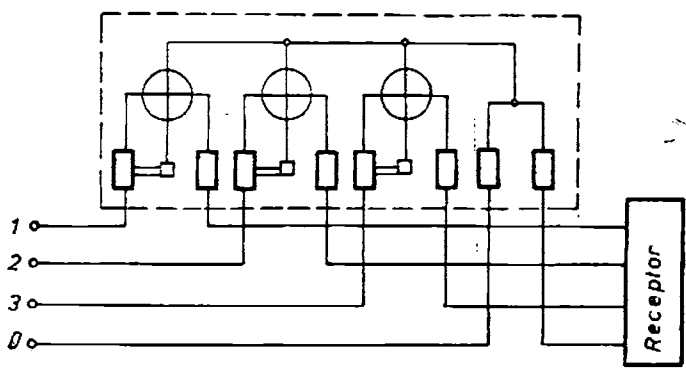


Fig. 5-82

funcționare al echipajului pentru curent trifazat este același cu al contorului de curent alternativ monofazat.

În cazul sistemelor trifazate cu trei conductoare, fără conductor neutru (fig. 5-83), se poate folosi, pentru măsurare, montajul Aron (schema cu două wattmetre). Dispozitivul de măsurat are în acest caz două echipaje care acționează separat asupra cîte unui disc fixat pe același ax, fie asupra unui disc comun.

În circuitele trifazate, cînd curentul sau tensiunea depășesc valorile nominale ale contoarelor, acestea se conectează în circuit prin intermediul transformatoarelor de măsură.

5.16.3. Măsurarea energiei reactive

Măsurarea energiei reactive se face cu ajutorul contoarelor cu inducție de energie reactivă. Contoarele cu inducție pot utiliza tensiuni auxiliare (în cazul circuitelor trifazate simetrice) sau șunturi (în cazul circuitelor cu tensiuni oarecare). Conectarea contoarelor în circuitele electrice se face utilizînd montajele specifice măsurării puterii reactive.

Expresia cuplului activ al aparatelor cu inducție:

$$M = K_i I_a I_b \sin \psi. \qquad (5\text{-}78)$$

presupune următoarele condiții (în vederea realizării proporționalității între cuplul activ și puterea reactivă):

— curentul bobinei de curent I_a să fie proporțional cu curentul din circuitul a cărei energie reactivă se măsoară ($I_a = K_a I$);

— curentul bobinei de tensiune I_b să fie proporțional cu tensiunea din circuit, adică $I_b = K_b U$;

— defazajul între I_a și I_b să fie egal cu unghiul dintre U și I ($\psi = \varphi$).

În aceste condiții, (5-78) poate fi pusă sub forma:

$$M = K_i(K_a I)\,(K_b U) \sin \varphi = K_i K_a K_b U\, I \sin \varphi = K_Q Q, \qquad (5\text{-}79)$$

adică cuplul activ al aparatului este proporțional cu energia reactivă. Aceste condiții se satisfac prin diferite montaje speciale (alimentarea bobinei de tensiune cu tensiune auxiliară care asigură decalajul între U și I). O metodă des utilizată este șuntarea bobinei de curent cu o rezistență R_s și înserierea cu bobina de tensiune a unei rezistențe R_a de valoare foarte mare în comparație cu reactanța bobinei (fig. 5-84). Principiul de funcționare arătat mai sus stă la baza realizării contoarelor monofazate și trifazate. Contoarele trifazate

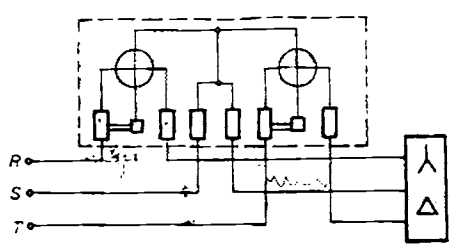


Fig. 5-83

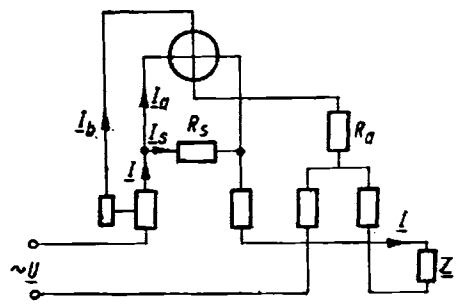


Fig. 5-84

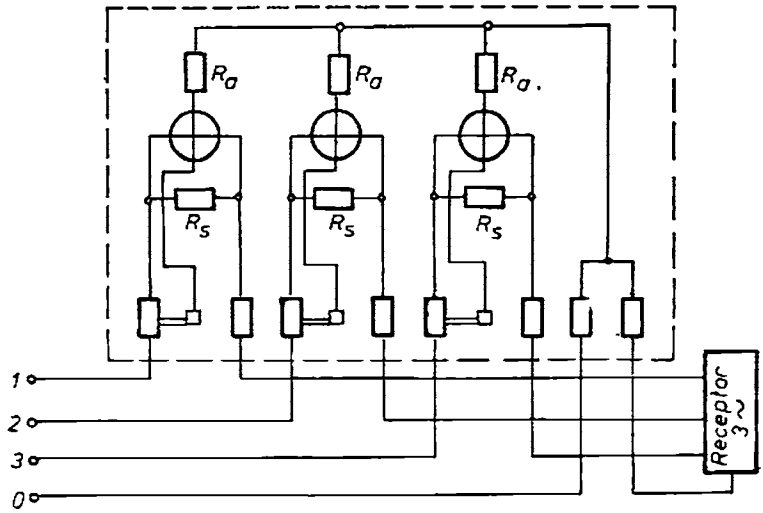


Fig. 5-85

(fig. 5-85) pot avea două sau trei echipaje fixate pe același ax, ce măsoară energia reactivă indiferent de gradul de nesimetrie al sistemului trifazat. La circuitele electrice care au tensiuni și curenți ale căror valori nominale depășesc valorile nominale ale contoarelor, montarea se face prin intermediul transformatoarelor de măsură.

5.17. MĂSURAREA FACTORULUI DE PUTERE

5.17.1. Măsurarea factorului de putere în circuitele monofazate

În regimul sinusoidal al circuitelor monofazate, factorul de putere reprezintă $\cos \varphi$ și se poate obține din expresia puterii active:

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI}, \tag{5-80}$$

de unde rezultă posibilitatea determinării printr-o metodă indirectă utilizînd cîte un wattmetru (P), voltmetru (V) și ampermetru (A).

Tot prin metode indirecte, $\cos \varphi$ poate fi determinat și cu ajutorul a trei voltmetre sau trei ampermetre (metode utilizate la determinarea puterii active), pe baza măsurărilor și a relațiilor:

$$U_1^2 = U_2^2 + U_3^2 + 2U_2U_3 \cos \varphi,$$

de unde rezultă:

$$\cos \varphi = \frac{U_1^2 - U_2^2 - U_3^2}{2\,U_2U_3}, \tag{5-81}$$

sau:

$$I_1^2 = I_2^2 + I_3^2 + 2I_2I_3 \cos \varphi,$$

de unde:

$$\cos \varphi = \frac{I_1^2 - I_2^2 - I_3^2}{2\,I_2I_3}. \tag{5-82}$$

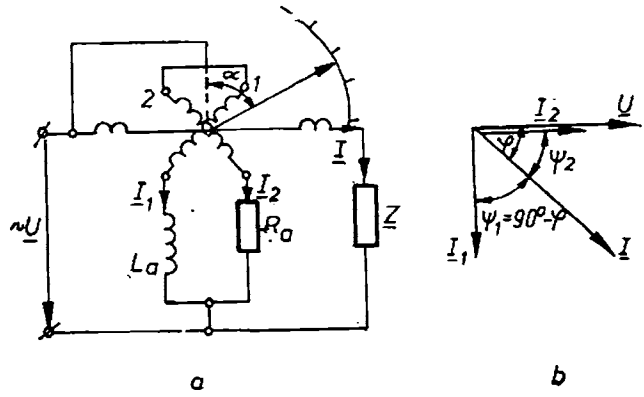


Fig. 5-86

Metodele indirecte neglijează consumurile proprii ale celor trei aparate cu care se fac măsurările, avînd astfel o precizie redusă.

În condiții industriale factorul de putere se măsoară direct cu ajutorul aparatelor indicatoare sau înregistratoare denumite *fazmetre* sau *cosfimetre*. Aparatele utilizate pot fi electrodinamice, ferodinamice sau feromagnetice; dispozitivul de măsurat fiind de tip logometric.

Fazmetrul electrodinamic monofazat, de tip logometru (fig. 5-86, *a*), se compune dintr-o bobină fixă (formată din două semibobine, montate în serie în circuit), parcursă de curentul I, și două bobine (*1* și *2*), fixate rigid pe axul echipajului mobil sub un unghi de 90°, conectate în paralel la tensiunea U. În serie cu bobina *2* este conectată o rezistență R_a, de valoare mare față de reactanța inductivă a bobinei. Curentul $\underline{I}_2$ în acest circuit este practic în fază cu tensiunea $\underline{U}$. Bobina *1* este înseriată cu inductivitatea L_a (de valoare foarte mare); reactanța inductivă a circuitului este mare în comparație cu rezistența ce se poate neglija. Curentul $\underline{I}_1$ poate fi considerat practic defazat cu 90° în urma tensiunii $\underline{U}$ (fig. 5-86, *b*). Parametrii R_a și L_a se aleg de așa natură încît impedanțele celor două bobine să fie egale, pentru ca cei doi curenți să fie $I_1 = I_2$. Deviația echipajului mobil al logometrului este dată de relația:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{\cos\psi_1}{\cos\psi_2} = \frac{\cos(90°-\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi,$$

sau:

$$\alpha = \varphi, \tag{5-83}$$

deci deviația acului indicator al cosfimetrului este egală cu defazajul dintre tensiunea $\underline{U}$ și curentul $\underline{I}$ ale circuitului monofazat.

Scara fazmetrelor electrodinamice este bilaterală (pentru circuite cu caracter inductiv și capacitiv), poziția zero fiind la mijloc; de asemenea este neliniară în ambele sensuri:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}. \tag{5-84}$$

Dintre neajunsurile fazmetrelor electrodinamice menționăm faptul că indicațiile acestora sînt influențate de variațiile de frecvență, care produc variații ale curentului I_2 dar nu și ale curentului I_1 (erori de frecvență).

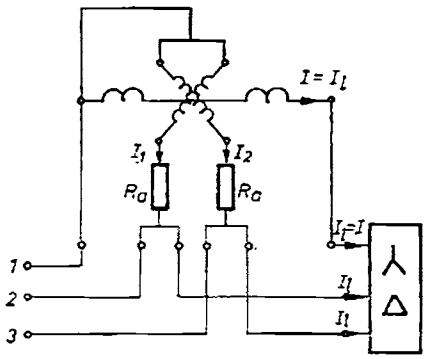


Fig. 5-87

5.17.2. Măsurarea factorului de putere în circuitele trifazate

În regimurile sinusoidale ale receptoarelor trifazate echilibrate, factorul de putere este dat de relația:

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S}, \qquad (5\text{-}85)$$

adică unghiul de defazaj φ dintre tensiunea și curentul unei faze ($\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$).

Cu ajutorul uneia din metodele cunoscute se măsoară puterea totală, tensiunea U, curentul I și se calculează $\cos \varphi$ cu (5-85).

Fazmetrul (cosfimetrul) electrodinamic trifazat (fig. 5-87) este utilizat pentru măsurarea directă a factorului de putere în circuitele trifazate cu tensiuni simetrice și curenți echilibrați. Fazmetrul electrodinamic de tip logometric are unghiul dintre planurile bobinelor de tensiune mobile de 120°; în serie cu cele două bobine ale aparatului sînt conectate două rezistențe ohmice, de valori egale. Bobina de curent se conectează în serie cu unul din conductoarele circuitului trifazat. Bobinele fiind conectate în circuit conform figurii 5-87, deviația echipajului mobil este egală cu defazajul circuitului trifazat simetric ($\alpha = \varphi$).

Fazmetrele sînt caracterizate de date tehnice printre care: curentul nominal ($I = 5$ A, de obicei), tensiunea nominală (100—380) V, domeniile de măsurare (inductiv sau capacitiv), domeniul de frecvență (49—51 Hz) pentru fazmetre monofazate, consumuri proprii (de ordinul 3—6 VA).

În circuitele cu tensiuni înalte și curenți intenși conectarea cosfimetrelor electrodinamice se face prin intermediul transformatoarelor de măsură.

Urmărirea valorii medii a factorului de putere pe o perioadă (oră, zi, săptămînă, lună etc.) constituie o pîrghie importantă în raționalizarea și economisirea energiei electrice. Cu ajutorul contoarelor de energie electrică activă și reactivă se înregistrează energia activă W_a și reactivă W_r, cu ajutorul cărora se poate determina factorul de putere mediu:

— în circuitele monofazate:

$$W_a = U(I \cos \varphi)_{med}\, t \text{ și } W_r = U(I \sin \varphi)_{med}\, t;$$

— în circuitele trifazate simetrice și echilibrate:

$$W_a = \sqrt{3}\, U(I \cos \varphi)_{med}\, t \text{ și } W_r = \sqrt{3}\, U(I \sin \varphi)_{med}\, t.$$

În relațiile de mai sus sau considerat constante tensiunile U în intervalul t.

Din raportul energiilor se obține $W_r/W_a = \operatorname{tg} \varphi_{med}$ și deci:

$$\cos \varphi_{med} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{med}}} = \frac{W_a}{\sqrt{W_a^2 + W_r^2}},$$

mărime ce caracterizează consumul unității industriale.

Capitolul 6

MAŞINI ELECTRICE

Maşinile electrice sînt sisteme fizice dinamice de conversie electromecanică a energiei prin fenomenul inducţiei electromagnetice. Ele se numesc *generatoare electrice* dacă transformă lucrul mecanic transmis la arborele lor de un motor primar (de exemplu o turbină cu aburi, cu gaze sau hidraulică, ori un motor diesel etc.) în energie electrică furnizată reţelei; se numesc *motoare electrice* dacă transformă energia absorbită din reţea în lucru mecanic disponibil la arbore pentru acţionarea unei instalaţii oarecare; se numesc *convertizoare electromecanice* dacă transformă energia electromagnetică absorbită din reţea tot în energie electromagnetică însă la alţi parametri (alţi curenţi, alte tensiuni la borne, alte frecvenţe etc.).

În cadrul acestui capitol am inclus şi *transformatoarele electrice* care sînt aparate ce transformă energia electromagnetică a curentului alternativ tot în energie electromagnetică, la aceeaşi formă de undă a tensiunilor şi curenţilor, însă cu alte valori. Transformatoarele sînt utilizate la ridicarea sau la coborîrea tensiunii electrice (pentru transportul energiei electromagnetice) şi la distribuţia energiei electrice la tensiunea de la borne a receptoarelor.

Atît transformatoarele cît şi maşinile electrice sînt elemente componente de bază ale unui sistem electroenergetic. În prezent, producerea energiei electrice în sistemele electroenergetice are loc — în principal — prin generatoarele electrice grupate în centralele electrice (termo-, hidro-, nucleare-electrice etc.) amplasate în zonele cu resurse primare de energie. De la centrale, transportul economic la distanţă şi distribuţia la consumatori a energiei electromagnetice în curent alternativ la alte tensiuni şi curenţi decît cele la care pot funcţiona generatoarele electrice sînt posibile prin utilizarea transformatoarelor electrice.* La utilizatori, o parte importantă din energia electrică este convertită în lucru mecanic cu ajutorul motoarelor electrice, ceilalţi consumatori fiind instalaţiile de iluminat, receptoarele electrotermice (ca, de exemplu, cuptoarele electrice) etc.

Deoarece, de-a lungul anilor, puterea electrică instalată la utilizatori a crescut, atunci odată cu creşterea necesarului de energie electromagnetică a crescut şi puterea (pe unitate fizică) a generatoarelor şi transformatoarelor electrice (aceasta deoarece la puteri unitare mai mari randamentul este mai bun, iar consumul specific de materiale, în kg/W, este mai redus). În prezent, se construiesc: transformatoare trifazate cu puterea (pe o unitate fizică) de 1 000 — 1 500 MVA, generatoare sincrone cu puterea nominală (pentru o unitate) de 1 000 la 2 500 MVA, motoare sincrone cu puteri (unitare) de pînă la 20 MW, maşini electrice de curent continuu cu puteri pînă la 10 MW şi

* Puterea totală a transformatoarelor electrice instalate într-un sistem electroenergetic este cam de trei ori puterea produsă de generatoarele electrice din acelaşi sistem.

motoare asincrone cu puteri de ordinul zecilor de MW (cea mai mare parte a motoarelor asincrone trifazate se produc în gama de puteri nominale 0,6 kW — 1 000 kW).

În țara noastră, industria constructoare de mașini electrice a ajuns la un nivel înalt (calitativ și cantitativ), comparabil cu cel al țărilor avansate în acest domeniu, atît în domeniul proiectării și al cercetării, cît și al producției (producem, atît pentru nevoile țării dar și pentru export, un sortiment variat de transformatoare și mașini electrice, ca puteri, tipuri constructive, destinație, tensiuni nominale etc.).

Astfel, în prezent, România produce: transformatoare cu puteri (unitare) pînă la 400 MVA și tensiuni pînă la 400 kV, motoare asincrone cu puteri pînă la 1,5 MW la tensiuni de 380 V sau cu puteri și mai mari la tensiunea de 10 kV, mașini de curent continuu pentru diverse acționări (industria petrolului, industria minieră, industria metalurgică, transporturi: feroviare, urbane și navale etc.), hidrogeneratoare sincrone cu puteri pînă la 200 MVA, turbogeneratoare sincrone cu puteri de 100 la 660 MVA. Aceste mașini sînt realizate după proiecte de concepție românească și sînt executate cu materiale electrice, magnetice și pentru construcția de mașini (conductoare, table silicioase, materiale izolante, ulei de transformator, materiale de sudare, lagăre și rulmenți, fonte, oțeluri și alte aliaje speciale) de asemenea produse în țara noastră.

În prezent, în România există o adevărată industrie constructoare de mașini electrice, formată din numeroase întreprinderi specializate pe diferite tipuri de mașini. De exemplu: la IMG — București se construiesc turbogeneratoare sincrone de puteri foarte mari, motoare sincrone speciale și compensatoare sincrone; la „Electroputere" — Craiova se produc transformatoarele de puteri foarte mari, motoare asincrone de 2 MW la 1 MW, motoare sincrone diverse, motoare de curent continuu pentru tracțiunea electrică feroviară; la ICM — Reșița se produc hidrogeneratoarele sincrone cu puteri pînă la 200 MVA, motoare sincrone pînă la 3,5 MW și diverse mașini electrice de curent continuu; la IME — București se construiesc mașinile sincrone de puteri mici (25 la 125 kVA), generatoarele sincrone speciale de frecvență medie 1 000 la 8 000 Hz (pentru industria forestieră, încălzirea prin curenți de inducție etc.), grupuri de sudare în curent continuu, motoare de curent continuu pentru industria metalurgică, motoare asincrone cu rotorul în scurtcircuit (cu puteri de 50 la 160 kW), motoare asincrone cu rotorul bobinat de puteri mici etc.; la „Electromotor" Timișoara se produce o gamă largă de motoare asincrone (cu rotorul în scurtcircuit sau bobinat) de 10 la 30 kW; „Electroprecizia" Săcele-Brașov produce excitatoare cu magneți permanenți, mașini electrice pentru autovehicule etc. Se mai produc diverse mașini electrice sau transformatoare și la Întreprinderea de motoare electrice Pitești, „Electromureș", „Electroargeș", Întreprinderea de transformatoare Filiași, „Electrotehnica" București și multe altele.

6.1. TRANSFORMATORUL ELECTRIC

6.1.1. Principiul de funcționare și rolul transformatorului electric

Transformatorul electric monofazat este un aparat static care, prin fenomenul inducției electromagnetice, transformă energia electromagnetică de la o anumită tensiune și curent, la o altă tensiune și curent, frecvența f a acestor mărimi rămînînd nemodificată. El este constituit din două bobine (înfășu-

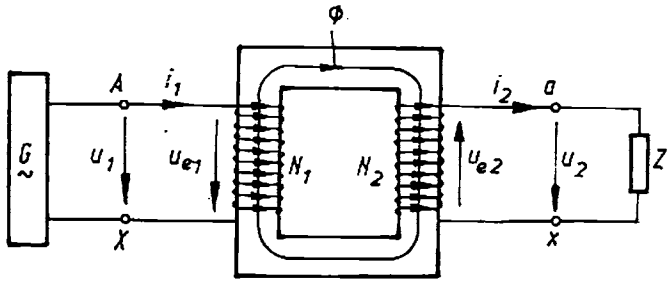


Fig. 6-1

rări), situate pe un miez feromagnetic comun, deci cuplate numai magnetic, fără nici o legătură de conducție între ele (fig. 6-1).

Bobina cu N_1 spire, care primește energia electromagnetică de la generatorul G la tensiunea u_1 și curentul i_1 se numește *bobină primară* sau *primarul transformatorului*. Cealaltă bobină, cu N_2 spire, cedează energie electromagnetică unui receptor (consumator) la tensiunea u_2 și curentul i_2, ea numindu-se *bobină secundară* sau *secundarul transformatorului*.

Dacă la bornele $A-X$ se aplică tensiunea sinusoidală $u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin \omega t$, atunci în circuitul electric al bobinei primare se stabilește curentul electric $i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$. Unghiul φ_1 este unghiul de defazaj dintre tensiunea și curentul primarului și depinde de parametrii transformatorului (rezistență, inductivitate).

Solenația primară $\theta_1 = N_1 i_1$ creează un cîmp magnetic variabil în timp, ale cărui linii se închid prin miezul feromagnetic, constituind fluxul Φ. Acest flux magnetic străbate suprafețele celor N_2 spire și fiind variabil în timp, în baza fenomenului inducției electromagnetice statice va induce în aceste spire tensiunea electromotoare:

$$u_{e2} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \tag{6-1}$$

Prin această tensiune electromotoare, secundarul transformatorului constituie sursă de energie electromagnetică pentru receptorul de impedanță Z (fig. 6-1) asigurînd la bornele acestuia tensiunea u_2 și un curent i_2. Curentul i_2 determină solenația secundară $N_2 i_2$ care contribuie și ea la crearea fluxului magnetic.

Același flux Φ variabil în timp (sinusoidal, cu amplitudinea Φ_m) induce tensiune electromotoare și în primarul transformatorului:

$$u_{e1} = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \tag{6-2}$$

Valorile efective ale celor două tensiuni electromotoare induse au expresiile cunoscute:

$$U_{e1} = 4{,}44\, N_1 f \Phi_m \text{ și } U_{e2} = 4{,}44\, N_2 f \Phi_m, \tag{6-3}$$

iar raportul lor:

$$K = \frac{U_{e1}}{U_{e2}} = \frac{N_1}{N_2}, \tag{6-4}$$

numindu-se *raport de transformare*. Dacă $K > 1$, transformatorul este *coborîtor de tensiune*, iar dacă $K < 1$ — *ridicător de tensiune*.

Transformatorul electric are o importanță deosebită în transportul și distribuția energiei electrice. Aceeași putere activă $P = UI \cos \varphi$ poate fi transportată de la sursă la consumator și cu un curent de n ori mai mic la o tensiune de n ori mai mare dacă se consideră $\cos \varphi = \text{const}$. Într-adevăr:

$$P = (nU)\left(\frac{I}{n}\right)\cos \varphi = UI \cos \varphi. \tag{6-5}$$

Punînd condiția ca pierderile prin efect Joule-Lenz ce au loc pe linia de transport de rezistență R_l (fig. 6-2) să fie aceleași în ambele cazuri, se poate scrie:

$$p_j = R_l I^2 = n^2 R_l \left(\frac{I}{n}\right)^2. \tag{6-6}$$

Se vede că aceeași putere activă P, poate fi transportată cu aceleași pierderi prin efect Joule-Lenz pe linie, folosind o linie cu rezistența de n^2 ori mai mare, dacă tensiunea a crescut la nU iar curentul a scăzut la $\frac{I}{n}$. Asta înseamnă, la aceeași distanță l și material cu aceeași rezistivitate ρ, o secțiune s a conductorului de n^2 ori mai mică, căci:

$$n^2 R_l = n^2 \frac{\rho l}{s} = \frac{\rho l}{\frac{s}{n^2}}. \tag{6-7}$$

O secțiune mai mică duce la economie de material și construcție mai simplă a liniei de transport.

Din considerente de izolație, generatoarele electrice furnizează energia (puterea) electromagnetică la tensiuni de 3-6-10 kV. La receptor, din motive de securitate și preț al motoarelor electrice, această energie (putere) electromagnetică trebuie să fie distribuită la tensiuni relativ scăzute, sub 6 kV. De aici necesitatea ca lîngă generatorul G să se monteze un transformator T_1 ridicător de tensiune ($U_{1l} > U_g$) iar la receptor un T_2 coborîtor ($U < U_{2l}$). Tensiunea U_{2l} este mai mică decît U_{1l} cu căderea de tensiune pe linia de transport (fig. 6-2).

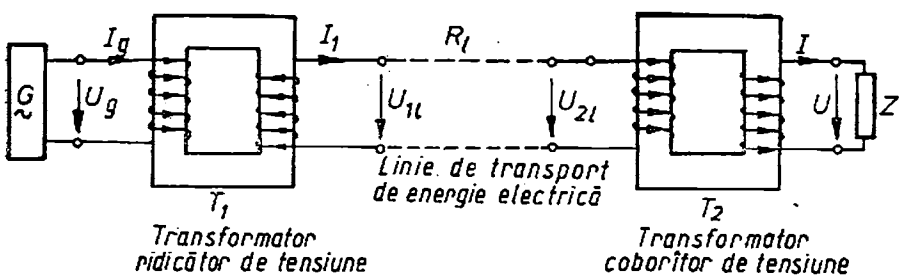


Fig. 6-2

6.1.2. Elementele constructive ale transformatorului monofazat

La un transformator electric monofazat se disting: miezul feromagnetic, înfăşurările primară şi secundară, iar la cele de putere mai mare (peste 1 kVA), în plus, cuva de ulei şi izolatoarele de trecere.

Miezul feromagnetic este constituit din tole subţiri (0,3, 0,35, 0,5 mm) realizate din oţel electrotehnic, un oţel sărac în carbon, aliat cu siliciu (2—5%) şi izolate între ele prin: lac, hîrtie, oxizi sau straturi ceramice pentru a micşora pierderile prin curenţi turbionari (Foucault). Pierderile din miezul feromagnetic, denumite pierderi în fier, constau din pierderi prin histerezis (70—80%) şi prin curenţi turbionari (30—20%).

Porţiunile de circuit magnetic pe care se aşază înfăşurările transformatorului se numesc *coloane*, iar celelalte *juguri*. După modul cum sînt dispuse coloanele şi jugurile, se deosebesc două tipuri de miezuri: *cu coloane* (fig. 6-3, *a*) şi *în manta* (fig. 6-3, *b*). Pe coloanele *1* se află înfăşurările de înaltă tensiune (*I.T.*) şi de joasă tensiune (*J.T.*), iar jugurile *2* închid circuitul magnetic.

Secţiunea coloanelor şi jugurilor este pătrată, dreptunghiulară sau în cruce la transformatoarele de puteri mici şi în trepte (înscrisă într-un cerc) la cele de puteri mari, urmărindu-se ca suprafaţa spirelor înfăşurărilor să fie cît mai „plină" de material feromagnetic.

Înfăşurările transformatorului au ca elemente componente: spira, bobina (mai multe spire în serie) şi stratul de spire. Conductorul folosit este din cupru sau aluminiu electrolitic, cu secţiunea circulară pînă la 10 mm² pentru transformatoarele de putere mică şi rectangulară, de 6-60 mm², pentru cele de putere mare. Izolaţia conductorului poate fi: cu bumbac, mătase, email sau răşini siliconice. Bobinele sînt izolate între ele prin spaţii de aer sau ulei, straturi de preşpan, polivinil etc.

După modul de aşezare a bobinelor, una faţă de ccalaltă, pe aceeaşi coloană se deosebesc înfăşurări (fig. 6-4):

— concentrice simple, cînd cele două bobine (*1* şi *2*) sînt cilindrice, de diametre diferite şi montate coaxial (fig. 6-4, *a*);

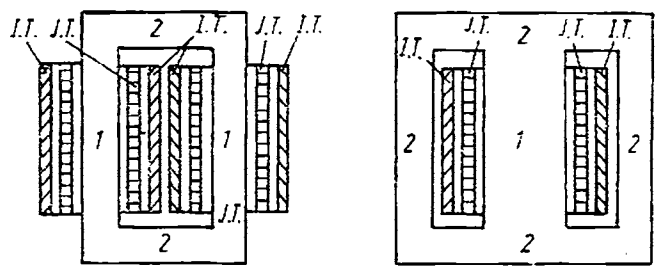


Fig. 6-3

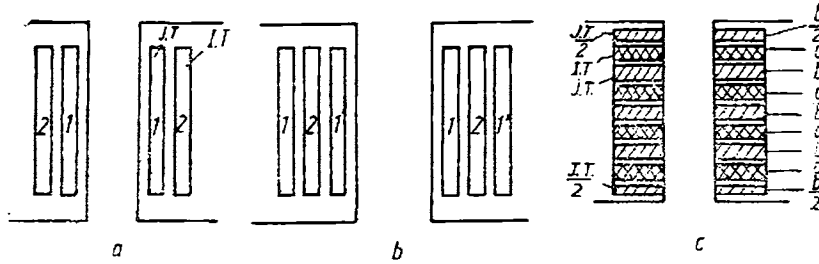


Fig. 6-4

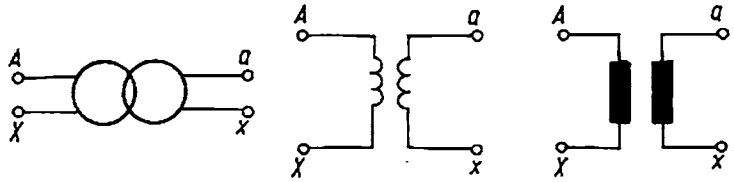


Fig. 6-5

— biconcentrice, una din bobine fiind subdivizată (fig. 6-4, *b*);
— alternante, constituite din bobine parțiale (denumite galeți) de diametre și grosimi egale (fig. 6-4, *c*).

Pierderile de putere în transformator (pierderile în fier din miez și prin efect Joule-Lenz din înfășurări) se transformă în căldură, determinînd creșterea temperaturii miezului și a bobinajelor. Puterea maximă ce se poate obține dintr-un transformator depinde de încălzire, de temperatura limită admisibilă.

După modul cum se asigură eliminarea căldurii dezvoltate, se deosebesc:
— transformatoare uscate, răcirea făcîndu-se cu aer (în circulație naturală sau forțată);
— transformatoare în ulei, cînd miezul și bobinajele sînt introduse într-o cuvă în care se află ulei special de transformator.

Uleiul impregnează materialele izolante, le protejează de umiditate, constituie un „vehicul" de căldură. Cuva poate avea pereții: netezi, cu radiatoare nedetașabile sau cu radiatoare speciale. Circulația uleiului în cuvă poate fi naturală sau forțată.

Izolatoarele de trecere se confecționează din porțelan glazurat, permițînd scoaterea capetelor libere ale înfășurărilor pe capacul cuvei.

În schemele electrice, transformatorul monofazat se reprezintă prin unul din simbolurile prezentate în figura 6-5, bornele primare fiind notate cu $A—X$, iar cele secundare cu $a—x$.

6.1.3. Funcționarea în sarcină a transformatorului monofazat

Funcționarea în sarcină a transformatorului electric monofazat poate fi urmărită pe baza figurii 6-6. Înfășurarea primară este conectată la rețeaua de alimentare cu tensiunea u_1, absorbind curentul i_1, iar cea secundară alimentează cu tensiunea u_2 consumatorul de impedanță:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \qquad (6\text{-}8)$$

în care stabilește curentul i_2.

Curenții i_1 și i_2 determină solenațiile, primară $\theta_1 = N_1 i_1$ și secundară $\theta_2 = N_2 i_2$. Solenația θ_1 creează fluxul Φ_{12} ce înlănțuie spirele primare N_1 și secundare N_2, precum și fluxul de dispersie al primarului față de secundar, Φ_{1d}. Solenația θ_2 creează fluxul Φ_{21} ce înlănțuie pe N_2 și N_1 și fluxul de dispersie al secundarului față de primar, Φ_{2d}.

Cele două fluxuri, Φ_{12} și Φ_{21}, constituie fluxul comun util Φ, el rezultînd deci din acțiunea solenațiilor primară și secundară, adică a unei solenații totale θ, cu valoarea instantanee:

$$\theta = N_1 i_1 + N_2 i_2. \qquad (6\text{-}9)$$

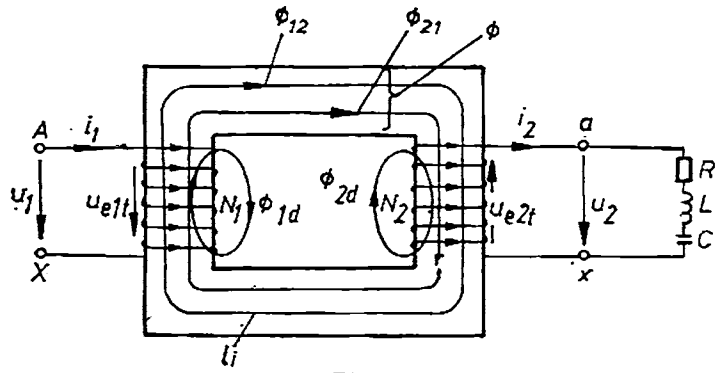


Fig. 6-6

Conform legii circuitului magnetic (4-5, *a*), pentru conturul închis l_i (v. fig. 6-6) de reluctanță magnetică R_m, se poate scrie ecuația:

$$\int_{l_i} \bar{H} \cdot d\bar{l} = \Phi R_m = N_1 i_1 + N_2 i_2 = \theta. \tag{6-10}$$

Conform definiției (1-5), corespunzător fluxurilor Φ_{12}, Φ_{21}, Φ_{1d} și Φ_{2d}, rezultă inductivitățile:

— proprie utilă a primarului $L_{11} = \frac{N_1\Phi_{12}}{i_1}$ și a secundarului $L_{22} = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_2}$, ele depinzînd de saturația magnetică a miezului;

— de dispersie, a primarului față de secundar, $L_{1d} = \frac{N_1\Phi_{1d}}{i_1}$ și a secundarului față de primar, $L_{2d} = \frac{N_2\Phi_{2d}}{i_2}$, acestea fiind practic independente de saturație (reluctanța magnetică din miez este neglijabilă față de cea din aer);

— mutuale, a primarului față de secundar, $L_{12} = \frac{N_2\Phi_{12}}{i_1}$ și a secundarului față de primar, $L_{21} = \frac{N_1\Phi_{21}}{i_2}$, fiind și ele dependente de saturația magnetică.

Cele trei fluxuri: Φ, Φ_{1d} și Φ_{2d} fiind variabile în timp, vor induce tensiuni electromotoare în înfășurările ale căror spire le străbat și anume:

— în primar, $u_{e1} = -N_1\frac{d\Phi}{dt}$ și $u_{e1d} = -N_1\frac{d\Phi_{1d}}{dt} = -L_{1d}\frac{di_1}{dt}$;

— în secundar, $u_{e2} = -N_2\frac{d\Phi}{dt}$ și $u_{e2d} = -N_2\frac{d\Phi_{2d}}{dt} = -L_{2d}\frac{di_2}{dt}$.

Aceste tensiuni sînt defazate cu $\frac{\pi}{2}$ (un sfert de perioadă $T/4$) în urma fluxurilor respective. Ca urmare, în înfășurările primară și secundară, există tensiunile electromotoare induse totale:

$$\begin{aligned} u_{e1t} &= u_{e1} + u_{e1d} = -N_1\frac{d\Phi}{dt} - L_{1d}\frac{di_1}{dt}, \\ u_{e2d} &= u_{e2} + u_{e2d} = -N_2\frac{d\Phi}{dt} - L_{2d}\frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \tag{6-11}$$

În baza celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff aplicată circuitului primar cu rezistența R_1 (v. fig. 6-6), se poate scrie:

$$i_1R_1 - u_1 = u_{e1t} = -N_1\frac{d\Phi}{dt} - L_{1d}\frac{di_1}{dt} = u_{e1} - L_{1d}\frac{di_1}{dt}, \qquad (6\text{-}12)$$

în care: $L_{1d}\frac{di_1}{dt}$ reprezintă căderea de tensiune inductivă din primar, corespunzătoare dispersiei acestuia față de secundar și i_1R_1 — căderea de tensiune ohmică din primarul transformatorului.

Aceste căderi de tensiune sînt cîteva procente din u_1 putînd fi neglijate față de aceasta și ca urmare $u_1 \simeq -u_{e1}$, ceea ce înseamnă că u_{e1} se opune tensiunii de alimentare u_1. Pentru valorile efective se poate scrie: $U_1 \simeq U_{e1} = 4{,}44\,N_1 f\Phi_m$, de unde rezultă că la $U_1 = constant$ (ca valoare efectivă) și la frecvență $f =$ = const., fluxul magnetic este constant (tot ca valoare efectivă și ca amplitudine) independent de regimul de funcționare al transformatorului (în sarcină cînd există i_1 și i_2 sau în gol cînd $i_2 = 0$ iar în primar $i_{10} < i_1$).

Pe baza celor de mai sus și conform (6-10) se poate scrie:

$$\theta = N_1i_1 + N_2i_2 = \Phi R_m = N_1i_{10}. \qquad (6\text{-}13)$$

La funcționarea în sarcină, secundarul transformatorului are caracter de generator. Aplicînd teorema a doua a lui Kirchhoff circuitului secundar din figura 6-6 (circuit cu rezistența R_2), se obține:

$$i_2R_2 + u_2 = u_{e2t} = -N_2\frac{d\Phi}{dt} - L_{2d}\frac{di_2}{dt} = u_{e2} - L_{2d}\frac{di_2}{dt}, \qquad (6\text{-}14)$$

unde: $L_{2d}\frac{di_2}{dt}$ și i_2R_2 sînt căderile de tensiune inductivă, respectiv, ohmică din secundar.

Tensiunea u_2, la bornele secundarului, este și tensiunea de alimentare a receptorului, caracterizat prin parametrii R, L, C, ea putînd fi scrisă ca suma căderilor de tensiune (valori instantanee), adică:

$$u_2 = i_2R + L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int i_2dt. \qquad (6\text{-}15)$$

Relațiile (6-12), (6-14), (6-15) și (6-13) scrise, ca valori instantanee, sub forma:

$$\begin{cases} u_1 = -u_{e1} + R_1i_1 + L_{1d}\dfrac{di_1}{dt} \\ u_2 = u_{e2} - R_2i_2 - L_{2d}\dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_2\,dt \\ N_1i_1 + N_2i_2 = N_1i_{10} = \Phi\,R_m \end{cases} \qquad (6\text{-}16)$$

constituie ecuațiile transformatorului monofazat la funcționarea în sarcină.

În mărimi complexe, sistemul de ecuații (6-16) se scrie:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = -\underline{U}_{e1} + (R_1 + jX_1)\,\underline{I}_1 = -\underline{U}_{e1} + \underline{Z}_1\underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 = \underline{U}_{e2} - (R_2 + jX_2)\,\underline{I}_2 = \underline{U}_{e2} - \underline{Z}_2\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = (R + jX)\,\underline{I}_2 = \underline{Z}\,\underline{I}_2 \\ \underline{N}_1\underline{I}_1 + N_2\underline{I}_2 = N_1\underline{I}_{10} = R_m\underline{\Phi} \end{cases} \tag{6-17}$$

în care s-a notat prin $X_1 = \omega L_{1d}$; $X_2 = \omega L_{2d}$ și $X = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$, reactanțele înfășurării primară și secundară corespunzătoare fluxurilor de dispersie Φ_{1d} și Φ_{2d}, respectiv reactanța receptorului. Prin $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ și $\underline{Z}$ s-au notat impedanțele complexe ale primarului, secundarului și consumatorului.

La funcționarea în sarcină transformatorul monofazat absoarbe de la rețea puterea activă $P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1$ și furnizează consumatorului puterea activă $P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2$. Diferența dintre cele două puteri active reprezintă suma dintre pierderile în fier (p_{Fe}) din miezul feromagnetic și pierderile prin efect Joule-Lenz (p_{Cu}) din înfășurarea primară și secundară.

6.1.4. Funcționarea în gol a transformatorului monofazat

Un transformator monofazat funcționează în gol atunci cînd la bornele înfășurării secundare nu are conectat consumator, adică $I_2 = 0$, iar primarul rămîne alimentat cu tensiunea nominală $U_1 = U_{1n}$. În aceste condiții, rezultînd în primar un curent mic, I_{10}, care reprezintă cca (0,5—8)% din curentul primar nominal I_{1n}(v. 4.4.1.).

Ecuațiile transformatorului monofazat la funcționarea în gol, rezultă din (6-16) sau (6-17), făcînd $i_2 = 0$ și $i_1 = i_{10}$. În valori instantanee rezultă:

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_{e1} + R_1 i_{10} + L_{1d}\frac{\mathrm{d}i_{10}}{\mathrm{d}t} \\ u_{20} &= u_{e2} \\ N_1 i_{10} &= R_m \Phi \end{aligned} \tag{6-18}$$

și în mărimi complexe:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 = -\underline{U}_{e1} + (R_1 + jX_1)\,\underline{I}_{10} &= -\underline{U}_{e1} + \underline{Z}_1\underline{I}_{10} \\ \underline{U}_{20} &= \underline{U}_{e2} \\ N_1\underline{I}_{10} &= R_m\underline{\Phi} \end{aligned} \tag{6-19}$$

Puterea activă absorbită de la rețea de către transformatorul ce funcționează în gol, $P_{10} = U_{1n} I_{10} \cos \varphi_{10}$, este formată din pierderile în fier p_{Fe_0} și pierderile în cupru $p_{Cu_0} = R_1 I_{10}^2$(ce au loc în înfășurarea primară), deci:

$$P_{10} = U_{1n} I_{10} \cos \varphi_{10} = p_{Fe_0} + p_{Cu_0} = P_{Fe_0} + R_1 I_{10}^2 \tag{6-20 a}$$

Pierderile în fier fiind independente de regimul de funcționare al transformatorului, la $U_1 = const.$, rezultă că la funcționarea în gol (cînd $U_1 = U_{1n}$) acestea sînt cele nominale. Pierderile în cupru $R_1 I_{10}^2$ sînt neglijabile căci I_{10} reprezintă cîteva procente din I_{1n}, iar R_1 este foarte mic. Ca urmare, la funcționarea în gol a transformatorului, puterea absorbită de acesta de la rețeaua de alimentare este practic egală cu pierderile în fier, adică $P_{10} \simeq p_{Fe}$.

6.1.5. Funcționarea în scurtcircuit a transformatorului monofazat

Un transformator monofazat funcționează în scurtcircuit atunci cînd $U_2 = 0$, adică bornele secundare $a - x$ sînt legate galvanic împreună ($Z = 0$), iar înfășurarea primară este alimentată cu o tensiune U_1. Se distinge scurtcircuitul de exploatare, ce are loc la $U_1 = U_{1n}$ și care poate duce la distrugerea transformatorului datorită curenților mari din înfășurări (de 10—20 ori mai mari decît cei nominali) și scurtcircuitul de încercare (de laborator) cînd $U_1 = U_{1sc_n}$ (tensiunea nominală de scurtcircuit).

Tensiunea nominală de scurtcircuit se definește ca fiind, tensiunea U_{1sc_n} cu care se alimentează înfășurarea primară, înfășurarea secundară fiind în scurtcircuit (bornele a și x legate împreună), pentru care se obțin prin înfășurări curenții nominali, I_{1n} și I_{2n}. De obicei U_{1sc_n} se exprimă în procente din U_{1n}, ea variind între 5,5% și 10,5% pentru transformatoarele cu puteri cuprinse între 5 kVA și 31,5 MVA. La asemenea tensiuni reduse pierderile în fier ($p_{Fe_{sc}}$) sînt neglijabile față de pierderile în cupru ($R_1 I_{1n}^2$ și $R_2 I_{2n}^2$) care sînt cele nominale. În aceste condiții, puterea activă absorbită de la rețea de transformatorul în scurtcircuit în încercare reprezintă:

$$P_{1sc} = U_{1sc_n} I_{1n} \cos \varphi_{1sc} = p_{Fe_{sc}} + R_1 I_{1n}^2 + R_2 I_{2n}^2 \simeq R_1 I_{1n}^2 + R_2 I_{2n}^2 = P_{Cu}, \tag{6-20.b}$$

adică este egală practic cu pierderile în cupru (prin efect Joule-Lenz) din cele două înfășurări.

6.1.6. Schema electrică echivalentă a transformatorului monofazat

O asemenea schemă permite studierea comportării transformatorului în sistemele electroenergetice de transport și distribuție a energiei electrice. Considerăm ecuațiile transformatorului (6-17) scrise sub forma:

$$N_1 \underline{I}_1 + N_2 \underline{I}_2 = N_1 \underline{I}_{10}, \tag{6-21 a}$$

$$\underline{U}_1 = -\underline{U}_{e1} + R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \underline{I}_1, \tag{6-21 b}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{e2} - R_2 \underline{I}_2 - jX_2 \underline{I}_2. \tag{6-21 c}$$

Prima ecuație se poate scrie și sub forma:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_{10} = -\frac{N_2}{N_1} \underline{I}_2. \tag{6-22}$$

Neglijînd pe $\underline{I}_{10}$ față de $\underline{I}_1$, din (6-22) rezultă:

$$\underline{I}_1 = -\frac{N_2}{N_1} \underline{I}_2 = -\frac{\underline{I}_2}{K} \text{ sau } \underline{I}_2 = -K\underline{I}_1. \tag{6-23}$$

Înmulțind (6-21. c) cu raportul de transformare K și adunînd-o cu (6-21. b) obținem:

$$\underline{U}_1 + K\underline{U}_2 = -\underline{U}_{e1} + R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \underline{I}_1 + K\underline{U}_{e2} - R_2 K \underline{I}_2 - jX_2 K \underline{I}_2 \tag{6-24}$$

Cum $\underline{I}_2 = -K\underline{I}_1$ și $\underline{U}_{e1} = K\underline{U}_{e2}$, (6-24) se mai poate scrie și în forma:

$$\underline{U}_1 + K\underline{U}_2 = R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \underline{I}_1 + R_2 K^2 \underline{I}_1 + jX_2 K^2 \underline{I}_1,$$

sau:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}'_2 = (R_1 + R'_2)\,\underline{I}_1 + j(X_1 + X'_2)\,\underline{I}_1 = R_{1sc}\,I_1 + jX_{1sc}\,I_1, \quad (6\text{-}25)$$

în care: $\underline{U}'_2 = K\underline{U}_2$; $R'_2 = K^2R_2$: $X'_2 = K^2X_2$ reprezintă mărimile secundare reduse (raportate) la primar, iar $R_{1sc} = R_1 + R'_2$ și $X_{1sc} = X_1 + X'_2$ — rezistența respectiv reactanța de scurtcircuit a transformatorului monofazat.

Relația (6-25) se mai poate scrie încă:

$$\underline{U}_1 = (R_{1sc} + jX_{1sc})\,\underline{I}_1 - \underline{U}'_2 = (R_{1sc} + jX_{1sc})\,\underline{I}_1 + \underline{U}''_2 = \\ = \underline{Z}_{1sc}\,\underline{I}_1 + \underline{U}''_2, \quad (6\text{-}26)$$

unde: $\underline{U}_1$ este tensiunea reală de alimentare a înfășurării primare, $\underline{U}''_2 = -\underline{U}'_2$ — tensiunea secundară redusă la primar, luată cu semn schimbat, $\underline{Z}_{1sc} = R_{1sc} + jX_{1sc}$ — impedanța de scurtcircuit, adică impedanța pe care o prezintă transformatorul real între bornele primare, atunci cînd bornele secundare sînt scurtcircuitate ($\underline{U}''_2 = 0$).

Ecuația (6-26) conduce la schema echivalentă a transformatorului monofazat reprezentată în figura 6-7, *a*, putîndu-se defini și un triunghi al impedanței de scurtcircuit a transformatorului (fig. 6-7, *b*).

Și curentul secundar I_2 se poate reduce la primar, dar în așa fel ca puterea aparentă a înfășurării secundare să rămînă aceeași, adică $U_{e2}\,I_2 = U'_{e2}\,I'_2$, ceea ce conduce la $\underline{I}'_2 = \dfrac{\underline{I}_2}{K} = \dfrac{-K\underline{I}_1}{K} = -\underline{I}_1 = -\underline{I}''_2$, putîndu-se scrie $\underline{I}_1 = -\underline{I}'_2 = \underline{I}''_2$.

Prin raportarea mărimilor secundare la primar s-a obținut un transformator echivalent fictiv, cu raportul de transformare egal cu unitatea, căci:

$$\frac{U_{e1}}{U'_{e2}} = \frac{U_{e1}}{KU_{e2}} = \frac{1}{K}\,\frac{U_{e1}}{U_{e2}} = \frac{1}{K}\,K = 1, \quad (6\text{-}27)$$

deci un transformator care are în primar și secundar același număr de spire ca și transformatorul real în primar.

Din cele de mai sus se vede că la transformatorul echivalent fictiv:

— fluxul magnetic este același ca la transformatorul real deoarece solenația totală este aceeași:

$$N_1\underline{I}_1 + N_1\underline{I}'_2 = N_1\underline{I}_1 + N_1\frac{\underline{I}_2}{K} - N_1\underline{I}_1 + N_2\underline{I}_2 = 0; \quad (6\text{-}28)$$

— pierderile prin efect Joule din cele două înfășurări sînt cele din transformatorul real:

$$R_1I_1^2 + R'_2I_2^2 = R_1I_1^2 + K^2R_2\left(\frac{I_2}{K}\right)^2 = R_1I_1^2 + R_2I_2^2; \quad (6\text{-}29)$$

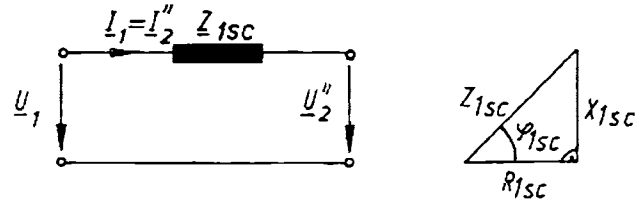


Fig. 6-7

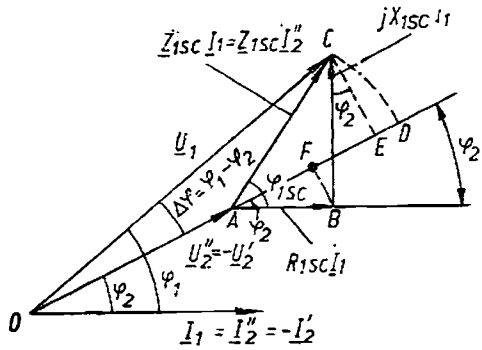


Fig. 6-8

— defazajul dintre mărimi este ca la transformatorul real, fapt exprimat prin:

$$\frac{X_2'}{R_2'}=\frac{K^2X_2}{K^2R_2}=\frac{X_2}{R_2}. \qquad (6\text{-}30)$$

Schema echivalentă prezentată mai sus s-a obținut prin neglijarea lui I_{10} față de I_1, dar există și alte scheme echivalente ce se pot deduce pentru un transformator monofazat.

6.1.7. Cădere și pierdere de tensiune la transformatorul monofazat

Considerînd transformatorul electric monofazat ca un element de circuit cu parametrii echivalenți R_{1sc} și X_{1sc}, pe acesta va avea loc o cădere de tensiune. Ea poate fi determinată folosind diagrama transformatorului echivalent reprezentată în figura 6-8, construită pe baza schemei echivalente din figura 6-7, *a* și a relației (6-26). Diagrama din figura 6-8 este cunoscută sub denumirea de *diagrama lui Kapp* și ea a fost construită astfel:

— arbitrar s-a luat $\underline{U}_2''=\underline{U}_2'=\overline{OA}$, față de care, la unghiul φ_2 s-a reprezentat $\underline{I}_1=\underline{I}_2''=-\underline{I}_2$;

— la $\underline{U}_2''$ s-a adunat, geometric, căderea ohmică $R_{1sc}\underline{I}_1=\overline{AB}$ (în fază cu $\underline{I}_1$) și cea inductivă $jX_{1sc}\underline{I}_1=\overline{BC}$ $\left(\text{defazată cu } \frac{\pi}{2} \text{ înaintea lui } \underline{I}_1\right)$.

Se definește drept *cădere de tensiune*, la transformatorul monofazat, mărimea $\Delta\underline{U}$, egală cu diferența geometrică dintre $\underline{U}_1$ și $\underline{U}_2''$, adică:

$$\Delta\underline{U}=\underline{U}_1-\underline{U}_2''=\underline{Z}_{1sc}\underline{I}_1=\underline{Z}_{1sc}\underline{I}_2''=(R_{1sc}+jX_{1sc})\,\underline{I}_1. \qquad (6\text{-}31)$$

Triunghiul dreptunghic ABC reprezintă triunghiul de scurtcircuit, care este asemenea triunghiului impedanței de scurtcircuit.

Se definește drept *pierdere de tensiune* pe transformatorul monofazat, diferența algebrică dintre U_1 și U_2'', adică:

$$\delta U=U_1-U_2''=\overline{OD}-\overline{OA}=\overline{AD}. \qquad (6\text{-}32)$$

Dacă arcul de cerc $\overline{CD}$ (cu raza OC și centrul în O) se înlocuiește cu perpendiculara $\overline{CE}$, atunci $\delta U\simeq\overline{AE}$. Ducînd și perpendiculara $\overline{BF}$ pe $\overline{AD}$, se obține:

$$\delta U=\overline{AE}=\overline{AF}+\overline{FE}=R_{1sc}I_1\cos\varphi_2+X_{1sc}I_1\sin\varphi_2=$$

$$=R_{1sc}I_2''\cos\varphi_2+X_{1sc}I_2''\sin\varphi_2. \qquad (6\text{-}33)$$

Din (6-33) rezultă că pierderea de tensiune pe transformator depinde de sarcina transformatorului (prin I_2'') și de caracterul consumatorului (prin $\cos\varphi_2$).

6.1.8. Caracteristica externă a transformatorului monofazat

Pierderea de tensiune pe transformatorul δU prezintă importanță în studiul variației tensiunii U_2 de la bornele înfășurării secundare, raportată la cea de mers în gol $U_{20} = U_{e2}$, adică:

$$\frac{U_{20} - U_2}{U_{20}} = \frac{U_{e2} - U_2}{U_{e2}} = \frac{\delta U_2}{U_{e2}}. \tag{6-34}$$

Ținînd seama de diagrama lui Kapp, de (6-33) și considerînd $U_{e1} = U_1 = U'_{e2}$ respectiv $U'_2 = U''_2$ (ca valori efective), (6-34) devine:

$$\frac{\delta U_2}{U_{e2}} = \frac{K(U_{e2} - U_2)}{KU_{e2}} = \frac{U'_{e2} - U'_2}{KU_{e2}} = \frac{U_1 - U''_2}{KU_{e2}} = \frac{\delta U}{KU_{e2}} =$$

$$= \frac{\delta U_2}{U_{e2}} = \frac{R_{1sc}I''_2 \cos \varphi_2 + X_{1sc}I''_2 \sin \varphi_2}{KU_{e2}} =$$

$$= \frac{R_{1sc}(KI_2) \cos\varphi_2 + X_{1sc}(KI_2) \sin \varphi_2}{KU_{e2}}, \tag{6-35}$$

adică:

$$\delta U_2 = I_2 (R_{1sc} \cos \varphi_2 + X_{1sc} \sin \varphi_2). \tag{6-36}$$

Caracteristica externă este definită ca dependența funcțională $U_2 = f(I_2)$, la $U_1 = U_{1n}$ și $\cos \varphi_2 = const.$ Cunoscînd pe δU_2 ca funcție de I_2 dată de (6-36) se poate scrie pentru caracteristica externă expresia:

$$U_2 = U_{20} - \delta U_2 = U_{20} - I_2 (R_{1sc} \cos \varphi_2 + X_{1sc} \sin \varphi_2), \tag{6-37}$$

din care rezultă că alura caracteristicii externe $U_2 = f(I_2)$ depinde atît de I_2, deci de mărimea sarcinii, cît și de natura acesteia — caracterizată prin factorul de putere $\cos \varphi_2$.

În figura 6-9 se prezintă caracteristica externă a transformatorului monofazat pentru trei cazuri: consumator inductiv (*a*), consumator pur ohmic (*b*) și consumator capacitiv (*c*).

Pentru a face față variațiilor de tensiune din secundar, se construiesc transformatoare (mai ales trifazate) la care înfășurarea primară are un anumit număr de spire ce se pot modifica (regla) în trepte. Acest reglaj se poate face fie sub sarcină, fie cu transformatorul funcționînd în gol, printr-un comutator de spire.

6.1.9. Randamentul transformatorului monofazat

Datorită pierderilor de putere din transformator $p_{Fe} + p_{Cu}$, puterea $P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2$ cedată de secundar este mai mică decît puterea $P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1$ absorbită de primar. Randamentul transformatorului, definit ca raportul dintre puterea cedată și cea absorbită se poate scrie:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - p_{Cu} - p_{Fe}}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + p_{Cu} + p_{Fe}}. \tag{6-38}$$

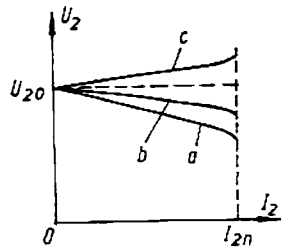


Fig. 6-9

Introducînd coeficientul de încărcare relativă a transformatorului, definit ca raportul $\beta = \frac{I_2}{I_{2n}}$ și neglijînd variația în sarcină a tensiunii secundare (deci $U_2 = U_{2n}$), puterea P_2 se poate scrie sub forma:

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = U_{2n} \beta I_{2n} \cos \varphi_2 = \\ = \beta S_{2n} \cos \varphi_2, \qquad (6\text{-}39)$$

unde $S_{2n} = U_{2n} I_{2n}$ este puterea aparentă nominală. Neglijînd curentul I_{10} față de I_1, din (6-22) rezultă $\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = K = \frac{I_{2n}}{I_{1n}}$ adică $\frac{I_2}{I_{2n}} = \frac{I_1}{I_{1n}} = \beta$.

Se pot exprima și pierderile în cupru, funcție de β, astfel:

$$p_{Cu} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = R_1 I_1^2 + R_2 (K I_1)^2 = (R_1 + R_2') I_1^2 = \\ = R_{1sc} I_1^2 = R_{1sc} \beta^2 I_{1n}^2 = \beta^2 p_{Cu_n}, \qquad (6\text{-}40)$$

p_{Cu_n} fiind pierderile nominale, denumite și pierderi nominale de scurtcircuit.

Cu aceastea, expresia randamentului (6-38), în funcție de β, se scrie:

$$\eta = \frac{p_2}{P_2 + p_{Cu} + p_{Fe}} = \frac{\beta S_{2n} \cos \varphi_2}{\beta S_{2n} \cos \varphi_2 + \beta^2 p_{Cu_n} + p_{Fe}}, \qquad (6\text{-}41)$$

din care rezultă că la un $\cos \varphi_2$ dat, randamentul este maxim la un anumit β_m obținut din $\frac{d\eta}{d\beta} = 0$. Făcînd calculele se ajunge la concluzia că β_m corespunde cazului cînd pierderile în fier sînt egale cu cele din cupru, adică $p_{Fe} = R_{1sc} I_1^2$.

Pentru determinarea experimentală a randamentului se efectuează două încercări:

— încercarea în gol, cînd se obține $p_{Fe} \simeq P_{10}$ (v. 6.1.4.);

— încercarea în scurtcircuit, obținîndu-se $p_{Cu} \simeq P_{1sc}$ conform (6-20 *b*).

În general, valoarea nominală a randamentului transformatorului electric este destul de mare. Cu cît transformatorul este de putere mai mare cu atît randamentul este mai ridicat. Ca valori, $\eta < 0{,}7$ la puteri mici, $\eta = 0{,}95 - 0{,}97$ la puteri de zeci și sute kVA și $\eta > 0{,}99$ la puteri de zeci și sute de MVA.

De remarcat că η este maxim la $\beta < 1$; deoarece cea mai mare parte din timp transformatorul funcționează cu o sarcină mai mică decît cea nominală este recomandabil, din punct de vedere economic, ca în cea mai mare parte a timpului de funcționare randamentul să fie maxim.

6.1.10. Noțiuni privind construcția transformatorului trifazat

Transportul și distribuția energiei electrice se face în general prin rețele trifazate, ceea ce necesită și transformatoare electrice trifazate. Transformatorul trifazat se poate obține, folosind trei transformatoare monofazate ale căror înfășurări (primară, respectiv, secundară) se leagă în conexiune stea (fig. 6.10), triunghi sau zig-zag. Bornele și capetele celor trei înfășurări primare (fazele primare) se notează de obicei cu A, B, C (începuturile) și X, Y, Z (sfîrșiturile); aceleași litere, însă mici, se folosesc pentru înfășurările secundare. La conexiunea stea a fazelor transformatorului trifazat, borna co-

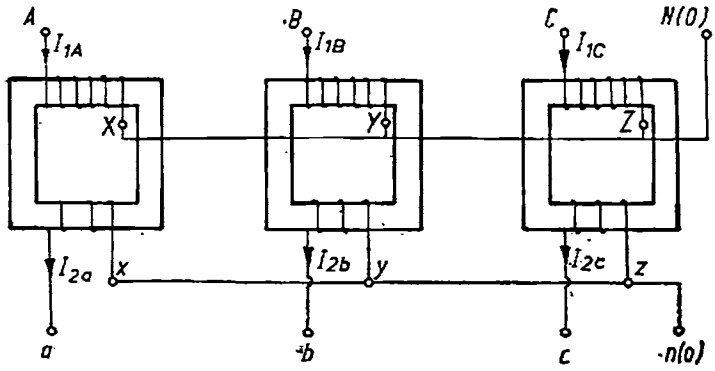


Fig. 6-10

mună (neutru) se va nota cu N sau O pe partea primară și cu n sau o, pe partea secundară.

Pentru exploatare, transformatorul trifazat se realizează ca o construcție compactă, avînd un singur miez de fier, de regulă cu trei coloane, ca în figura 6-11, unde s-a considerat înfășurarea primară conectată în triunghi, iar cea secundară în stea.

La transformatorul trifazat (ca și la cel monofazat) se disting trei elemente constructive principale: miezul feromagnetic, înfășurările primară și secundară (concentrice, biconcentrice, alternante în galeți) cîte una pentru fiecare fază și cuva de ulei prevăzută cu izolatoarele de trecere.

6.1.11. Principiul de funcționare a transformatorului trifazat

Dacă înfășurările primare (cele trei faze) se alimentează cu un sistem de tensiuni trifazat simetric, în acestea vor circula curenții i_{1A}, i_{1B} și i_{1C} care (prin solenațiile respective) vor determina în cele trei coloane (fig. 6-11) fluxurile fasciculare Φ_A, Φ_B și Φ_C. Cele trei fluxuri, în condițiile precizate, constituie un sistem de mărimi trifazat simetric, a căror sumă este nulă în orice moment. Din acest motiv nu mai sînt necesare juguri suplimentare pentru închiderea fluxurilor magnetice din cele trei coloane.

Fluxurile produse de solenațiile celor trei faze primare fiind variabile în timp, vor induce (în baza fenomenului inducției electromagnetice), tensiuni electromotoare în cele trei înfășurări secundare de fază. Dacă se face abstracție de curenții magnetizanți, fazele transformatoarelor trifazate încărcate simetric (receptor echilibrat) se comportă ca înfășurări ale cîte unui transformator monofazat. Ca urmare transformatoarele trifazate pot fi studiate cu ajutorul schemelor echivalente

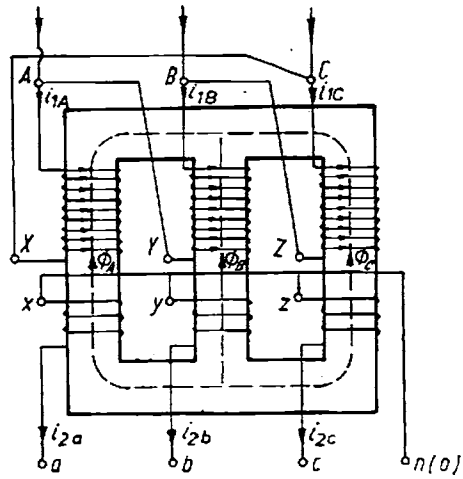


Fig. 6-11

și ecuațiilor deduse pentru transformatorul monofazat. În cele mai multe aplicații practice aceste condiții sînt îndeplinite, teoria transformatorului trifazat reducîndu-se la cea a transformatorului monofazat, aplicată separat fiecărei faze (fiecărei perechi de înfășurări — primară și secundară — de pe aceeași coloană).

6.1.12. Scheme de conexiuni și grupe de conexiuni la transformatoarele trifazate

Cele trei înfășurări primare și secundare pot fi legate între ele în stea, triunghi sau zigzag. Aceste legături constituie așa numitele scheme de conexiuni și sînt reprezentate în figura 6-12 împreună cu diagramele tensiunilor (mărimi complexe).

Cele trei tipuri de legătură ale fazelor se simbolizează prin Y, D, Z pentru înfășurările legate în stea, triunghi și zigzag, respectiv y, d, z pentru cele secundare. De remarcat că numai la înfășurări din secundar se întîlnește schema de conexiune zigzag. Dacă una din înfășurări are nulul scos la borna de nul, la simbolul respectiv se adaugă indicele 0 (zero). Practic sînt posibile următoarele scheme de conexiuni: Yy; Yd; Yz, Dy, Dd și Dz cu mențiunea că la schemele de conexiuni Y, y și z poate fi scos nulul, deci pot apărea și Y_0, y_0 și z_0.

Grupele de conexiuni reprezintă conexiunile posibile ale transformatoarelor trifazate care dau același unghi de defazaj α dintre tensiunile de linie omoloage din primar și secundar. Folosind reprezentarea fazorială, în primar există tensiunile de pe faze U_A, U_B și U_C și pe linie U_{AB}, U_{BC} și U_{CA}, iar în secundar U_a, U_b, U_c respectiv U_{ab}, U_{bc}, U_{ca}. Sînt tensiuni de linie omoloage: U_{AB} cu U_{ab}; U_{BC} cu U_{bc} și U_{CA} cu U_{ca}.

Unghiul α poartă numele de *deplasare unghiulară* sau *indice de cuplaj* și se măsoară între fazorul care reprezintă tensiunea de linie U_{AB} și fazorul

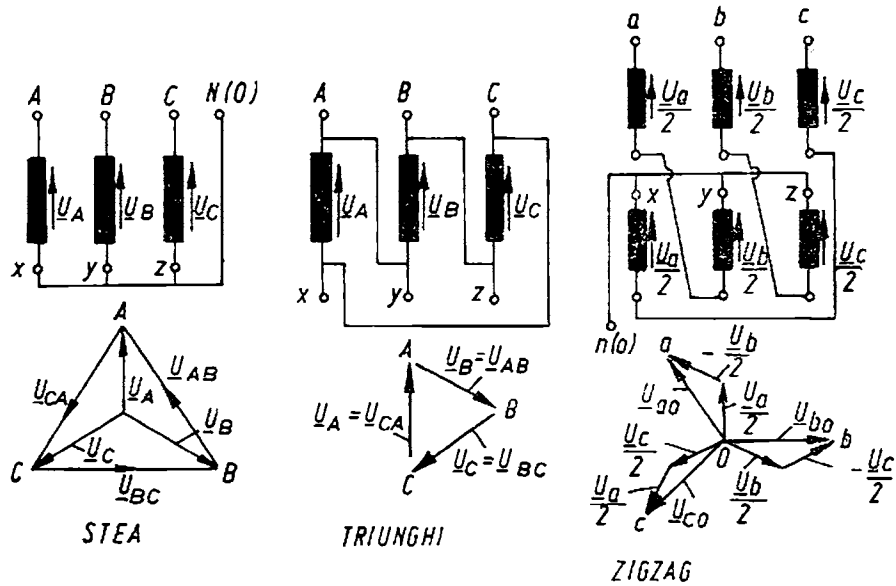


Fig. 6-12

U_{ab}. Acest unghi depinde de schema de conexiuni a fazelor primare și secundare, de sensul de bobinare al înfășurărilor primare și secundare, precum și de poziția capetelor fazelor (început-sfîrșit). La transformatoarele trifazate α nu poate fi decît un multiplu al unghiului de 30°, adică $\alpha = n30°$, unde n este numărul de ordine al grupei de conexiuni. Există deci 12 grupe de conexiuni, căci $0 < \alpha < 360°$, iar grupa $n = 0$ este identică cu grupa $n = 12$. După STAS 1703/63, opt sînt grupele de conexiuni folosite la transformatoarele de putere, acestea fiind prezentate în tabela 6-1.

La transformatoarele trifazate, raportul de transformare depinde de grupa de conexiuni și este definit ca raportul dintre tensiunea de linie aplicată primarului și tensiunea de linie obținută în secundar, la funcționarea în gol. Acest raport diferă, în general, de raportul numărului de spire din primar și secundar.

6.1.13. Funcționarea în paralel a transformatoarelor electrice

Cînd puterea solicitată unui transformator atinge pe cea nominală, o extindere în continuare a puterii consumatorilor necesită punerea în paralel a două sau mai multe transformatoare electrice. Transformatoarele funcționează în paralel atunci cînd bornele omoloage primare și secundare sînt legate electric între ele, înfășurările primare fiind alimentate cu același sistem de tensiune, iar cele secundare alimentează același consumator.

Din punctul de vedere al consumului de materiale, al investițiilor, al pierderilor de putere, este mai avantajoasă folosirea unui singur transformator de putere mai mare decît a mai multora în paralel, de puteri mai mici. Cu toate acestea, utilizarea mai multor transformatoare în paralel în locul unuia singur de putere corespunzătoare, prezintă unele avantaje:

— posibilitatea asigurării continue cu energie electrică a consumatorilor la deconectarea unor transformatoare pentru revizii sau reparații, sarcina acestora fiind preluată (pentru un timp limitat) de celelalte transformatoare;

— posibilitatea menținerii unui nivel minim al pierderilor în procesul de transformare prin modificarea numărului de transformatoare aflate în funcțiune, corespunzător sarcinii cerute zilnic sau sezonier, conform graficelor de sarcină (v. cap. 7).

Pentru ca două transformatoare monofazate să poată fi conectate în paralel și să funcționeze corect, sînt necesare trei condiții.

1° Raporturile de transformare ale celor două transformatoare trebuie să fie aceleași, căci altfel secundarul transformatorului cu raport de transformare mai mare devine consumator pentru secundarul celui cu raportul de transformare mai mic (înfășurările primare fiind conectate la aceeași tensiune).

2° Tensiunile de scurtcircuit ale celor două transformatoare să fie egale, căci numai așa cele două transformatoare ce alimentează același consumator se încarcă cu puteri proporționale cu puterile lor nominale. Dacă această condiție nu este îndeplinită, se poate ajunge în situația ca transformatorul de putere mai mică să se încarce peste puterea sa nominală, iar cel de putere mai mare să funcționeze subîncărcat.

3° Triunghiurile de scurtcircuit ale celor două transformatoare să fie egale. Îndeplinirea acestei condiții asigură ca același curent I, absorbit de consumator, să fie acoperit de doi curenți minimi, furnizați de secundarele celor două transformatoare conectate în paralel. Curenți minimi înseamnă pierderi minime, respectiv solicitări termice mai mici.

TABELA 6-1

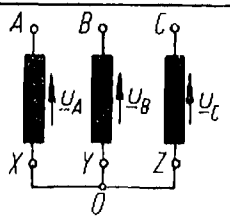
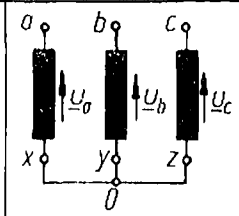
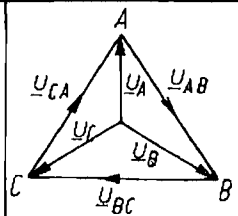
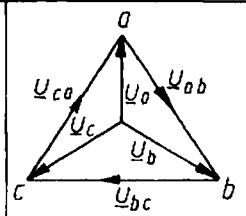
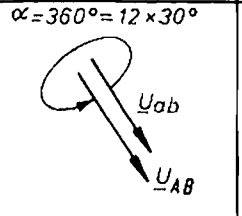
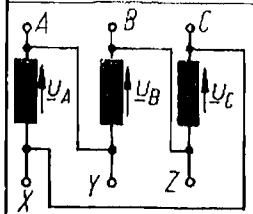
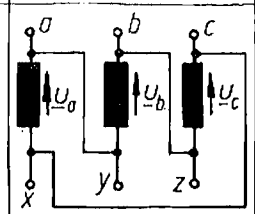
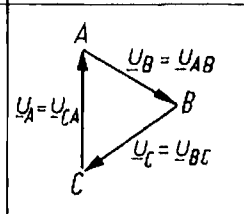
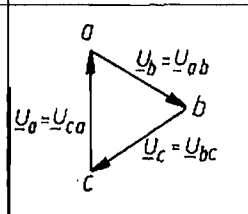
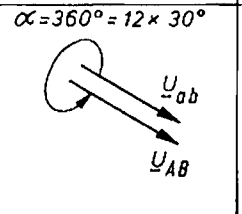
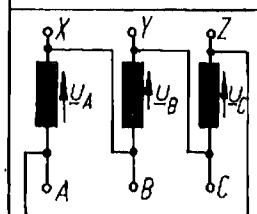
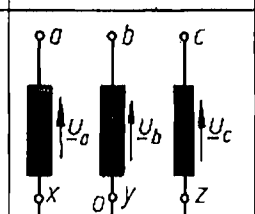
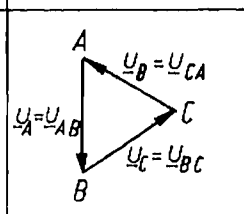
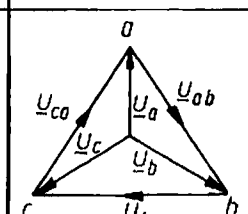
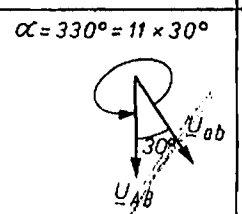
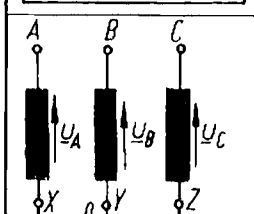
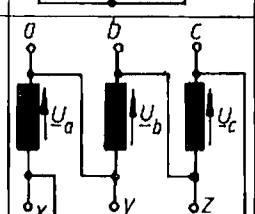
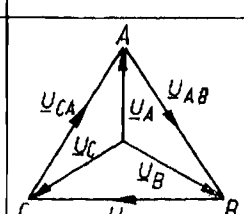
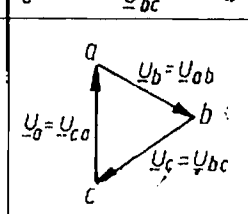
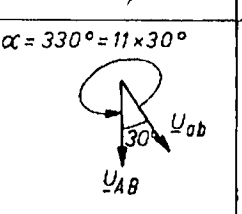
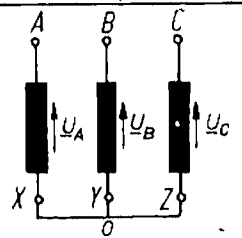
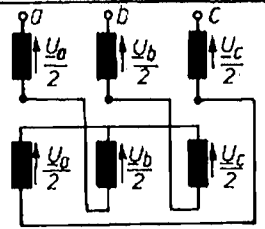
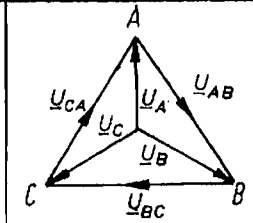
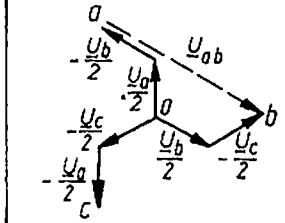
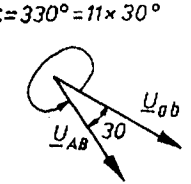
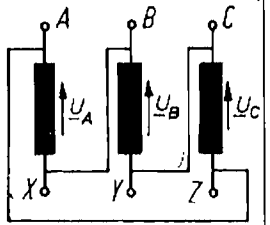
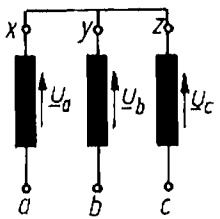
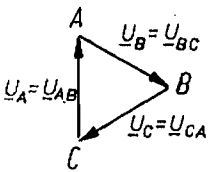
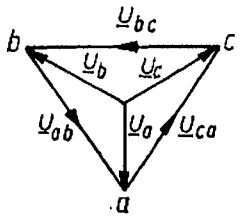
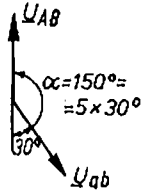
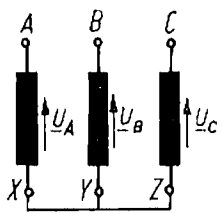
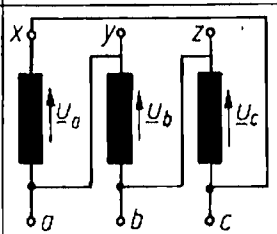
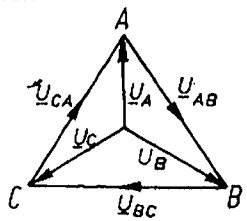
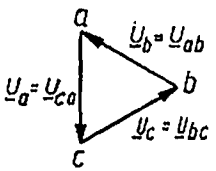
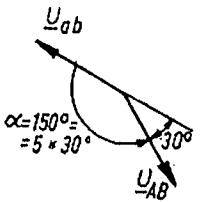
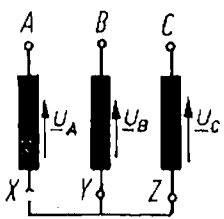
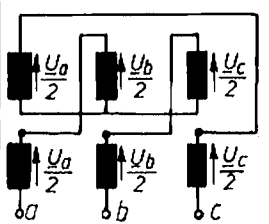
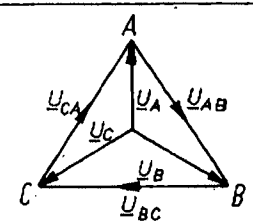
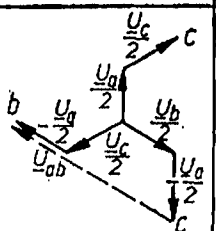
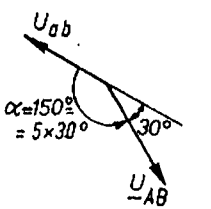
SCHEMA DE CONEXIUNI		DIAGRAMA TENSIUNILOR		UNGHIUL α	SIMBOL
PRIMAR	SECUNDAR	PRIMAR	SECUNDAR		
1	2	3	4	5	6
					Yy - 12
					Dd - 12
					Dy - 11
					Yd - 11

TABELA 6-1 (continuare)

1	2	3	4	5	6
					$Y_Z - 11$
					$Dy - 5$
					$Yd - 5$
					$YZ - 5$

Pentru funcționarea în paralel a transformatoarelor trifazate trebuie să fie îndeplinită în plus și condiția ca acestea să facă parte din aceeași grupă de conexiuni.

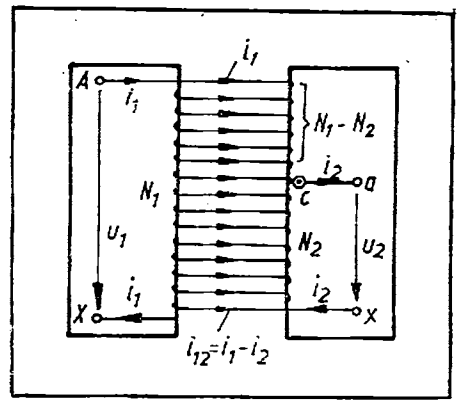


Fig. 6-13

6.1.14. Autotransformatorul

În cazul cînd cele două tensiuni (primară și secundară) nu diferă prea mult, ceea ce înseamnă raport de transformare cuprins între $K = 0{,}5$ și $K = 2$, este avantajos ca în locul transformatorului obișnuit să fie folosit un autotransformator, la care cele două înfășurări (primară și secundară) nu mai sînt izolate electric între ele.

Un autotransformator monofazat, coborîtor de tensiune este prezentat schematic în figura 6-13. Înfășurarea de joasă tensiune, cu N_2 spire, este o parte comună primarului și secundarului. Cele N_2 spire sînt străbătute de curentul $i_{12} = i_1 - i_2$, iar curentul i_1 parcurge $(N_1 - N_2)$ spire, solenația totală fiind atunci:

$$\underline{\Theta} = (N_1 - N_2)\,\underline{I}_1 + N_2(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) = \underline{\Phi}\,R_m \text{ sau } N_1\underline{I}_1 - N_2\underline{I}_2 = \underline{\Phi}R_m. \quad (6\text{-}42)$$

Neglijînd pierderile (deci $R_m = 0$) obținem: $N_1\underline{I}_1 - N_2\underline{I}_2 = 0$ și $N_1(\underline{I}_{12} + \underline{I}_2) - N_2\underline{I}_2 = 0$, de unde rezultă:

$$\underline{I}_{12} = \left(\frac{N_2}{N_1} - 1\right)\underline{I}_2. \quad (6\text{-}43)$$

Din (6-43) se vede că înfășurarea secundară (cele N_2 spire) este parcursă de un curent I_{12} cu atît mai mic față de I_2 (cel furnizat consumatorului) cu cît raportul $\frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{K}$ este mai apropiat de unitate, deci cu cît tensiunea joasă diferă mai puțin de cea înaltă.

De remarcat că primarul autotransformatorului transferă putere (energie) secundarului atît direct în porțiunea comună a înfășurării (N_2 spire) cît și prin intermediul cîmpului electromagnetic, ca transformatorul obișnuit.

Pentru reglajul tensiunii se folosesc autotransformatoare reglabile, care au priza c (fig. 6-13) sub forma unei perii colectoare ce alunecă pe suprafața dezizolată a celor N_1 spire. Miezul acestor autotransformatoare reglabile poate fi toroidal (un asemenea transformator reglabil monofazat se mai numește și *variac*) sau în manta (ca în fig. 6-13). În acest ultim caz peria colectoare se deplasează liniar de-a lungul unei generatoare dezizolate a bobinajului.

Se construiesc autotransformatoare monofazate coborîtoare și ridicătoare de tensiune (pînă la 10—15 kVA), precum și autotransformatoare trifazate la puteri mari.

6.1.15. Transformatoare electrice de sudare

Sînt transformatoare coborîtoare de tensiune, în general monofazate, care au rolul de a furniza curentul electric necesar pentru sudarea (ca și pentru tăierea pieselor metalice) cu arcul electric sau sudură de contact (cap la cap, în crestătură sau prin puncte).

Pentru sudarea cu arc, transformatorul electric trebuie să aibă la funcționarea în gol o tensiune secundară joasă din motive de securitate, dar suficient de mare pentru aprinderea și menținerea arcului (75—80 volți). Caracteristica externă $U_2 = f(I_2)$ trebuie să fie pronunțat descrescătoare (fig. 6-14) pentru ca I_2 să nu se modifice mult la variații ale lungimii arcului electric de sudare (deci a tensiunii U_2 de pe arc) din timpul procesului tehnologic de sudare. Se obține în felul acesta un arc electric stabil.

Tensiunea pe arcul electric de sudare este în general de 15—35 V, ea variind liniar cu lungimea arcului. Această lungime este impusă de distanța dintre electrozi, ea fiind practic invers proporțională cu I_2 (intensitatea curentului electric din arc). Regimul de funcționare al transformatorului de sudare cu arc este dat de intersecția caracteristicii externe $U_2 = f(I_2)$ cu caracteristica voltamper a arcului electric (curbele *1*, *2*, *3* din fig. 6-14 pentru trei distanțe dintre electrozi).

Caracteristici externe pronunțat descrescătoare (căzătoare) se obțin dacă în secundar există reactanță mărită, care determină și un defazaj mai mare între u_2 și i_2. Acest defazaj asigură ca la trecerea lui i_2 prin zero (arcul se stinge la fiecare trecere a lui i_2 prin zero) sau prin valori foarte mici, tensiunea U_2 să aibă o valoare suficientă ca arcul să nu fie întrerupt (reaprinderea sigură a arcului). Caracteristicile externe *a*, *b*, *c* și *d* din figura 6-14 sînt pentru patru valori ale reactanțelor din secundar.

Există mai multe tipuri constructive pentru transformatoarele de sudare cu arc. În figura 6-15 este prezentat schematic transformatorul de sudare cu înfășurarea primară mobilă. Prin deplasarea înfășurării primare ce are N_1 spire, după direcția X, se modifică distanța „*d*" dintre cele două înfășurări, ceea ce conduce la modificarea fluxurilor de dispersie, adică la schimbarea și a reactanței inductive X_2 din secundar.

Transformatorul de sudare cu prize intermediare în primar este prezentat schematic în figura 6-16. Înfășurarea secundară se află pe aceeași coloană cu cea primară, dar între cele două semibobine primare *A* și *B*. Modificînd numărul de spire primare cu ajutorul comutatorului în trepte *C*, se modifică fluxul de dispersie și ca urmare reactanța secundară X_2.

Figura 6-17 prezintă schematic transformatorul de sudare cu șunt magnetic. Un miez feromagnetic *M* (denumit șunt magnetic) se introduce (perpendicular pe planul hîrtiei) între cele două coloane ale miezului. Se creează o nouă „cale" de închidere a liniilor de cîmp magnetic, modificîndu-se reactanța X_2 a secundarului, odată cu poziția șuntului magnetic *M*.

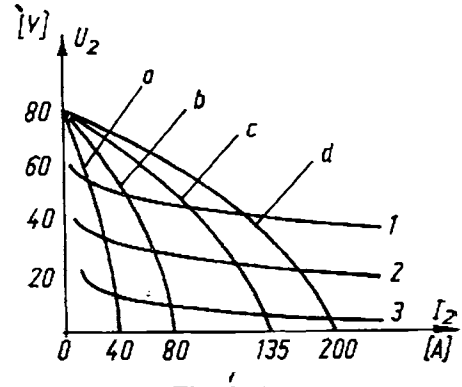


Fig. 6-14

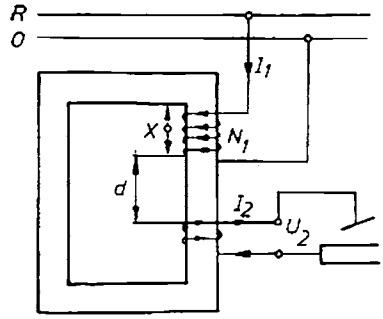


Fig. 6-15

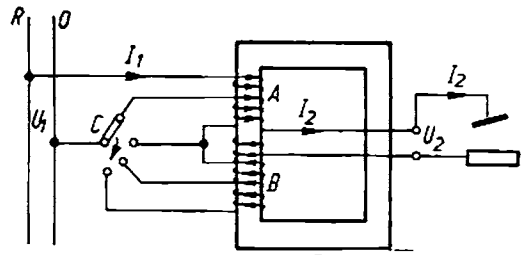


Fig. 6-16

Un alt tip de transformator pentru sudare este cel cu bobină de reactanță pe miez comun, prezentat schematic în figura 6-18. Este de fapt un transformator cu trei înfășurări: primară (p), secundară (s) și de reactanță (r), toate fiind dispuse pe același miez. Înfășurarea secundară este în serie cu cea de reactanță. Reactanța înfășurării r se modifică prin deplasarea șuntului M, adică prin modificarea întrefierului δ.

Există și alte tipuri constructive: transformator de sudare cu bobină de reactanță separată, transformator de sudare automată, transformator de sudare pentru mai multe posturi, transformator de sudare trifazat, transformator de sudare trifazat-monofazat etc.

Pentru sudarea prin contact se folosesc transformatoare cu tensiuni mai mici în secundar (2-10 V) și curenți mari (pînă la 100 kA), reglajul curentului făcîndu-se prin intermediul unei reactanțe cu prize.

De remarcat că în timpul sudării cu arc electric, factorul de putere al transformatorului este mic (cca 0,3 ... 0,5) fiind de natură reactivă.

Transformatoarele monofazate de sudare, alimentate de la rețelele trifazate, conduc la încărcarea nesimetrică a acestora.

6.1.16. Transformatoare pentru încălzirea prin inducție în înaltă frecvență

Încălzirea prin inducție a materialelor conductoare este larg utilizată la: tratamentul termic al pieselor; încălzirea în profunzime pînă la temperatura corespunzătoare deformării plastice (pentru forjare, matrițare, laminare); topirea metalelor; lipirea și sudarea metalelor; prelucrarea termochimică

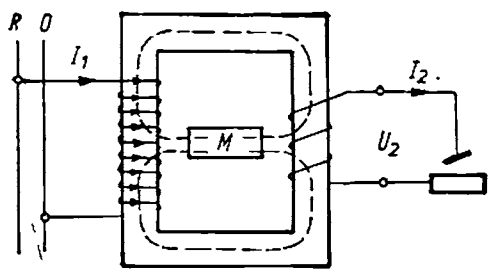


Fig. 6-17

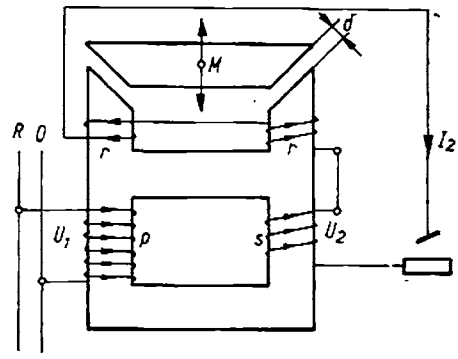


Fig. 6-18

a pieselor. Procesul fizic constă în inducerea unor curenți turbionari (Foucault) în piesa de încălzit, energia termică dezvoltată de acești curenți determinînd încălzirea piesei (v. 4.4.3.). În instalațiile de încălzire prin inducție se utilizează ca sursă a cîmpului electromagnetic un inductor care poate fi de cele mai diverse forme, în funcție de forma și dimensiunile piesei de încălzit. Cel mai des întîlnite sînt inductoarele cilindrice sau dreptunghiulare.

Transformatoarele pentru încălzirea prin inducție în înaltă frecvență se folosesc pentru acordarea parametrilor inductorului cu parametrii sursei de alimentare. După destinație, aceste transformatoare se clasifică în:

— transformatoare pentru călire, cu tensiuni în secundar de 8—150 V și curenți pînă la 30 kA;

— transformatoare pentru încălzire, cu 150—1 000 V tensiunea secundară și curenți mici.

Înfășurările primare ale acestor transformatoare sînt alimentate cu tensiuni cuprinse în general între 300—800 V.

La aceste transformatoare, care lucrează la frecvențe mari, se manifestă puternic efectul pelicular, fapt ce conduce la pierderi în cupru mult mai mari decît cele obișnuite. La frecvențe mari și pierderile în fier sînt mult mai mari, ajungînd pînă la cca 100 W/kg față de cca 3 W/kg. Din aceste motive, transformatoarele pentru încălzirea prin inducție în înaltă frecvență prezintă unele particularități constructive generale:

— răcirea intensă cu apă a înfășurărilor și a miezului feromagnetic;

— executarea înfășurărilor din țeavă de cupru profilată pentru a putea fi răcite cu apă;

— între tolele miezului feromagnetic se montează plăci (tole) de cupru cu țevi de cupru lipite pe ele, prin care circulă apa;

— înfășurările sînt de tipuri speciale, menite a folosi la maximum secțiunea de cupru în condițiile manifestării puternice a efectului pelicular;

— înfășurarea secundară are în general un număr foarte redus de spire (1—3 spire).

În practică se întîlnesc și alte tipuri de transformatoare, ca: bobina de inducție, transformatoare modificatoare de număr de faze, transformatoare de măsurare (v. cap. 5) etc.

6.1.17. Simbolizarea transformatoarelor

Transformatoarele electrice de putere, fabricate în țara noastră, se simbolizează prin grupuri de litere și cifre, separate între ele, așa ca în figura 6-19. Spre exemplu, un transformator (T), trifazat (T) de putere 1 000 kVA și tensiuni 6/0,4 kV (6 kV în primar și 0,4 kV în secundar), cu ulei (U) și reglajul sarcinii sub sarcină (S), avînd circulația forțată a uleiului (F) iar răcirea cuvei prin suflaj cu aer (S), se simbolizează: TTUS-FS-1000 kVA-6/0,4 kV.

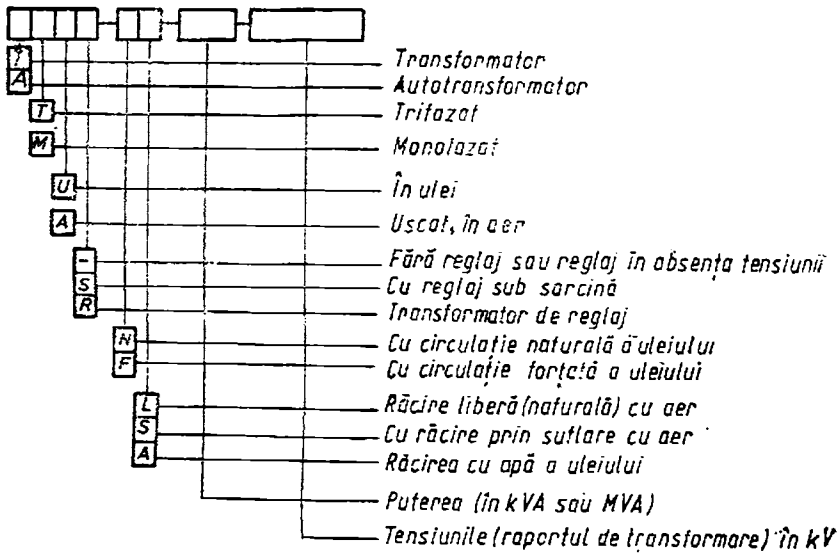


Fig. 6-19

6.2. MAȘINA DE CURENT CONTINUU

Mașina de curent continuu este o mașină electrică rotativă, care transformă energia mecanică în energie electromagnetică (generator) sau invers (motor). Această energie electromagnetică se realizează în regim electrocinetic staționar, de curent continuu (cu $f = 0$, $E = const.$, $U = const.$ și $I = const.$).

Mașinile electrice de curent continuu sînt, din punct de vedere istoric, cele mai vechi mașini electrice rotative. Dezvoltarea ulterioară a mașinilor electrice de curent alternativ, avantajele transportului și distribuției energiei electromagnetice sub tensiuni și curenți alternativi, au restrîns mult domeniul de utilizare a mașinilor de curent continuu. Se mai folosesc aceste mașini în tracțiunea electrică, în acționări electromecanice (mașini de ridicat, poduri rulante, laminoare, mașini unelte etc.), ca excitatoare, generatoare de sudură, servomotoare, generatoare („dinamuri") auto etc.

Din punctul de vedere al fenomenelor electromagnetice ce au loc în cadrul procesului transformărilor de energie, o mașini de curent continuu (c.c.) este constituită din două părți principale, distincte:

— *inductorul*, parte care are rolul de a produce un cîmp magnetic de excitație — cîmpul inductor (în general este partea fixă, numită *stator*);

— *indusul*, în care cîmpul magnetic de excitație induce tensiuni electromotoare (în general partea mobilă numită *rotor*).

Alte elemente introductive, referitoare la cîmpul magnetic din întrefierul mașinii, au fost prezentate la punctul 4.4.2.

6.2.1. Elemente constructive ale mașinii de curent continuu

Elementele constructive ale mașinii de curent continuu sînt prezentate în figura 6-20. Două sînt componentele principale ale mașinii: statorul și rotorul.

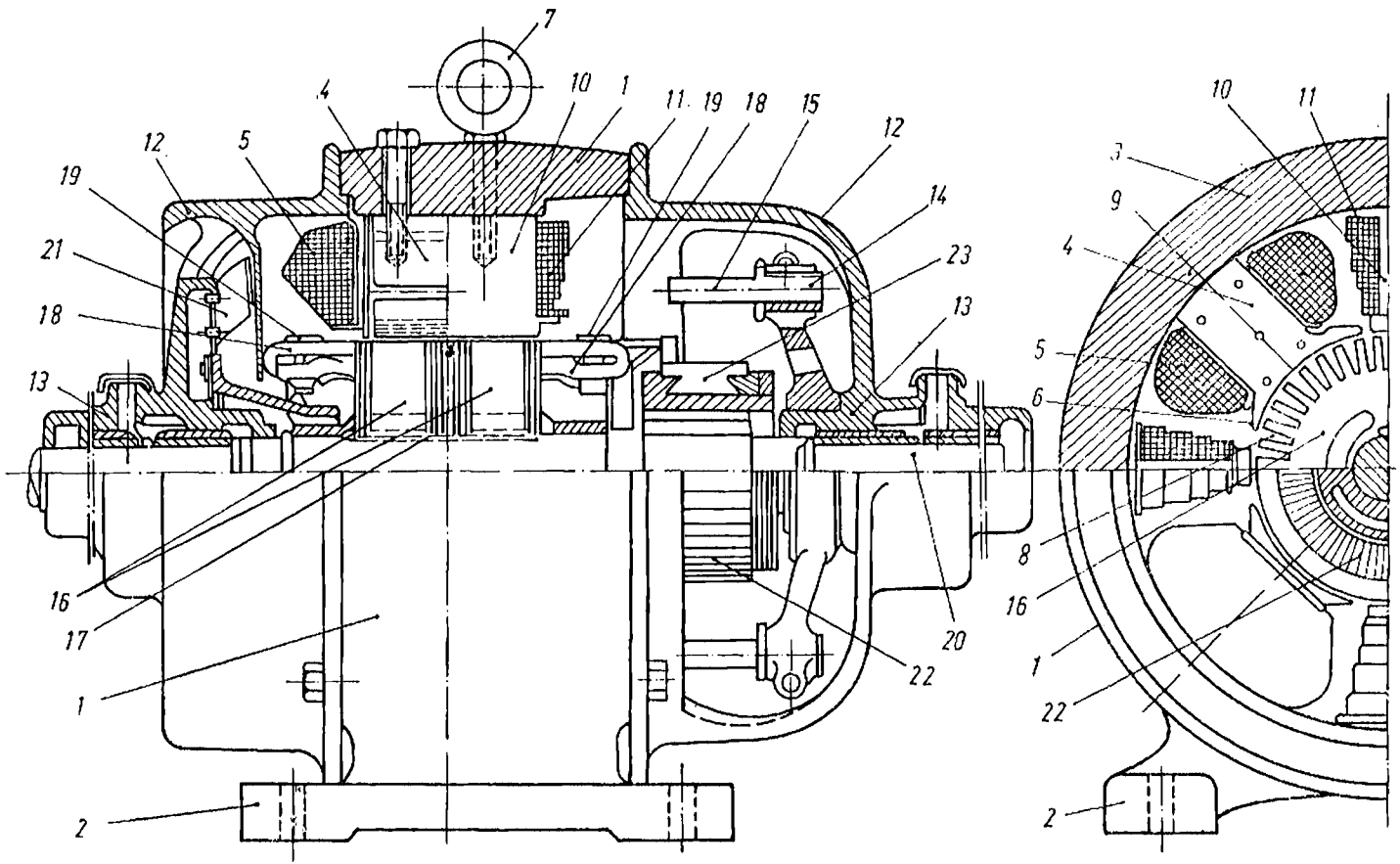

7
4
10
1
11
19
18
15
12
5
12
19
21
18
13
14
23
13
16
17
1
2
20
22
10
11
3
9
4
5
6
8
16
1
22
2

Fig. 6-20

Ca elemente componente ale statorului (inductorului) menționăm:

a) carcasa (*1*), partea exterioară, cu tălpile de prindere (*2*). Partea din carcasă ce servește la închiderea liniilor de cîmp se numește jug statoric (*3*) și este executată din fontă sau oțel turnat. Carcasa mai cuprinde: inelul de ridicare (*7*), cutia de borne, plăcuța indicatoare și borna de legare la pămînt;

b) polii principali (polii de excitație), constituiți din miezul polului (*4*) care se termină cu talpa (piesa) polară (*6*) și înfășurarea de excitație, care asigură poli magnetici alternanți: Nord (*N*) — Sud (*S*) — Nord (*N*) .... Acești poli sînt în număr par (p perechi). Axa de simetrie (*9*) ce trece prin mijlocul polului se numește axa longitudinală, iar bisectoarea unghiului format de două axe longitudinale consecutive — axă transversală, sau axă neutră;

c) polii auxiliari, așezați în axa neutră (denumită și poli de comutație), de dimensiuni mai reduse, au pe miez (*10*) o înfășurare concentrată (*11*) ce servește la îmbunătățirea comutației;

d) scuturile (capacele) frontale (*12*) ce conțin lagărele (*13*), colierul (*14*) de susținere a periilor, tijele portperiilor (*15*), portperiile și periile colectoare.

Ca elemente componente ale rotorului (indusului) menționăm:

a) miezul feromagnetic (*16*), de formă cilindrică este confecționat din pachete de tole silicioase între care sînt prevăzute interstiții radiale (*17*) pentru ventilație. După generatoarele miezului cilindric sînt practicate crestături (*8*), denumite și ancoșe, în care se află conductoare (*18*) ce constituie înfășurarea rotorică. Conductoarele sînt fixate prin pene de lemn (sau alt material electroizolant) și bandaje (*19*). Miezul e fixat direct pe axul mașinii (*20*) împreună cu ventilatorul (*21*). Distanța dintre două axe neutre consecutive, măsurată pe periferia miezului rotoric se numește *pas polar* și se notează cu τ_p. Interstițiul de aer dintre miezul rotoric și polii statorici, necesar rotirii rotorului, se numește întrefier, notîndu-se cu δ;

b) colectorul (*22*) este constituit dintr-un cilindru divizat după generatoarele sale, în lamele de cupru de formă trapezoidală și izolate cu micanită atît între ele cît și față de butucul arborelui. Lamelele sînt montate pe arbore prin sistemul „coadă de rîndunică" (*23*). La fiecare lamelă de colector se leagă electric, capătul de sfîrșit al unei bobine și cel de început al bobinei următoare;

c) înfășurarea indusului este o înfășurare uniform repartizată, închisă, executată de obicei în două straturi (două loturi de bobină în fiecare ancoșă) și legată electric la lamelele colectorului. În general se execută două tipuri de înfășurări pentru indus: înfășurarea buclată sau paralel (fig. 6-21) și ondulată sau serie (fig. 6-22). În cele două figuri am folosit notațiile: Z_k — numărul lamelelor de colector; Z_c — numărul de crestături (ancoșe) rotorice; $\bar{B}$ — inducția magnetică creată de polii de excitație statorici; $\bar{V}$, $\bar{V}_k$ — viteza conductorului (a ancoșei), respectiv a lamelor de colector; P_1, P_2, P_3, P_4 — periile ce calcă pe lamelele de colector; $2a$ — numărul căilor de curent (a — perechi), înțelegînd prin *cale de curent* porțiunea de înfășurare a indusului cuprinsă între două perii colectoare consecutive, dar de semn contrar, străbătute de curent în același sens; I_a — intensitatea curentului dintr-o cale de curent; Y_1 — pasul la spate sau pasul de întoarcere, el reprezentînd numărul de crestături dintre latura de dus și cea de întors ale unei bobine (numărătoarea se face în sensul orar); Y_2 — pasul în față sau pasul la ducere, adică numărul de crestături dintre latura de întors și cea de dus; Y — pasul rezultant, reprezentînd numărul de crestături dintre laturile de dus a două bobine consecutive și fiind egal cu suma algebrică $Y = Y_1 + Y_2$; Y_k — pasul

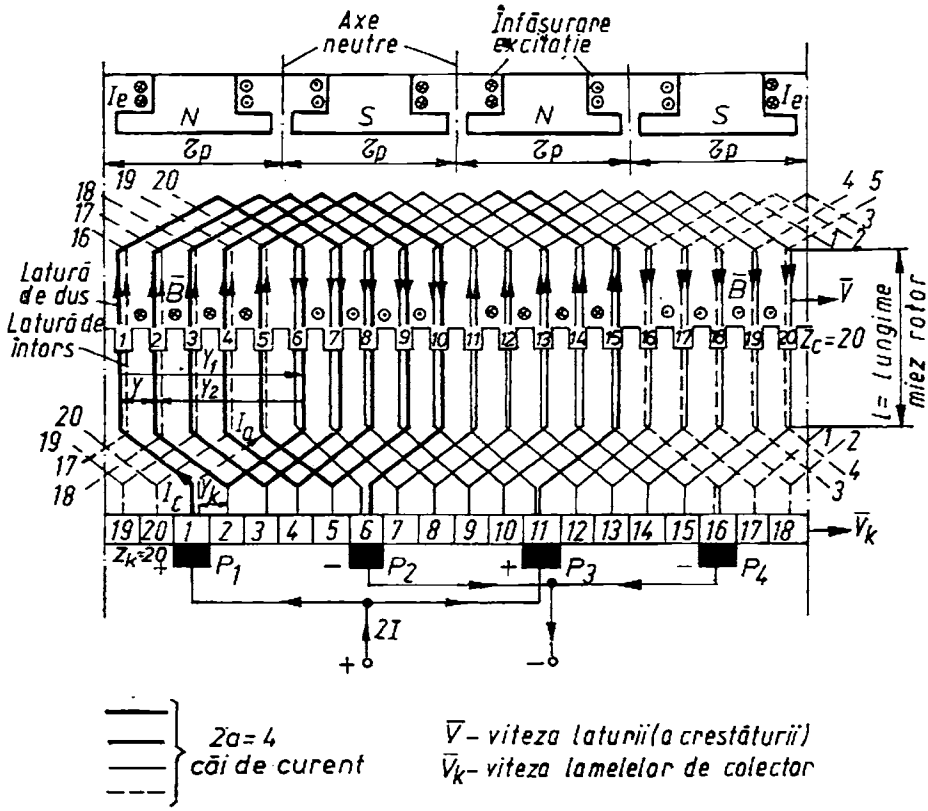


Fig. 6-21

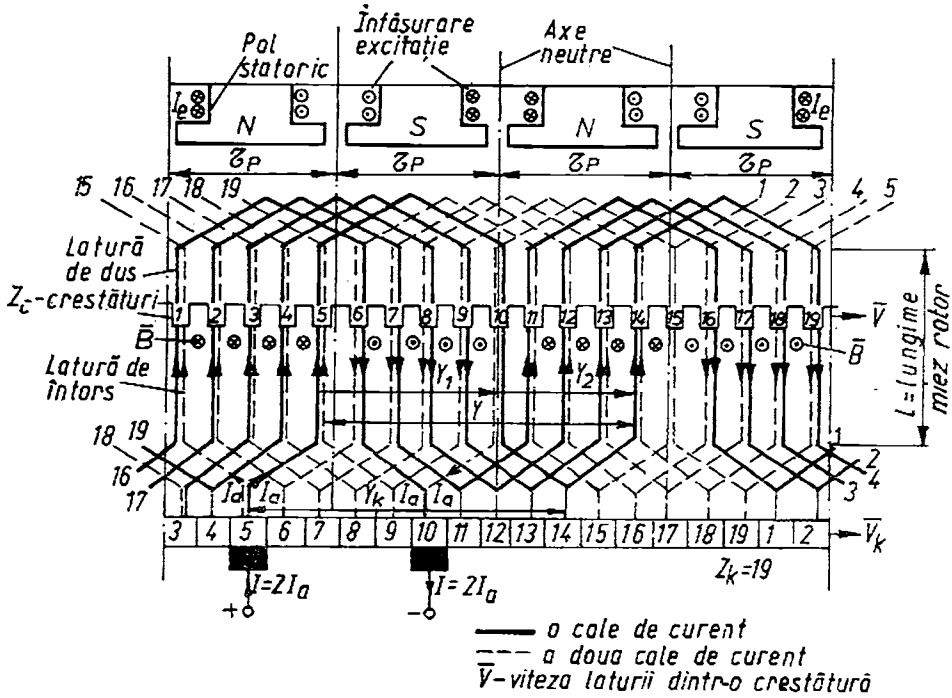


Fig. 6-22

la colector, adică numărul de lamele de colector cuprins între lamelele la care sînt legate laturile de dus și de întors ale aceleiași bobine și τ_p — pasul polar.

După raportul dintre Y_1 și τ_p se disting bobinaje cu pas: diametral ($Y_1 = \tau_p$), scurtat ($Y_1 < \tau_p$) și alungit ($Y_1 > \tau_p$).

Înfășurarea buclată reprezentată în figura 6-21 are: $Z_c = Z_k = 20$, $p = 2$, $\tau_p = 5$ ancoșe, $Y_1 = \tau_p = 5$, $Y_2 = -4$ respectiv $Y = Y_1 + Y_2 = 5 - 4 = 1$. De remarcat că la acest tip de bobinaj $2p = 2a$ (adică $p = a$), bobinajul folosindu-se în cazul curenților intenși.

Înfășurarea ondulată reprezentată în figura 6-22 are: $Z_c = Z_k = 19$, $Y_1 = 5$, $Y_2 = 4$, $Y = Y_1 + Y_2 = 9$ și $p = 2$. La acest tip de bobinaj întotdeauna $2a = 2$, adică $a = 1$, indiferent de numărul perechilor (p) de poli statorici. La mașinile de curent continuu la care curenții sînt mici se folosește înfășurarea ondulată.

6.2.2. Cîmpul magnetic al polilor de excitație statorici

Pentru simplicitate se consideră o mașină de curent continuu cu o singură pereche de poli ($p = 1$), iar suprafața rotorului netedă (se neglijează crestăturile și dinții dintre ele), adică întrefierul $\delta = constant$ de-a lungul tălpii (piesei) polare.

Inducția magnetică B_δ de-a lungul întrefierului unei mașini cu doi poli (bipolară) se poate reprezenta ca în figura 6-23. De remarcat că spre muchiile tălpilor polare inducția magnetică B_δ scade foarte mult din cauza creșterii întrefierului, ajungînd la zero în axa neutră.

Solenația de excitație statorică I_eN_e (N_e fiind numărul de spire al înfășurării de excitație de pe un pol, parcurse de curentul de excitație I_e) de pe un pol, creează fluxul magnetic Φ_0 (flux util) care străbate întrefierul δ și se închide prin circuitul magnetic al mașinii (circuit format din întrefier, miezul indusului, miezul polului și jugul statoric).

Notînd cu D și l diametrul respectiv lungimea miezului rotoric, atunci pasul polar se poate scrie:

$$\tau_p = \frac{\pi D}{2p}, \tag{6-44}$$

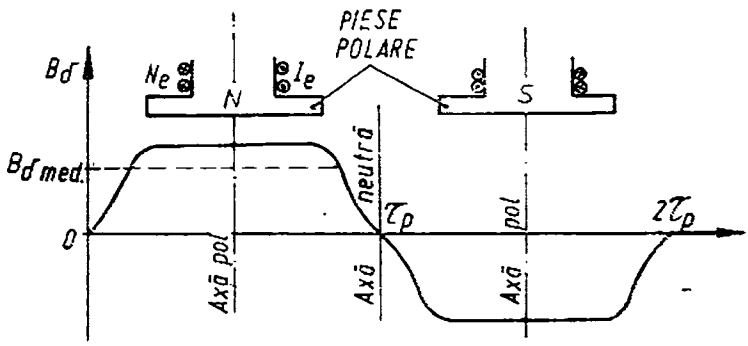


Fig. 6-23

rezultînd pentru inducția magnetică medie $B_{\delta med}$, de-a lungul unui pas polar, valoarea:

$$B_{\delta med} = \frac{\Phi_0}{\tau_p l} = \frac{2p}{\pi\, Dl}\,\Phi_0. \tag{6-45}$$

Convențional se consideră cîmp magnetic pozitiv (fig. 6-23), cîmpul din porțiunea de întrefier de sub polul nord și negativ cel de sub polul sud.

6.2.3. Principiul de funcționare ca generator

La funcționarea mașinii electrice de curent continuu ca generator, rotorul acesteia este antrenat cu turația n de o mașină primară, iar înfășurarea de excitație de pe polii statorici alimentată cu un curent continuu de intensitate I_e. Solenația de excitație $I_e N_e$ creează un cîmp magnetic în întrefier, de inducție B_δ și un flux magnetic util Φ_0. În acest cîmp magnetic se deplasează cu viteza $v = \frac{\pi\, Dn}{60}$, conductoarele rotorice, de lungime l (egală cu lungimea miezului rotoric). Pe baza fenomenului inducției electromagnetice, într-un conductor rotoric se induce o tensiune electromotoare a cărei valoare instantanee este dată de legea inducției electromagnetice (4-4) scrisă pentru cazul corpurilor în mișcare, adică:

$$u_{cc} = \int_0^l (\bar{V} \times \bar{B}_\delta) \cdot \mathrm{d}\bar{l}.$$

Principiul de funcționare ca generator și rolul colectorului se poate explica cu ajutorul figurii 6-24, în care s-a considerat o singură spiră ($Y_1 = \tau_p$) cu cele două laturi *1* și *2* de lungime l, care se rotește cu turația constantă n în întrefierul mașinii cu $2p = 2$ poli. Capetele a_1 și a_2 ale spirei sînt legate la două segmente inelare b_1 și b_2 (lamele de colector), ce se rotesc odată cu spira. Pe lamele calcă două perii colectoare P_1 și P_2, fixe față de poli (stator). Viteza $\bar{V}$, a laturii de spiră, este tangentă la periferia rotorului, iar $\bar{B}_\delta$

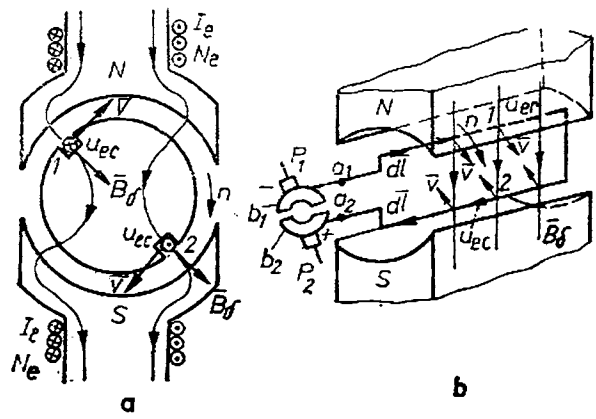


Fig. 6-24

radial; ca urmare $\bar{V} \perp \bar{B}_\delta$ (fig. 6-24, *a*). În aceste condiții tensiunea electromotoare indusă într-o latură (conductor) de spiră se scrie:

$$u_{ec} = \int_0^l (\bar{V} \times \bar{B}_\delta) \cdot d\bar{l} = \int_0^l VB_\delta \, dl = VB_\delta \int_0^l dl = VB_\delta \, l. \qquad (6\text{-}46)$$

Sensul lui u_{ec} în cele două laturi (conductoare) ale spirei este dat de produsul vectorial $(\bar{V} \times \bar{B}_\delta)$ sens reprezentat în figura 6-24, *b*. De remarcat că u_{ec} din laturile *1* și *2* sînt de sensuri opuse, cele două laturi găsindu-se sub acțiunea polilor de polaritate opusă (nord, respectiv sud). Între capetele spirei a_1 și a_2 se obține o tensiune electromotoare u_{e12} egală cu dublul lui u_{ec}, căci laturile spirei sînt în serie adițional, adică parcurgînd spira, tensiunile electromotoare din cele două laturi se însumează. Sensul lui u_{e12} se schimbă după o jumătate de rotație a spirei, cînd latura *2* ajunge sub polul nord și *1* sub cel sud, deci u_{e12} este o tensiune variabilă în timp. Forma de variație în timp a lui u_{e12} este determinată de forma de variație a lui B_δ de-a lungul întrefierului (fig. 6-23), dacă $V = const.$ Considerînd această variație a lui B_δ ca fiind aproximativ sinusoidală, atunci și u_{e12} va fi sinusoidală (fig. 6-25, *a*), peria P_2 este tot timpul pozitivă, iar P_1 negativă.

Colectorul, prin periile colectoare, colectează mereu tensiunea electromotoare din conductoare ce ocupă aceeași poziție față de poli; el are un rol de redresor mecanic. Periile trec de pe o lamelă pe alta în momentul cînd u_{es} trece prin zero, adică atunci cînd planul spirei devine perpendicular pe axa polilor (deci $\bar{V} \parallel \bar{B}_\delta$).

Figura 6-25, *b* prezintă tensiunea u_{ep} la perii în cazul a două spire așezate la 90° una față de cealaltă, colectorul avînd 4 lamele. Tensiunea u_{ep} reprezintă înfășurătoarea celor două curbe u_{es1} și u_{es2}, ca funcții de timp, acestea fiind tensiunile electromotoare induse în cele două spire.

În generatorul real există N spire, deci $2N$ conductoare, ceea ce înseamnă $\frac{N}{2a}$ spire pe o cale de curent, respectiv Z_k lamele de colector. Prin majorarea lui N și Z_k se poate realiza ca pulsațiile lui u_{ep} să fie neglijabile, practic să se obțină o tensiune continuă.

Tensiunea electromotoare indusă într-o spiră, ca valoare instantanee, se poate scrie:

$$u_{es} = \int_0^{2l} (\bar{V} \times \bar{B}_\delta) \cdot d\bar{l} = VB_\delta \, 2l, \qquad (6\text{-}47)$$

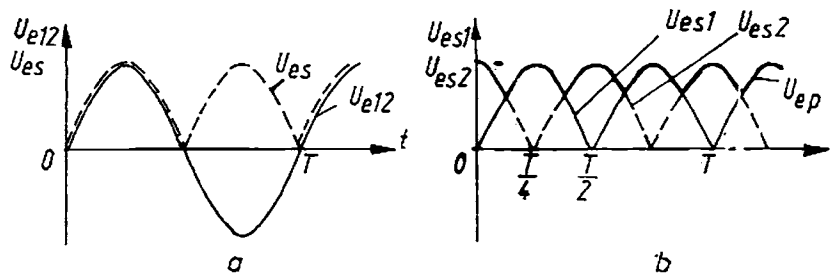


Fig. 6-25

iar cea dintr-o cale de curent,

$$u_{e0} = \frac{N}{2s} u_{es} = \frac{N}{a} V B_\delta l. \tag{6-48}$$

Înlocuind în (6-48) pe $V = \frac{\pi Dn}{60}$ și $B = B_{\delta med} = \frac{2p}{\pi Dl} \Phi_0$, se obține expresia tensiunii electromotoare continue dintr-o cale de curent, care este tensiunea electromotoare a generatorului, sub forma:

$$U_{e0} = \frac{N}{a} \cdot \frac{\pi Dn}{60} \cdot \frac{2p}{Dl} l = \frac{pN}{30\, a} \Phi_0 n = K_e \Phi_0 n. \tag{6-49}$$

Factorul de proporționalitate K_e, numit constanta electrică a mașinii, depinde de parametrii constructivi (p, N și a), fiind o mărime constantă la un generator dat.

Cu tensiunea electromotoare U_{e0} (la funcționarea în gol a generatorului) se poate alimenta un receptor (consumator) de curent continuu.

6.2.4. Principiul de funcționare ca motor

La funcționarea mașinii de curent continuu ca motor atît înfășurarea de excitație a polilor statorici cît și înfășurarea rotorică sînt alimentate cu tensiuni continue fiind parcurse de curenții I_e respectiv I_a. Solenația de excitație $I_e N_e$ creează pe B_δ respectiv Φ_0 (ca la generator). În acest cîmp se află conductoarele rotorice parcurse de curentul I_a, asupra lor acționînd forțe de tip Laplace:

$$d\bar{F} = I_a (d\bar{l} \times \bar{B}_\delta), \tag{6-50}$$

$d\bar{l}$ fiind elementul de conductor orientat (v. 4.1.4).

Pentru simplitate, considerăm (ca la generator) cazul unui stator cu $2p = 2$ iar pe rotor o singură spiră cu $Y_1 = \tau_k$ așa ca în figura 6-26.

Ținînd seama că $d\bar{l} \perp \bar{B}_\delta$ și $B_\delta = B_{\delta med} = const.$, valoarea numerică a forței F_c, care se exercită asupra conductorului rotoric, se poate scrie:

$$F_c = \int_0^l dF = \int_0^l I_a \, dl \, B_{\delta med} \sin \frac{\pi}{2} = I_a \frac{2p}{\pi Dl} \Phi_0 l =$$

$$= \frac{2p}{\pi D} \Phi_0 I_a. \tag{6-51}$$

Sensul forțelor $\bar{F}_c$ care acționează asupra celor două conductoare rotorice *1* și *2*, ce constituie laturile spirei, este determinat de produsul vectorial $d\bar{l} \times \bar{B}_\delta$, el fiind reprezentat în figura 6-26, iar distanța dintre direcțiile lor este chiar D (diametrul rotorului).

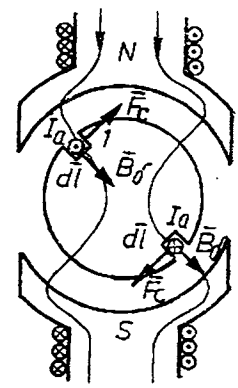


Fig. 6-26

Pentru cuplul M_s, ce se exercită asupra spirei, se poate scrie:

$$M_s = F_c\, D = \frac{2p}{\pi}\, \Phi_0\, I_a = \frac{p}{\pi\, a}\, \Phi_0 I, \qquad (6\text{-}52)$$

dacă I este curentul absorbit de cele $2a$ căi de curent în paralel $\left(I_a = \frac{I}{2a}\right)$.

Asupra celor N spire rotorice se va exercita un cuplu activ (cuplu motor $M = NM_s$, adică:

$$M = \frac{pN}{a\pi}\, \Phi_0\, I = K_M\, \Phi_0 I, \qquad (6\text{-}53)$$

unde K_M este denumită constanta mecanică a mașinii electrice.

Acest cuplu imprimă rotorului o mișcare de rotație, el putînd antrena (prin intermediul arborelui său) o altă mașină.

Din (6-53) rezultă că pentru schimbarea sensului lui M (deci a sensului de rotire a motorului) este suficient să se inverseze sensul unuia dintre curenții I sau I_e (respectiv Φ_0). Schimbînd sensurile ambilor curenți, nu se schimbă sensul de rotire.

De remarcat că la funcționarea ca motor, conductoarele rotorice se rotesc în cîmpul magnetic de excitație (Φ_0), în ele inducîndu-se tensiuni electromotoare ca și în cazul generatorului. În motor tensiunea electromotoare indusă U_i se opune tensiunii de alimentare a indusului și curentului I, fapt ușor de demonstrat.

Dacă un generator de curent continuu alimentează un consumator în rotor va exista I_a (respectiv I) rezultînd un cuplu (6-53) care însă este un cuplu rezistent, ce frînează rotirea indusului (rotorului), deci a mașinii primare.

6.2.5. Reacția indusului la mașina de curent continuu

La funcționarea în gol a generatorului de curent continuu (curentul în rotor e zero) în întrefier există numai fluxul Φ_0 determinat de solenația de excitație $N_e I_e$. Cînd generatorul funcționează în sarcină (alimentează un consumator), înfășurarea rotorică este parcursă de curentul I_a (pe fiecare cale de curent) și ca urmare vor exista și solenația rotorică ce creează un cîmp magnetic, respectiv un flux Φ_r. Acest flux Φ_r, în întreficrul mașinii se suprapune peste Φ_0, determinînd un flux magnetic rezultant Φ. Această influență a lui Φ_r asupra lui Φ_0, în întrefierul mașinii, constituie reacția indusului la generatorul de curent continuu și poate fi urmărită în figura 6-27. Spectrul liniilor de cîmp ce determină pe Φ_0, cînd $\Phi_r = 0$ (adică $I_a = 0$), este cel din figura 6-27, *a*, iar cel corespunzător numai lui Φ_r (adică $I_e = 0$) în figura 6-27, *b*. Spectrul cîmpului magnetic rezultant este cel din figura 6-27, *c*.

Curbele de variație a celor trei cîmpuri magnetice: longitudinal B_0 corespunzător lui Φ_0, transversal B_r corespunzător lui Φ_r și rezultant B ce corespunde lui Φ, sînt prezentate în figura 6-28, pentru cazul cînd B_r variază liniar sub talpa polară (circuit magnetic nesaturat). În aceste condiții Φ_r, de sub un pol este zero și deci $\Phi_0 = \Phi$. Cum în realitate se lucrează pe cotul curbei de magnetizare a materialului feromagnetic din care este confecționat

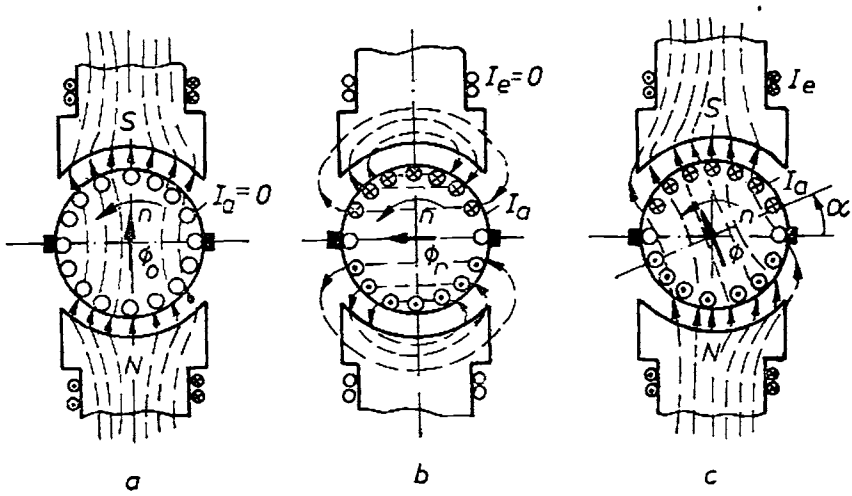


Fig. 6-27

circuitul magnetic al mașinii, rezultă o variație neliniară a lui B_r sub talpa polară și deci $\Phi \neq \Phi_0$. Se poate demonstra că $\Phi < \Phi_0$, ceea ce înseamnă că la aceeași turație n a mașinii primare ce antrenează generatorul, se micșorează tensiunea electromotoare indusă — v. (6-49).

Pentru compensarea efectelor reacției de indus la generatorul de curent continuu, se pot folosi diverse metode, ca: deplasarea periilor colectoare din axa neutră geometrică, montarea unei înfășurări de compensație în crestături executate în tălpile polare (spre întrefier) etc.

La funcționarea mașinii ca motor, solenația rotorică determină un flux Φ_r al reacției de indus, de sens opus față de cazul generatorului (sensul lui Φ_0 și n fiind același la motor ca la generator).

Întrucît în ambele cazuri, generator și motor, fluxul magnetic în mașină este un flux rezultant Φ, care determină tensiunea electromotoare U_e și cuplul electromagnetic M, relațiile (6-49) și (6-53) se vor scrie: $U_e = K_e \Phi I$ și $M = K_M \Phi I$.

6.2.6. Comutația la mașina de curent continuu

După cum am arătat mai înainte, curentul I_n din înfășurarea rotorică (din calea de curent) are un sens în conductoarele ce se află sub polul nord și sens opus în cele de sub polul sud, atît la funcționarea ca generator cît și ca motor. Ca urmare, în timpul rotirii rotorului mașinii de curent continuu, cînd conductoarele rotorice trec de sub un pol sub celălalt de semn contrar (adică trec dintr-o cale de curent în cealaltă), curentul I_a schimbă de semn (își schimbă sensul). O cale de curent cuprinde spire legate în serie, ale căror laturi de dus se află tot sub un pol iar cele de întors sub celălalt pol (de semn contrar).

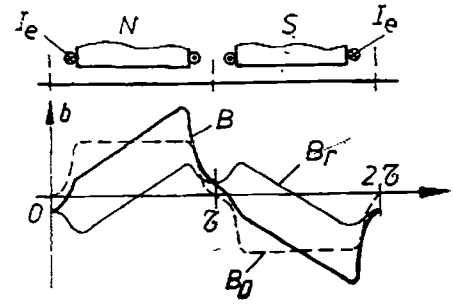


Fig. 6-28

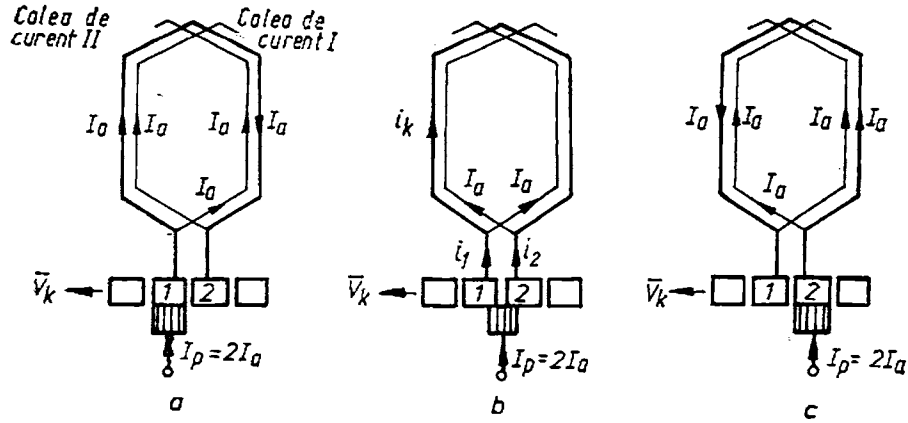


Fig. 6-29

Prin comutație se înțelege ansamblul fenomenelor ce însoțesc inversarea sensului curentului dintr-o bobină rotorică, atunci cînd aceasta trece de pe o cale de curent pe altă cale de curent, în timpul rotirii rotorului.

Pentru simplicitate, se consideră bobina formată dintr-o singură spiră cu latura de dus legată la lamela *1* și cea de întors la lamela *2* (fig. 6-29). Lățimea periei este considerată egală cu a lamelei de colector. În figura 6-29 este prezentată spira la momente specifice, caracterizate prin poziția relativă a periei (perie fixă în raport cu statorul) față de lamelele colectorului. Lamelele se deplasează cu viteza $\bar{V}_k$ față de perie, în timpul rotirii rotorului.

Cînd peria calcă numai pe lamela *1* (momentul din figura 6-29, *a*) spira studiată face parte din calea de curent *I*. În momentul următor (fig. 6-29, *b*) peria colectoare calcă simultan pe ambele lamele *1* și *2*, scurtcircuitînd spira. După un interval de timp T_k, socotit din momentul cînd peria atinge lamela *2*, peria colectoare va călca pe lamela *2* (fig. 6-29, *c*). În această situație spira studiată a trecut pe cealaltă cale de curent (calea II), curentul I_a prin spiră a schimbat de sens, adică a variat de la $(+I_a)$ la $(-I_a)$.

În spira ce comută, fluxul magnetic rezultant Φ induce o tensiune electromotoare U_{ec}, iar fluxul propriu variabil în timp și determinat de variația curentului prin spiră de la $(+I_a)$ la $(-I_a)$ va induce și el o tensiune electromotoare U_{ea} (autoinducție). Funcție de aceste tensiuni electromotoare induse în spira ce comută, de turația mașinii, de rezistențele din circuitul acestei spire, comutația poate fi:

— liniară (curba *1* din figura 6-30), la turații mici, $U_{ea} + U_{ec} = 0$, iar rezistențele spirei și a legăturilor dintre lamelă și spiră sînt neglijabile față de rezistențele de trecere perie-lamele;

— de rezistență (curba *2* din figura 6-20), la turații mici, $U_{ea} + U_{ec} = 0$, dar nu se mai pot face neglijările de rezistențe anterioare;

— întîrziată (curba *3*, figura 6-30), cînd $U_{ec} = 0$, iar $U_{ea} \neq 0$, ea opunîndu-se variației lui I_k;

— accelerată (curba 4, figura 6-30), cînd U_{ec} și U_{ea} sînt diferite, de sensuri opuse, dar ca valoare absolută $U_{ec} > U_{ea}$.

Procesul de comutație este însoțit de scîntei la colector, care se pot amplifica datorită și unor cauze mecanice: excentricități, vibrații, ovalitatea

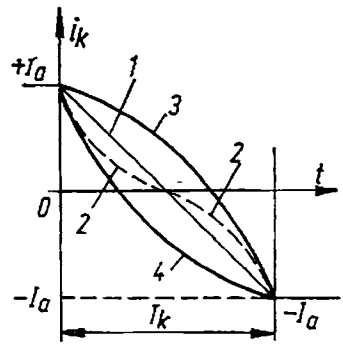


Fig. 6-30

colectorului, ieșirea unor lamele mai în afară, fixarea slabă a port-periei, presiune neuniformă a periei pe colector etc.

Pentru îmbunătățirea procesului de comutație se folosesc diferite metode, prin toate urmărindu-se realizarea unei comutații cît mai apropiate de cea liniară. Dintre aceste metode menționăm: mărirea rezistenței din circuitul spirei ce comută; deplasarea periilor din axa neutră, asigurîndu-se ca U_{ec} și U_{ea} să fie egale și de sens contrar; poli auxiliari de comutație, al căror cîmp magnetic induce în spira ce comută o tensiune electromotoare suplimentară în așa fel ca cea rezultantă să fie zero.

6.2.7. Clasificarea generatoarelor de curent continuu după tipul excitației

În schemele electrice, generatorul de curent continuu se reprezintă simbolic ca în figura 6-31 în care am folosit notațiile: $U_e = K_e \Phi n$ — tensiunea electromotoare indusă în înfășurarea rotorică (adică într-o cale de curent) de către fluxul magnetic rezultant Φ, cînd rotorul este rotit cu turația n; R_i — rezistența interioară rotorică; R_e — rezistența înfășurării de excitație de pe polii statorici; I_i — curentul din rotor, care reprezintă suma curenților din cele $2a$ căi de curent, aflate în paralel; I_e — curentul din înfășurarea de excitație a polilor statorici; U_b — tensiunea la bornele generatorului, mai mică decît U_e cu căderea de tensiune interioară $\Delta U = I_i R_i$, deci $U_b = U_e - I_i R_i$.

Relațiile:

$$U_e = K_e \Phi n, \; U_b = U_e - I_i R_i \text{ și}$$

$$M = K_M \Phi I \text{ (cuplu rezistent)}, \qquad (6\text{-}54)$$

reprezintă *ecuațiile generatorului de curent continuu.*

După modul cum se alimentează înfășurarea de excitație (după proveniența lui I_e), generatoarele de curent continuu se clasifică în generatoare cu excitație separată (independentă) și generatoare cu autoexcitație.

La generatorul cu excitație separată (fig. 6-32, *a*) curentul I_e este obținut de la o sursă

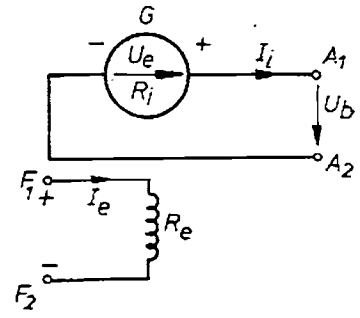


Fig. 6-31

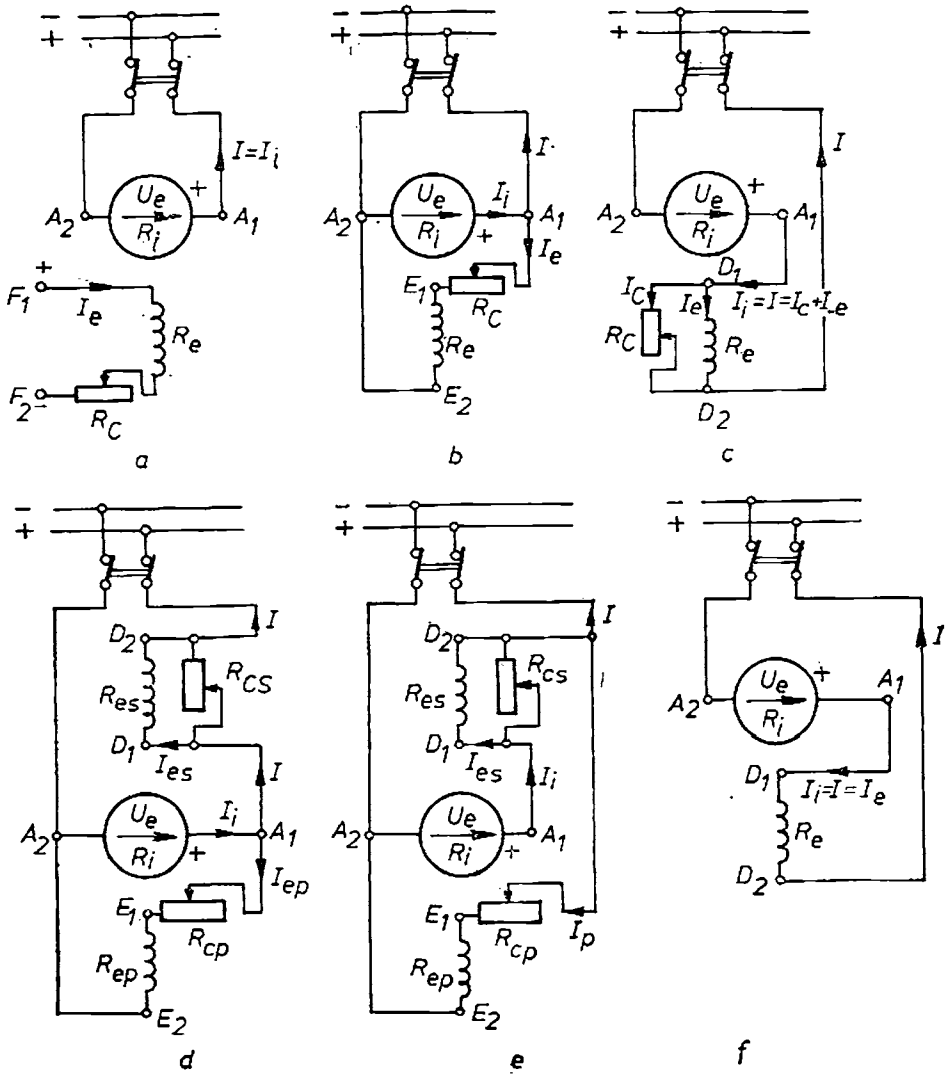


Fig. 6-32

separată (independentă) de generator, iar curentul I debitat de generator este același cu cel din rotor ($I = I_i$). Reglarea lui I_e se face prin reostatul de excitație (de cîmp) R_c.

Generatoarele cu autoexcitație (cu excitație proprie) își produc singure curentul de excitație. După felul cum sînt legate între ele, înfășurarea de excitație și cea a indusului, generatorul cu autoexcitație poate fi:

— cu excitație derivație (fig. 6-32, *b*), curentul I_e fiind cîteva procente din I_i (circa 1—5%);

— cu excitație serie (fig. 6-32, *f*), cînd $I_e = I_i = I$. Pentru reglarea lui I_e se poate folosi reostatul de cîmp R_c conectat în paralel cu excitația (fig. 6-32 *c*) cînd $I_i = I = I_e + I_c$;

— cu excitație mixtă (compound), adică cu două înfășurări de excitație, una derivație, iar cealaltă serie. După modul cum sînt legate între ele aceste două înfășurări și cea rotorică, se obține excitația mixtă cu derivație scurtă (fig. 6-32, *d*) sau cu derivația lungă (fig. 6-32, *e*). Dacă cele două excitații determină cîmpuri magnetice de același sens în întrefier, generatorul este cu flux adițional, în caz contrar — cu flux diferențial.

Funcția (relația) care descrie dependența dintre două din mărimile: U_e, U_b, I_i, I_e și n, celelalte rămînînd constante, este definită drept *caracteristică* a generatorului. Cele mai importante caracteristici pentru funcționarea unui generator sînt:

— caracteristica de funcționare în gol, $U_{e0} = f(I_e)$ la $n = constant$ și $I_i = 0$;

— caracteristica externă, $U_b = f(I)$ la $n = const.$ și $I_e = const.$ (excitație separată) respectiv $R_e = const.$ (excitație derivație);

— caracteristica de reglaj, $I_e = f(I)$ la $n = const.$ și $U_b = const.$

6.2.8. Caracteristicile generatorului cu excitație separată

Caracteristica de funcționare în gol $U_{e0} = f(I_e)$ la $n = const.$ și $I_i = 0$ este reprezentată în figura 6-33. Dînd lui I_e valori crescătoare (de la zero la I_{emax}), menținînd $n = const.$, $I_i = 0$ și măsurînd pe U_{e0} se obține curba *1* din figura 6-33, care are o porțiune liniară, la început, iar apoi — datorită saturației magnetice — creșterea lui U_{e0} nu mai e liniară. Datorită fenomenului de histerezis, la descreșterea lui I_e (de la I_{emax} la zero), rezultă o altă curbă (ramura descrescătoare *2*). În practică se consideră drept caracteristică de funcționare în gol, curba medie pe ordonată (curba *3*). De remarcat că la $I_e = 0$, fluxul nu este nul ci egal cu cel ce corespunde remanenței magnetice a polilor de excitație și care induce tensiunea electromotoare remanentă U_{e0r} (cca —8% din U_{bn}).

Figura 6-34 reprezintă caracteristica externă $U_b = f(I)$ la $n = const.$ și $I_e = const.$, care este neliniară și „căzătoare" din cauza căderii de tensiune interioare pe rotor (IR_i) și a acțiunii de demagnetizare a reacției de indus. Prin ΔU s-a notat variația tensiunii la borne datorită acestor două cauze.

Caracteristica de reglaj $I_e = f(I)$ la $n = const.$ și $U_b = const.$ arată cum trebuie modificat I_e, pentru ca atunci cînd I variază, la o turație n dată, U_b să fie menținută constantă la o anumită valoare. În figura 6-35 sînt prezentate două caracteristici de reglaj, pentru $U_b = U_{bn}$ și $U_b = 0{,}5\ U_{bn}$. La prima sînt prezentate ambele ramuri (crescătoare și descrescătoare) determinate de histerezis.

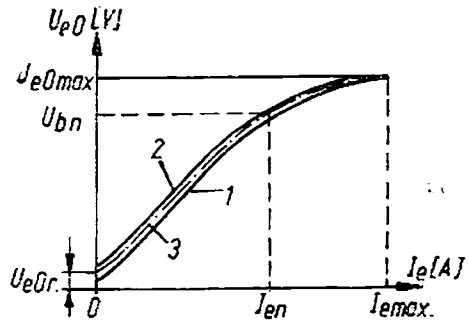


Fig. 6-33

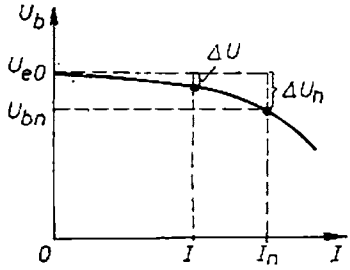


Fig. 6-34

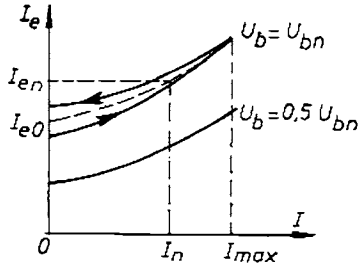


Fig. 6-35

6.2.9. Caracteristicile generatorului cu excitație derivație

La un asemenea generator nu se poate vorbi de o caracteristică de funcționare în gol $U_{e0} = f(I_e)$ la $n = const.$ și $I_i = 0$, deoarece $I_i = I_e$ și cînd $I = 0$ (funcționare în gol).

Se poate defini o caracteristică de funcționare în gol, ca dependența dintre tensiunea la borne U_{b0} (cînd $I = 0$), funcție de I_e, la turație nominală $n = n_n$ (constantă). Pe baza schemei unui astfel de generator (v. fig. 6-32 *b*) se poate scrie:

$$U_{b0} = f(I_e) = U_{e0} - I_e R_i \simeq U_{e0}, \tag{6-55}$$

căci I_e și R_i sînt foarte mici, rezultînd o cădere de tensiune $I_e R_i$ neglijabilă față de U_{e0}. Caracteristica de mers în gol $U_{b0} \simeq U_{e0} = f(I_e)$ este reprezentată în figura 6-36, curba *1*.

Alături de această caracteristică, prezintă importanță așa-numita dreaptă caracteristică a excitației (dreapta *2* din figura 6-36), dată de ecuația circuitului de excitație:

$$U_{b0} = I_e(R_e + R_c + R_{Ae}), \tag{6-56}$$

unda R_{Ae} este o rezistență internă a ampermetrului din circuitul de excitație.

Punctul de funcționare P se află la intersecția lui *1* cu *2*. Se vede că există un unghi critic (α_{cr}), care dacă este depășit, dreapta caracteristică a excitației (curba *3*) nu mai intersectează pe *1*.

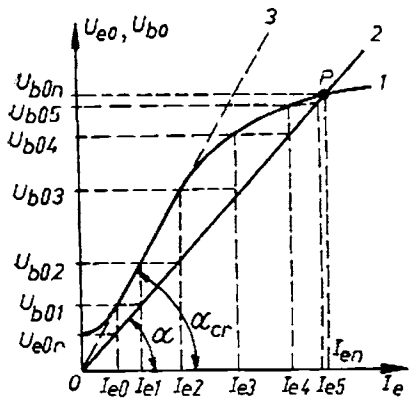


Fig. 6-36

O problemă deosebit de importantă la generatorul cu excitație derivație o constituie *autoexcitarea*. Rotind rotorul cu turația $n = n_n$, fluxul remanent Φ_{0r} induce tensiunea electromotoare remanentă $U_{0r} = K_e \Phi_{0r} n_n$, sensul căreia depinde de sensul lui n_n, la Φ_{0r} dat ca sens. Tensiunea U_{e0r} determină în circuitul de excitație un curent I_{e0} care creează un flux suplimentar Φ_s. Conectînd corespunzător înfășurarea de excitație față de bornele rotorului, așa fel ca Φ_s să „întărească" pe Φ_{0r} (să se suprapună aditiv), noul flux rezultant $\Phi_1 = \Phi_{0r} + \Phi_s$ determină la bornele rotorice tensiunea U_{b01} (fig. 6-36). Acestei tensiuni îi corespunde în circuitul de

excitație un curent I_{e1}, curent ce creează un nou flux suplimentar, un nou flux rezultant Φ_2, o nouă tensiune U_{b02} etc. ..., pînă se ajunge ca la bornele rotorice să existe tensiunea U_{b0n}, corespunzătoare punctului P. Acest proces poartă denumirea de autoexcitare *(amorsarea generatorului* sau *prinderea generatorului)*.

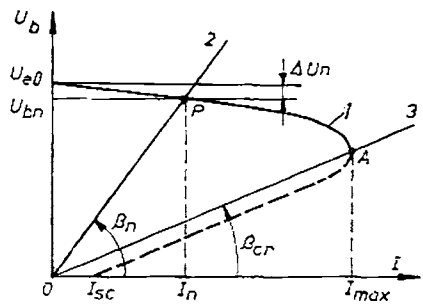


Fig. 6-37

Autoexcitarea nu are loc dacă Φ_{0r} devine zero, ceea ce se poate întîmpla în două cazuri:

— legături greșite între excitație și rotor care duc la un Φ_s de sens opus lui Φ_{0r}, anulîndu-l pe acesta;

— rotirea rotorului în sens invers celui indicat, cînd U_{e0r} devine de sens contrar celui normal, determinînd un I_{e0} care creează un Φ_s de sens opus lui, Φ_{0r}, anulîndu-l pe acesta.

Caracteristica externă $U_b = f(I)$ este definită pentru $n = const.$ și $R_c = const.$ căci I_e scade cu creșterea lui I din cauză că scade U_b (deci $I_e \neq const.$). Alura acestei caracteristici (curba *1* din figura 6-37) este mult mai căzătoare decît la generatorul cu excitație separată, deoarece cu creșterea lui I pe lîngă creșterea căderii de tensiune interioare și a reacției de indus, scade și $U_{e0} = K_e \Phi_{0n}$ (căci scăzînd U_b, scade I_e și scade Φ_0).

Se constată că pe măsură ce se micșorează R_s, curentul de sarcină I crește pînă la o valoare maximă I_{max} ($I_{max} = 2 - 2{,}5\ I_n$), după care scade la I_{sc}, valoare corespunzătoare lui $R_s = 0$. Tensiunea la borne U_b a scăzut într-atît încît nu mai este suficientă să întrețină un I_e corespunzător; atunci generatorul se dezexcită, curentul I scăzînd de la I_{max} la I_{sc}($I_{sc} \simeq 0{,}3\ I_n$). Curentul I_{sc} este menținut în circuit numai de U_{e0r}, tensiunea la borne U_b fiind zero căci $R_s = 0$.

Tensiunea la bornele generatorului U_b este și tensiunea la bornele consumatorului, deci $U_b = IR_s$. Dreapta *2* din figura 6-37 are ecuația $U_{bn} = R_{sn} I_n$ și face cu abscisa unghiul β_n, iar dreapta *3* are ecuația $U_{bA} = R_{scr} I_{max}$ și face unghiul β_{cr} (denumit unghi critic). S-a notat prin R_{sn} și R_{scr} valoarea rezistenței consumatorului corespunzătoare lui $I = I_n$ respectiv $I = I_{max}$. Se vede că pentru $R_s < R_{scr}$ generatorul se dezexcită.

Caracteristica de reglaj $I_e = f(I)$ la $n = const.$ și $U_b = const.$ nu se deosebește calitativ de cea de la generatorul cu excitație separată, numai că alura este mai crescătoare din cauza alurei mai căzătoare a caracteristicii externe.

6.2.10. Caracteristicile generatorului cu excitație serie

Înfășurarea de excitație fiind legată în serie cu rotorul (fig. 6-32, *f*) cei trei curenți sînt egali, adică $I_e = I_t = I$; ca urmare nu poate fi vorba de caracteristica în gol și cea de reglaj.

Caracteristica externă la acest tip de generator se definește ca $U_b = f(I)$ pentru $n = n_n$ și $I_e = I$ variabil.

Generatorul de curent continuu cu excitație serie se folosește foarte rar în practică (uneori la sudarea electrică) fapt pentru care nu insistăm asupra lui.

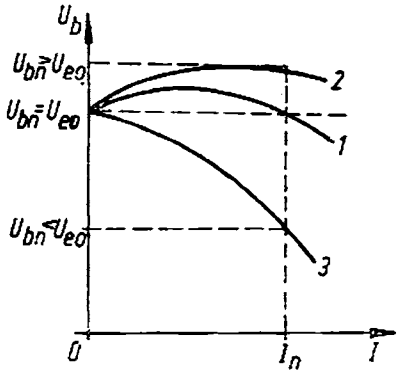


Fig. 6-38

6.2.11. Caracteristicile generatorului cu excitație mixtă

Se folosește, în general, generatorul cu excitație mixtă derivație scurtă a cărui schemă electrică a fost prezentată în figura 6-32, *d*. Excitația paralel este de obicei cea principală, iar excitația serie este o înfășurare mai mult de corecție, ea compensînd variațiile lui U_b cu sarcina generatorului.

Dacă acest tip de generator funcționează în gol ($I = 0$), atunci excitația serie nu e parcursă de curent, generatorul devenind generator cu excitație paralel, avînd caracteristica de funcționare în gol cunoscută.

Caracteristica externă $U_b = f(I)$, la $n = const.$ (fig. 6-38), este deosebit de importantă. Ea însă nu poate fi definită pentru $I_e = const.$ (sînt două excitații) ci numai pentru $R_{cp} = const.$ (R_{cp} — reostat de cîmp în serie cu excitație paralel) și $R_{cs} = const.$ (R_{cs} — reostat de cîmp în paralel cu excitație serie). După valoarea și sensul fluxului magnetic produs de excitația serie, în raport cu cel produs de excitația paralel, generatorul cu excitație mixtă (denumită și compound), poate fi:

— compound normal, cînd înfășurarea de excitație serie lucrează adițional față de cea paralel, fiind astfel dimensionată încît și la sarcină nominală ($I = I_n$) să existe $U_{b\,n} = U_{e0}$ (curba *1*, figura 6-38);

— supracompoundat, cînd la $I = I_n$ se obține $U_{bn} > U_{e0}$, excitația serie lucrînd tot adițional (curba *2*, figura 6-38);

— anticompoundat sau subcompoundat, cînd excitația serie lucrează opozițional față de cea paralel, rezultînd $U_{bn} < U_{e0}$ (curba *3*, figura 6-38).

Datorită existenței celor două tipuri de excitație (paralel și serie), la generatorul cu excitație mixtă caracteristica de reglaj $I_e = f(I)$ nu are sens.

Generatoarele de curent continuu cu excitație mixtă sînt cel mai des folosite, mai ales în cazul consumatorilor de energie electrică care necesită o tensiune la borne cît mai constantă la variații bruște și repetate ale curentului de sarcină.

6.2.12. Ecuațiile și caracteristicile motorului de curent continuu

În schemele electrice motorul de curent continuu se reprezintă simbolic ca în figura 6-39. De remarcat că în cazul motorului, sensul lui I_i prin rotor este opus sensului lui U_e, putîndu-se scrie pe baza teoremei a doua a lui Kirchhoff:

$$U_b - I_i R_i = U_e \text{ sau } U_b = U_e + I_i R_i. \quad (6\text{-}57)$$

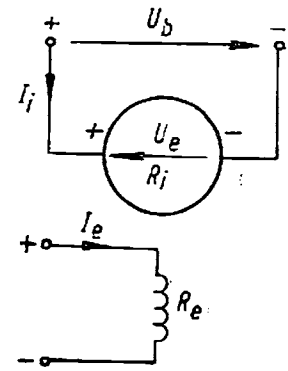


Fig. 6-39

Relațiile:

$$U_b = U_e + I_i R_i,\ U_e = K_e \Phi n \text{ și } M = K_M \Phi I_i, \tag{6-58}$$

constituie *ecuațiile motorului de curent continuu*, ele descriind fenomenele electromagnetice ce au loc în acesta.

După modul cum este conectată înfășurarea de excitație în raport cu cea rotorică, motoarele de curent continuu se clasifică (la fel ca generatoarele) în motoare cu excitație separată, derivație, serie și mixtă.

Există și motoare (dealtfel și generatoare), fără înfășurări de excitație (la puteri mici însă), cîmpul magnetic fiind creat de magneți permanenți montați corespunzător pe stator, în locul polilor de excitație.

Principalele mărimi care determină funcționarea motorului de curent continuu: U_b, I_i, M, n, I_e (respectiv fluxul Φ), η (randamentul), P_2 (puterea la arbore), sînt în general dependente unele de altele. Funcția care descrie dependența dintre două asemenea mărimi, celelalte rămînînd constante, este definită drept *caracteristică de funcționare a motorului*. Dintre caracteristicile de funcționare ale motorului de curent continuu se menționează:

— caracteristicile de funcționare propriu-zise, reprezentate prin funcțiile:

$$n = f(P_2),\ M = f(P_2) \text{ și } \eta = f(P_2); \tag{6-59}$$

— caracteristicile de turație, $n = f(I)$, parametrii fiind U_b, Φ și R (rezistență introdusă în serie cu rotorul). S-a notat cu I curentul total absorbit de către motor de la rețeaua de alimentare (în general $I = I_i$);

— caracteristicile mecanice $n = f(M)$, cu aceiași parametri U_b, Φ și R, caracteristici deosebit de importante în acționările electrice.

Caracteristicile $n = f(I)$ și $n = f(M)$ obținute pentru $U_b = U_{bn}$, $\Phi = \Phi_n$ și $R = 0$, se numesc *caracteristici naturale* (de turație, respectiv mecanică), iar cele determinate pentru alte valori ale parametrilor U_b, Φ și R sînt denumite *caracteristici artificiale*.

Pe lîngă aceste caracteristici, funcționarea motoarelor de curent continuu mai poate fi urmărită și prin caracteristicile de pornire, de modificare a turației și de frînare.

6.2.13. Caracteristicile de turație și mecanice ale motorului cu excitație derivație

Despre un motor cu excitație separată se poate vorbi numai dacă există două surse de curent continuu complet independente între ele, una pentru alimentarea rotorului, iar cealaltă a excitației, ceea ce nu e economic. Dealtfel, din punct de vedere funcțional, nu sînt diferențe esențiale între motorul cu excitație separată și cel cu excitație paralel. Din aceste motive îl vom studia numai pe cel cu excitație paralel.

În figura 6-40 este prezentată schema de montaj a motorului cu excitație paralel, folosită pentru determinarea experimentală a caracteristicilor de funcționare. Pe baza acestei scheme, ecuațiile motorului se scriu:

$$U_b = U_e + IR_A + I_i\ (R_i + R),\ U_e = K_e \Phi n \text{ și } M = K_M \Phi I_i. \tag{6-60}$$

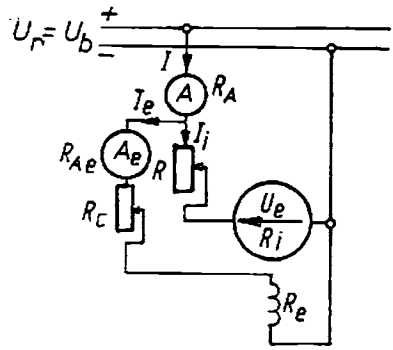


Fig. 6-40

Cum I_e este relativ mic, el se poate neglija față de I_i, putîndu-se scrie $I = I_e + I_i \simeq I_i$. Considerînd și rezistența R_A a ampermetrului înglobată în R_i, ecuațiile motorului (6-60) iau forma:

$$U_b = U_e + I(R + R_i), \quad U_e = K_e \Phi n$$

$$\text{și } M = K_M \Phi I, \qquad (6\text{-}61)$$

din ele rezultînd:

$$n = \frac{U_b}{K_e \Phi} - \frac{R_i + R}{K_e \Phi} I = n_0 - \Delta n, \quad \text{caracteristici de turație;} \qquad (6\text{-}62)$$

$$n = \frac{U_b}{K_e \Phi} - \frac{R_i + R}{K_e K_M \Phi^2} M = n_0 - \Delta n_M, \text{ caracteristici mecanice.}$$

Din (6-62) rezultă că ecuațiile caracteristicilor de turație și mecanice reprezintă drepte care taie axa ordonatelor într-un punct de ordonată $n_0 = \frac{U_b}{K_e \Phi}$ (adică turația la $I = 0$ respectiv $M = 0$) și care sînt înclinate față de axa absciselor, pentru un anumit I sau M, cu $\Delta n = \frac{R_i + R}{K_e \Phi} I$ respectiv $\Delta n_M = \frac{R_i + R}{K_e K_M \Phi^2} M$. Cu aceste ultime notații (6-62) se pot scrie:

$$n = n_0 - \Delta n \text{ sau } n = n_0 - \Delta n_M. \qquad (6\text{-}63)$$

Pe baza relațiilor (6-62) se poate construi caracteristica mecanică naturală $n = f(M)$ la $U_b = U_{bn}$, $\Phi = \Phi_n$ și $R = 0$ (fig. 6-41, *a*), precum și cele artificiale prin variația: tensiunii alimentare, U_b fiind parametru (fig. 6-41, *b*); a fluxului inductor, cînd Φ este parametru (fig. 6-41, *c*) și a rezistenței totale din circuitul rotoric, R fiind parametru (fig. 6-41, *d*).

În mod asemănător se determină caracteristica naturală de turație și cele artificiale reprezentate în figura 6-42.

Din (6-62) rezultă că Δn și Δn_M sînt relativ mici, aproximativ (2—4)% din turația nominală, deoarece R și R_i sînt și ele mici în raport cu numitorul $K_e \Phi$ respectiv $K_e K_M \Phi^2$. Ca urmare, turația motorului de curent continuu

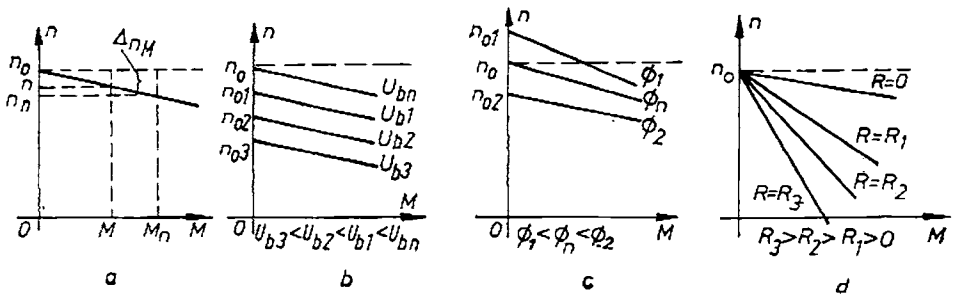


Fig. 6-41

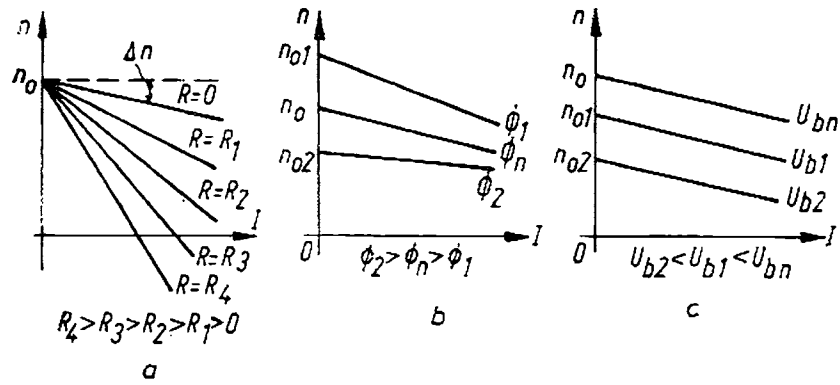


Fig. 6-42

cu excitație derivație scade foarte puțin la funcționarea în sarcină față de mersul în gol. Se zice că motorul de curent continuu cu excitație derivație are o caracteristică mecanică dură (rigidă sau tare). O asemenea caracteristică face ca acest tip de motoare să fie folosite în acționări electromecanice care necesită turații practic constante, indepedente de sarcină, cum ar fi: mașini-unelte, laminoare, pompe hidraulice, ventilatoare, compresoare etc.

6.2.14. Caracteristicile de turație și mecanice ale motorului cu excitație serie

Schema electrică folosită la determinarea caracteristicilor motorului cu excitație serie este prezentată în figura 6-43. În cele ce urmează se vor considera rezistențele R_A și R_{Ae} ale ampermetrelor, înglobate în R_i respectiv R_e. Prin rezistența de șuntare R_c a excitației serie, la $I = I_i$ dat, se poate asigura un I_e mai mic, deci o slăbire de cîmp.

Dacă se consideră K_c deschis (deci înfășurarea de excitație nu este șuntată de R_c) atunci $I = I_i = I_e$, ceea ce înseamnă că fluxul magnetic (care este funcție de I_e) depinde de sarcină, putîndu-se scrie $\Phi = K_f I$. Ecuațiile motorului cu excitație serie se scriu:

$$\begin{aligned} U_b &= U_e + (R + R_i + R_e)\, I, \\ U_e &= K_e \Phi n = K_e K_f I, \\ M &= K_M \Phi I = K_M K_f I^2, \end{aligned} \tag{6-64}$$

rezultînd pentru caracteristicile mecanice expresia:

$$n = \frac{U_b}{K\sqrt{M}} - \frac{R + R_i + R_e}{K_e K_f},$$

$$\text{unde } K = K_e \sqrt{\frac{K_f}{K_M}}. \tag{6-65}$$

Se vede că turația scade apreciabil cu creșterea lui M.

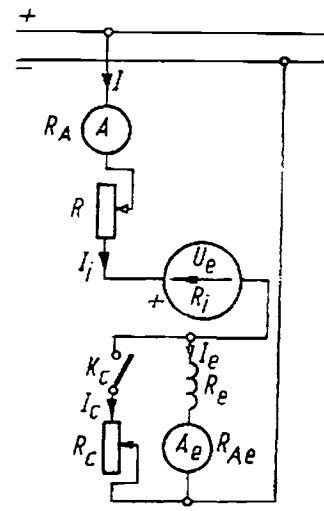


Fig. 6-43

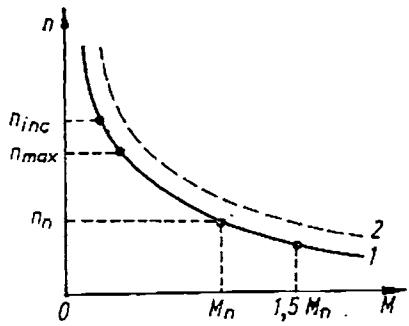


Fig. 6-44

Dacă în (6-65) se face $U_b = U_{bn}$ și $R = 0$ se obține expresia caracteristicii mecanice naturale, adică:

$$n = \frac{U_{bn}}{K\sqrt{M}} - \frac{R_i + R_e}{K_e K_i} = n_e - \frac{R_i + R_e}{K_e K_i}, \qquad (6\text{-}66)$$

reprezentată în figura 6-44, curba *1*. O asemenea caracteristică mecanică rapid căzătoare cu creșterea sarcinii (a cuplului rezistent) este denumită caracteristică moale (elastică sau suplă). Mărimea n_1 se numește turație limită (curba *2* din figura 6-44). Se observă că toate caracteristicile mecanice se află sub caracteristica turație limită.

De remarcat că la sarcini foarte mici ($M \to 0$) turația motorului cu excitație serie devine teoretic infinită, motorul se ambalează. Din acest motiv, fabrica constructoare garantează funcționarea motoarelor serie pînă la o turație maximă $n_{max} = 2\,n_n$, iar încercările se fac la $n_{inc} = 1{,}2\,n_{max}$ și $M = 1{,}5\,M_n$. De asemenea, se impune ca la pornire, cuplul rezistent la arbore să fie cel puțin (20—30%) din cel nominal.

Datorită caracteristicii moi a motorului cu excitație serie, acesta se folosește în tracțiunea electrică, la mașinile de ridicat și transportat, în instalații care necesită porniri frecvente, cu mase de inerție mari, cu sarcini variabile, cu șocuri și frînări rapide.

Caracteristica naturală de turație a motorului serie se obține din (6-66) înlocuind $M = K_M K_i I^2$; rezultă:

$$n = \frac{U_{bn}}{K\sqrt{K_M K_i I}} - \frac{R_i + R_e}{K_e K_i} \qquad (6\text{-}67)$$

și care are alura celei mecanice, fiind tot o hiperbolă.

Caracteristicile artificiale de turație și mecanice ale motorului cu excitație serie se obțin ca la cel cu excitație derivație prin modificarea: tensiunii de alimentare U_b, a rezistenței din circuitul rotoric sau a fluxului magnetic (care se poate face numai în sensul micșorării lui, cînd se închide K_c).

6.2.15. Caracteristicile motorului cu excitație mixtă

În figura 6-28, *d* este prezentată schema electrică a motorului cu excitație mixtă (compound). S-a considerat cazul excitației mixte cu derivație scurtă. Dacă se notează cu Φ_p fluxul magnetic creat de înfășurarea de excitație paralel (rezistența acesteia fiind R_{ep} și curentul prin ea I_{ep}) și cu Φ_s, cel produs de excitația serie (cu rezistența R_{es} și curentul I_{es}), atunci în cazul excitației mixte adițională, se obține un flux magnetic rezultant $\Phi = \Phi_p + \Phi_s$, iar la excitație mixtă diferențiată (cînd s-a inversat sensul lui I_{es}), un flux rezultant $\Phi = \Phi_p - \Phi_s$.

Neglijînd curentul I_{ep} față de I_i, se poate considera $I = I_i$. În aceste condiții, și notînd cu R rezistența reostatului de pornire, ecuațiile motorului cu excitație mixtă se scriu:

$$U_b = U_e + (R_i + R_{es} + R)\ I,$$
$$U = K_e \Phi\, n = K_e(\Phi_p + \Phi_s)\, n, \quad (6\text{-}68)$$
$$M = K_M \Phi I = K_M(\Phi_p \pm \Phi_s)\, n,$$

de unde rezultă ecuațiile caracteristicilor de turație $n = f(I)$ și a celor mecanice $n = f(M)$ sub forma:

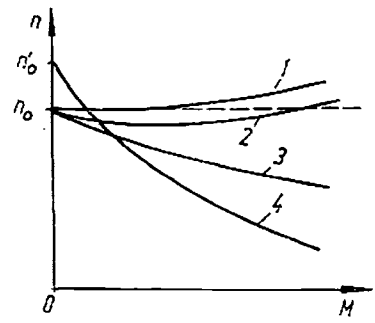


Fig. 6-45

$$n = \frac{U_e}{K_e \Phi} = \frac{U_e - (R_i + R_{es} + R)\ I}{K_e(\Phi_p \pm \Phi_s)}, \quad (6\text{-}69)$$

$$n = \frac{U_b - \dfrac{R_i + R_{es} + R}{K_M(\Phi_p \pm \Phi_s)} M}{K_e(\Phi_p \pm \Phi_s)}.$$

Aceste caracteristici depind de raportul dintre cele două fluxuri Φ_p și Φ_s, alura lor fiind determinată de înfășurarea principală (cea care produce cca. 70% din fluxul total), care poate fi cea paralel (Φ_p) sau cea serie (Φ_s). Cele două fluxuri se pot modifica prin R_{cp} și R_{cs}.

În figura 6-45 sînt prezentate calitativ caracteristicile mecanice pentru excitație mixtă: diferențială, cînd cea paralel este principală (curba *1*); diferențială cu cea serie principală (curba *2*); adițională și cea paralel principală (curba *3*) și adițională cu cea serie principală (curba *4*), cînd motorul nu se mai ambalează la $M = 0$ ci are o valoare finită n_0.

Aceeași alură o au și caracteristicile de turație ale motorului cu excitație mixtă.

Se vede că la motorul de curent continuu cu excitație mixtă există posibilitatea de a corecta (prin R_{cp} și R_{cs}), după necesități, caracteristicile mecanice, respectiv cele de turație. Prin aceasta se obține o plajă întinsă de reglaj (limite de variație pentru sarcină) și nu mai există pericolul ambalării la mersul în gol (sau la sarcini reduse).

Datorită acestor însușiri, motoarele cu excitație mixtă (deși sînt mai scumpe) au o largă utilizare în acționarea electrică: excavatoare, ascensoare, prese, ștanțe, foarfece etc.

6.2.16. Caracteristicile de pornire ale motorului de curent continuu

Pentru o înțelegere mai ușoară a fenomenelor ce au loc la pornirea motoarelor de curent continuu, se consideră un motor cu excitație separată, reprezentat în figura 6-46. La pornire, ca orice motor electric, motorul de curent continuu absoarbe din rețeaua de alimentare un curent I_p (curent de pornire) mult mai mare decît cel nominal I_n. Într-adevăr din (6-58) rezultă

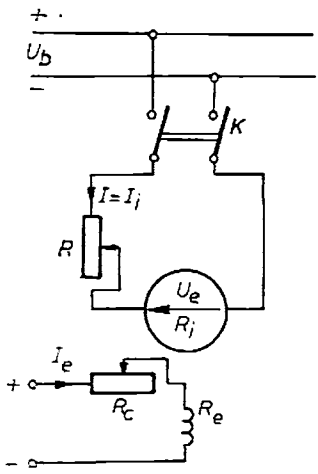


Fig. 6-46

că în momentul inițial al pornirii, cînd $n = 0$, respectiv $U_e = K_e \Phi n = 0$, motorul absoarbe curentul maxim:

$$I_{pmax} = \frac{U_b}{R_i} = \frac{U_b}{R_i I_n} I_n. \qquad (6\text{-}70)$$

Evaluînd căderea de tensiune rotorică pentru curentul nominal ($R_i I_n$) la 4% din U_b, atunci din (6-70) rezultă:

$$I_{pmax} = \frac{U_b}{0{,}04\ U_b} I_n = 25\ I_n, \qquad (6\text{-}71)$$

adică un curent foarte mare, limitat numai de rezistența rotorică R_i, care este foarte mică.

Dacă în serie cu rotorul se introduce rezistența R (rezistența de pornire) atunci la pornire curentul are valoarea:

$$I_p = \frac{U_b}{R_i + R} < I_{pmax}. \qquad (6\text{-}72)$$

Pe măsură ce viteza rotorului crește, apare și crește odată cu turația n și tensiunea electromotoare $U_e = K_e \Phi n$, deci scade curentul:

$$I_p = \frac{U_b - U_e}{R_i + R}, \qquad (6\text{-}73)$$

putîndu-se reduce treptat rezistența de pornire R.

Din expresia cuplului electromagnetic $M = K_M \Phi I$, rezultă că la I dat, motorul pornește cu atît mai repede (timp de pornire mai mic) cu cît fluxul Φ este mai mare (motorul mai excitat). De aceea reostatele de cîmp din circuitele de excitație (excitație separată și paralel) au rezistențele minime la pornire pentru a avea I_{emax}, deci flux Φ mare.

Pe baza celor de mai sus, se pot menționa trei metode de pornire a motorului de curent continuu: cuplarea directă la rețea, cu toate consecințele prezentate mai sus; pornire cu introducerea unui reostat de pornire R în serie cu circuitul rotoric și pornire prin alimentarea cu tensiune U_b reglabilă (mică la început).

Cea mai avantajoasă metodă din punctul de vedere al costului aparatajului de pornire și a simplității operației în sine, este cea a cuplării directe la rețeaua de alimentare. Se aplică motoarelor de putere mică (din cauza lui I_{pmax} mare), în general sub (5—6) kW și tensiuni ridicate, de obicei la motoarele cu excitație serie. La acestea, $I_{pmax} = (6 \div 8)\ I_n$. La motorul serie, odată cu creșterea lui I crește și $I_e = I$, deci Φ, motorul pornind relativ repede. În cazul motoarelor cu excitație separată, derivație și mixtă, se conectează mai întîi la rețea circuitul de excitație și numai după ce s-a stabilit fluxul de regim normal de funcționare, se conectează și circuitul rotoric.

La pornirea cu reostat de pornire în serie cu rotorul trebuie ca fluxul Φ să fie maxim (pentru a obține un cuplu suficient ca motorul să pornească), iar tensiunea de alimentare U_b a rotorului să fie suficient de mică pentru ca ea să determine în rotor un curent I care să nu depășească limitele admisibile

de încălzire a motorului. Condiția de flux maxim se obține (la motoarele cu excitație separată și derivație) conectînd înfășurarea de excitație la tensiunea maximă (cea nominală). Reducerea tensiunii la bornele rotorice se realizează prin introducerea unei rezistențe R în serie cu rotorul. Această rezistență (denumită de pornire sau de demaraj) se execută cu ploturi, astfel ca să poată fi modificată în trepte, fiecărei trepte corespunzîndu-i o caracteristică artificială de turație. În această rezistență au loc pierderi însemnate de energie prin efect Joule-Lenz.

Același efect (de reducere a tensiunii) se obține dacă se alimentează rotorul direct cu o tensiune mai redusă la începutul procesului de pornire, tensiune ce se mărește pe măsura creșterii turației, ajungîndu-se la regimul nominal, cînd tensiunea este U_b. Este o metodă costisitoare, necesitînd surse de tensiune continuă, reglabilă. Asemenea surse pot fi: grupuri de mașini (Ward-Leonard), amplificatoare magnetice, redresoare comandate cu tiristoare, variator de tensiune continuă (Chopper). Metoda este utilizată la pornirea motoarelor de putere mare, unde sînt curenți foarte mari care ar conduce la pierderi mari în reostatele de pornire. Metoda asigură și un reglaj în limite largi a turației motorului.

6.2.17. Caracteristicile de modificare (reglare) a turației motorului de curent continuu

Prin modificarea turației motorului de curent continuu se înțelege trecerea punctului de funcționare de pe caracteristica mecanică naturală, pe una artificială, astfel că la același cuplu electromagnetic să corespundă o altă valoare pentru turație.

Diferitele modalități de modificare a turației motoarelor de curent continuu rezultă din ecuația caracteristicilor mecanice (6-62) pentru excitație paralel, (6-65) pentru serie și (6-69) pentru excitație mixtă. Astfel, pentru motorul cu excitație paralel, ecuația era:

$$n = \frac{U_b}{K_e \Phi} - \frac{R_i + R}{K_e K_M \Phi^2} M. \tag{6-74}$$

Considerînd cuplul la arbore M_r ca fiind constant sau aproximativ constant și neglijînd cuplul corespunzător pierderilor, se poate scrie $M = M_r$; atunci, din expresia lui n (6-74) rezultă trei posibilități de reglare a turației și anume prin modificarea: tensiunii de alimentare U_b, a fluxului inductor Φ sau a rezistenței R introdusă în serie cu rotorul.

Prima metodă, cea a modificării lui U_b, este costisitoare, ea necesitînd o sursă de tensiune continuă, reglabilă.

Modificarea turației prin variația fluxului inductor se folosește numai în sensul descreșterii fluxului (reglarea turației prin slăbire de cîmp), căci la turație nominală motorul funcționează practic în regim saturat, ceea ce înseamnă că o creștere suplimentară a fluxului față de cel nominal (Φ_n) ar necesita o creștere mult prea mare a lui I_e.

Posibilitatea modificării turației prin variația rezistenței R introdusă în circuitul rotoric al motorului cu excitație derivație rezultă din expresia tu-

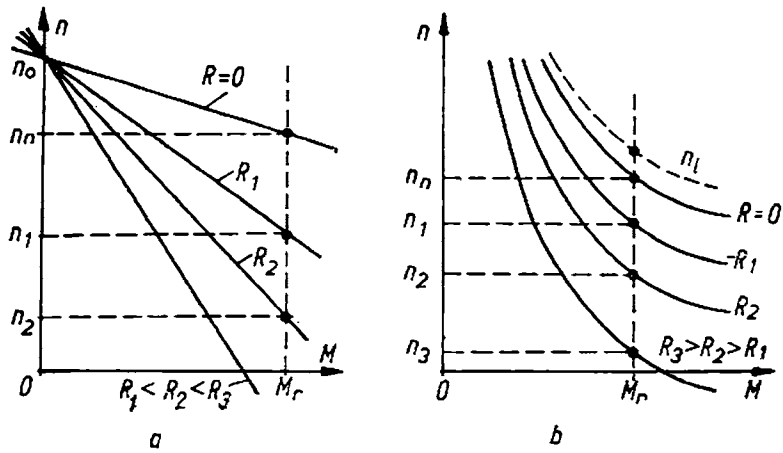


Fig. 6-47

rației, dată de (6-74). În cazul cînd $U_b = const.$ și $I_e = const.$, această expresie se scrie:

$$n = \frac{U_b}{K_e \Phi} - \frac{R_i + R}{K_e K_M \Phi^2} M = n_0 - \frac{R_i + R}{K} M,$$

unde $K = K_e K_M \Phi^2 = const.$

Pentru diferite valori ale lui R se obțin caracteristicile mecanice artificiale din figura 6-47, *a*. În figura 6-47, *b* sînt prezentate caracteristicile mecanice artificiale ale motorului serie, construite pe baza relației (6-65).

Această metodă este neeconomică, deoarece în rezistența R au loc pierderi însemnate prin efect Joule-Lenz, rezistența fiind și voluminoasă, respectiv scumpă. Se folosește în general pentru $n_n > n > 0{,}5\ n_n$ și timp relativ scurt, în cazul puterilor mici și mijlocii.

Din figura 6-47 rezultă că pe măsură ce rezistența R, introdusă în serie cu rotorul, crește ca valoare, funcționarea motorului devine tot mai puțin stabilă, adică la variații mici ale lui M se obțin variații mari ale lui n.

6.2.18. Frînarea motorului de curent continuu

Un motor de curent continuu poate funcționa și în regim de frînă, cînd cuplul electromagnetic M, dezvoltat de motor, acționează în sens opus turației, el contribuind la micșorarea turației n, la menținerea constantă a unei turații de frînare, sau chiar la oprirea motorului. Există trei procedee mai importante de frînare a motorului de curent continuu.

Frînarea în regim de generator cu recuperare de energie este unul din procedee, el obținîndu-se atunci cînd, motorul funcționînd normal, dintr-un motiv oarecare acesta este accelerat, turația sa depășind turația de mers în gol n_0. Este cazul motorului ce acționează un vehicul, la care, în timpul coborîrii unei pante, forțele gravitației (forțe active în acest caz) înving forțele de frecare, vehiculul se accelerează și se poate ajunge la $n > n_0$. De remarcat că prin această metodă se poate numai frîna motorul, dar nu și opri, frînarea avînd loc la $n > n_0 > 0$. Turația de frînare este cu atît mai mare cu cît rezistența circuitului rotoric este mai mare. Metoda nu se poate folosi la mo-

torul cu excitație serie, căci la acesta $n_0 \to \infty$, iar la cel cu excitație mixtă, porțiunea din cadranul II al caracteristicilor mecanice corespunde regimului de frînare recuperativă.

Un alt procedeu de frînare este frînarea în regim de contracurent, cînd n și M au sensuri opuse. Acest regim de frînare se poate realiza în două moduri:

— inversînd polaritatea bornelor rotorice (deci sensul lui I) sau a celor de excitație (sensul lui Φ), în timp ce motorul se rotește cu turația n. În aceste condiții $M = K_M \Phi I$ schimbă de sens, devenind cuplu rezistent;

— schimbînd sensul turației n, ceea ce se realizează atunci cînd cuplul rezistent M_r depășește ca valoare cuplul electromagnetic activ M.

Al treilea procedeu de frînare este frînarea dinamică (reostatică). În cazul acestei metode de frînare, cu motorul funcționînd normal (avînd turația n), se deconectează rotorul de la rețeaua de alimentare conectîndu-se peste o rezistență R_d, înfășurarea de excitație rămînînd conectată în continuare la rețea. În primul moment rotorul motorului este antrenat în același sens cu n, de masele inerțiale aflate în mișcare de rotație la momentul deconectării rotorului. Existînd și flux magnetic Φ (excitația rămînînd conectată la rețea) motorul a trecut în regim de generator, dar nu cu recuperare de energie, căci el debitează pe rezistența $(R_d + R_i)$. Întreaga energie a maselor frînate se transformă în căldură, prin efect Joule-Lenz, în aceste rezistențe.

6.2.19. Randamentul mașinii de curent continuu

La funcționarea mașinii de curent continuu ca generator, acesta primește pe la arbore, de la mașina primară care îl antrenează puterea mecanică P_{1m} și cedează consumatorului puterea electromagnetică $P_2 = U_b I$, putîndu-se defini randamentul generatorului sub forma:

$$\eta_i = \frac{P_2}{P_{1m}} = \frac{P_2}{P_2 + \Sigma p} = \frac{P_2}{P_2 + (p_{Cu} + p_{Fe} + p_p + p_m)},$$

unde: Σp este suma pierderilor din generator; p_{Cu} — pierderile în cupru (prin efect Joule-Lenz) din toate înfășurările (rotorică, poli statorici, poli de comutație, înfășurare de compensație a reacției de indus); p_{Fe} — pierderile în fier din rotor, căci în rotor fluxul e variabil datorită rotirii; p_p — pierderile electrice la contactul perie-lamele de colector, ele exprimîndu-se în funcție de căderea de tensiune ΔU_p pe o pereche de perii ($\Delta U_p = 0{,}4 \div 24$ volți) și curentul rotoric I_i, adică $p_p = \Delta U_p I_i$; p_m — pierderile mecanice datorită frecărilor, inclusiv ventilației.

Dacă generatorul este cu excitație separată, atunci puterea absorbită de generator este $P_{1m} + P_{ex}$, dacă P_{ex} este puterea electrică absorbită de excitația separată.

La funcționarea ca motor a mașinii de curent continuu, acesta absoarbe de la rețeaua de alimentare puterea electromagnetică $P_1 = U_b I$ și furnizează, la arbore, puterea mecanică P_2. În P_1 se include și puterea din circuitul de excitație. Randamentul motorului se definește, ca la generator:

$$\eta_i = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + (p_{Cu} + p_{Fe} + p_p + p_m)}.$$

Randamentul mașinii de curent continuu este maxim la o încărcare P_2 cuprinsă în domeniul $P_2 = (0{,}7 - 1)\ P_{2n}$.

6.2.20. Generatoare de curent continuu pentru sudarea cu arcul electric

Un asemenea generator trebuie să suporte regimul de scurtcircuit (cînd electrodul și piesa sînt în contact metalic), iar caracteristica externă $U_b = f(I)$ să asigure un I cît mai constant, indiferent de lungimea arcului.

În figura 6-48 este prezentat schematic, generatorul de sudare cu cîmp transversal. Statorul are o pereche de poli, reluctanța lor magnetică putînd fi modificată prin schimbarea poziției miezului feromagnetic A, miez ce se poate deplasa în interiorul polului. Modificîndu-se reluctanța, la aceleași amperspire de excitație, se modifică și fluxul inductor Φ, a cărui axă este axa longitudinală (axa polilor). Pe colector se află periile principale a_1 și a_2 în axa longitudinală și periile b_1 și b_2 în axa neutră (transversală), ultimele două fiind legate în scurtcircuit.

Cînd arcul e întrerupt și rotorul rotit cu turația n, în înfășurarea rotorică se induce tensiunea electromotoare $U_{e0r} = K_e \Phi_{rm}\, n$ datorită fluxului remanent Φ_{rm}, tensiune colectată de b_1 și b_2. Tensiunea U_{e0r} determină în rotor un curent I_b mare, căci rezistența rotorică e mică. Curentul I_b creează un flux Φ_b mare (flux transversal) care induce în rotor o tensiune electromotoare U_{eb} mare, colectată de a_1 și a_2. Tensiunea U_{eb} e suficientă pentru a amorsa arcul electric și deci înfășurarea de excitație este parcursă de curentul I, mărindu-se în acest fel fluxul inductor Φ. Curentul I străbătînd și rotorul prin periile a_1 și a_2 determină un flux al reacției de indus Φ_d (flux demagnetizant), care slăbește fluxul inductor.

Industria electrotehnică românească produce diferite tipuri de convertizoare de sudare (mașină primară plus generator de sudare).

6.3. MAȘINA ASINCRONĂ

Mașina electrică asincronă este o mașină rotativă ce poate transforma energia mecanică în energie electromagnetică (generator asincron) sau invers (motor asincron). Mașina funcționează în curent alternativ, în general sinusoidal, ca funcții de timp. Cu toate că este o mașină reversibilă, putînd funcționa atît ca generator cît și ca motor, este utilizată aproape în exclusivitate ca motor, fapt pentru care în cele ce urmează vom trata numai regimul de motor al mașinii asincrone.

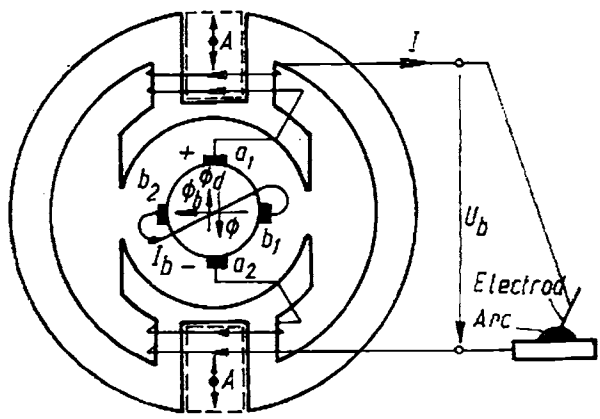


Fig. 6-48

Puterea absorbită de la rețeaua de alimentare de către stator este transmisă rotorului prin întrefier de către cîmpul electromagnetic, în cadrul fenomenului

inducției electromagnetice, motiv pentru care mașina asincronă se mai numește și mașină cu inducție.

Motorul asincron trifazat prezintă unele avantaje: se alimentează direct cu sistem de tensiuni trifazat simetric, construcție simplă, cost scăzut, robustețe, ușor de exploatat, turație puțin dependentă de sarcină. Este cel mai răspîndit motor electric în domeniul acționărilor electromagnetice și se construiește la tensiuni pînă la 10 kV, puteri de la cîțiva wați pînă la zeci de megawați, iar turații $n = 500 - 3\,000$ rot/min (la $f = 50$ Hz).

6.3.1. Elemente constructive ale motorului asincron trifazat

Motorul asincron trifazat este construit din două părți principale distincte:

— *statorul*, ca parte fixă, avînd rolul de inductor adică de a produce un cîmp magnetic învîrtitor (cîmp de excitație), așa cum am arătat la 4.4.2.;

— *rotorul*, parte mobilă cu rol de indus, în care cîmpul magnetic învîrtitor induce tensiuni electromotoare și curenți electrici, căci înfășurările rotorice (ale indusului) sînt închise.

Între stator și rotor se află un întrefier δ, dimensiunile lui fiind în funcție de puterea motorului și condițiile de lucru ($\delta = 0{,}25 - 4$ mm).

Elementele constructive ale motorului asincron trifazat sînt prezentate în figurile 6-49 și 6-50, care redau o secțiune longitudinală și una transversală prin *motorul asincron cu inele* (fig. 6-49) și prin *rotorul în colivie* (fig. 6-50).

Statorul (inductorul) cuprinde: carcasa, miezul statoric și înfășurarea statorică.

Carcasa (a) din oțel, fontă, țeavă sudată sau aliaj de aluminiu (la puteri mici), cu rol de consolidare și protecție, nu face parte din circuitul magnetic. De carcasă sînt fixate: tălpile de prindere *(b)*, cutia de borne statorică *(c)* sau/și rotorică *(d)*, inelele de ridicare și transportoare *(e)*, scuturile frontale (f_1), (f_2) în care se află lagărele (u) și bara suport (g) pentru portperiile *(h)*.

Miezul statoric (i), din pachete de tole de oțel electrotehnic de formă cilindrică, fixat în interiorul carcasei, poate fi prevăzut cu canale radiale *(j)* pentru răcire. În interiorul cilindrului statoric după generatoarele acestuia se află crestăturile statorice *(l)* în care se plasează bobinajul statoric.

Înfășurarea statorică, este o înfășurare trifazată *(o)* corespunzătoare celor trei faze statorice. Cele trei înfășurări de fază sînt identice ca date constructive (diametrul conductorului, număr de spire) și decalate în spațiu, la periferia interioară a miezului (cilindrului) statoric cu $\frac{2\pi}{3p}$ grade (p este numărul de perechi de poli), una față de cealaltă și ocupînd același număr de crestături. Această înfășurare constituie pentru rețeaua de alimentare un receptor trifazat echilibrat, fiind parcursă de un sistem trifazat simetric de curenți. În aceste condiții, înfășurarea statorică trifazată creează de-a lungul întrefierului δ un cîmp magnetic învîrtitor (v. 4.4.2.).

Rotorul (indusul) are în componența sa: miezul rotoric, arborele și înfășurarea rotorică.

Miezul rotoric (m) de formă cilindrică, din tole de oțel electrotehnic, este consolidat pe axul motorului și este prevăzut cu crestăturile rotorice *(n)*.

Arborele motorului asincron *(q)* este confecționat din oțel laminat sau forjat, pe el fiind fixate ventilatorul *(r)* și cele trei inele colectoare *(s)* — la rotorul în colivie.

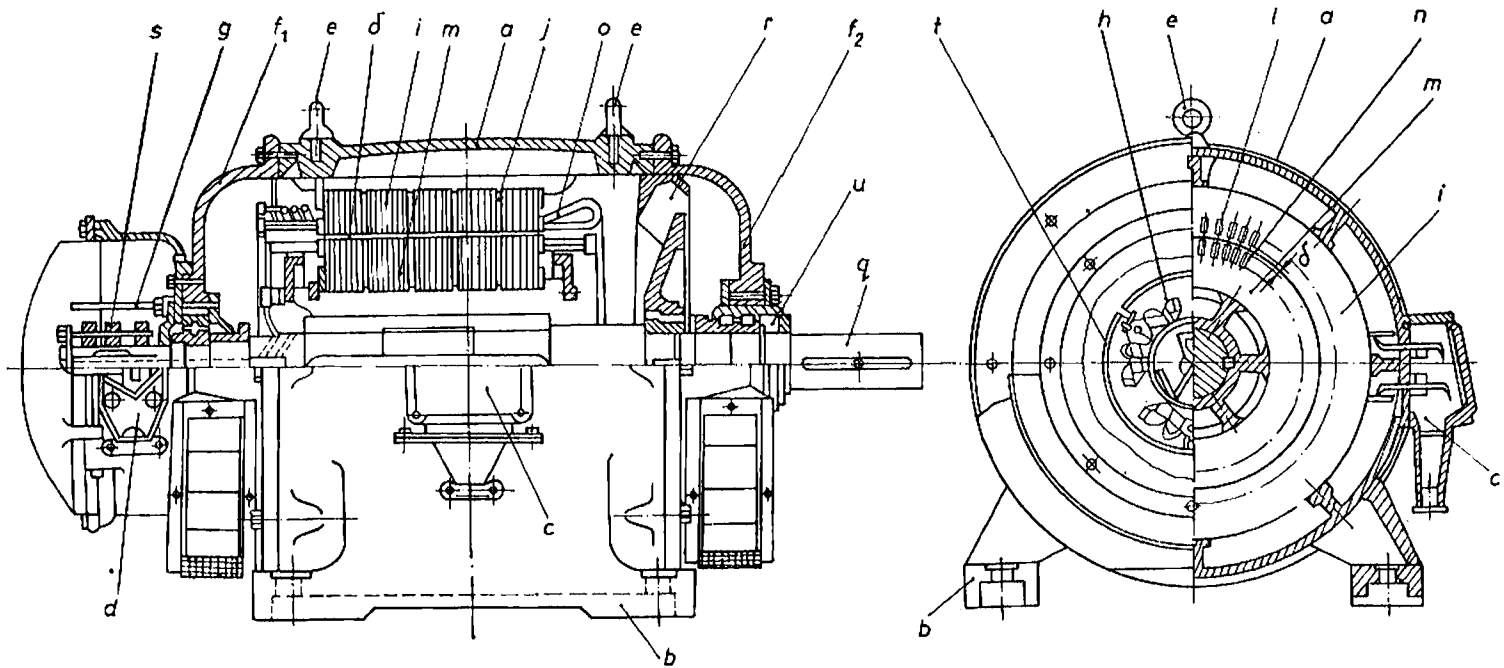


Fig.6-49

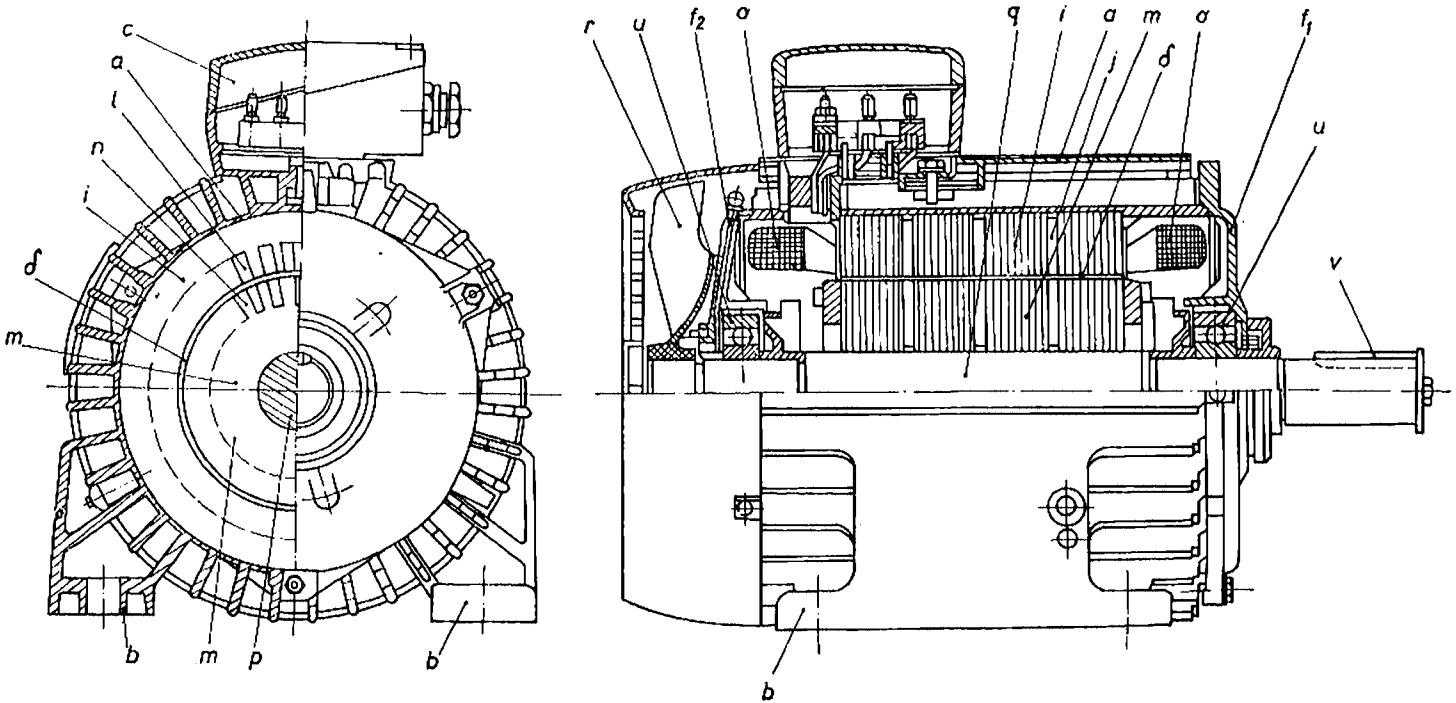


Fig. 6-50

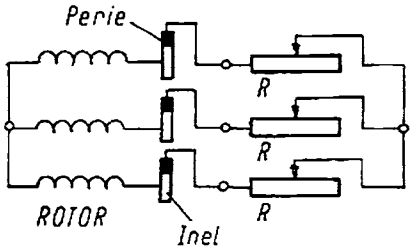


Fig. 6-51

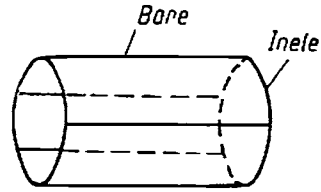


Fig. 6-52

Din punctul de vedere al *înfășurării rotorice* se disting două tipuri constructive de motoare asincrone trifazate: *cu rotor bobinat* (fig. 6-49) și cu *rotor în scurtcircuit* (fig. 6-50). La cele cu rotor bobinat înfășurarea rotorică este o înfășurare trifazată conectată în stea, neutrul fiind realizat în interior, iar capetele libere sînt legate prin cablul de legătură (*t*) la cele trei inele colectoare *(s)* ce se învîrtesc odată cu rotorul. Pe inele calcă trei perii colectoare fixate pe portperiile *(h)*, fixe față de stator și conectate la cutia de borne rotorică *(d)*. Prin intermediul acestei cutii de borne, în serie cu fazele rotorice se pot conecta, în exteriorul motorului, rezistențele R (fig. 6-51) necesare la pornirea și reglarea turației motorului. Motorul asincron trifazat cu rotorul bobinat se mai numește și *motor cu inele colectoare*. Înfășurarea rotorică a rotorului bobinat se fixează în crestături cu ajutorul unor pene izolante, care pot fi din: pertinax, textolit, lemn de fag fiert în ulei de in etc.

La rotorul în scurtcircuit, înfășurarea rotorică este constituită din bare de cupru sau aluminiu, așezate neizolate cîte una în crestătură și legate între ele la capete, prin intermediul unor inele metalice frontale care le scurtcircuitează, constituind deci tot o înfășurare închisă. Ansamblul format din bare și inele de scurtcircuitare are aspectul unei colivii (fig. 6-52), de unde și denumirea de motor asincron cu *rotor în colivie*.

La motoarele asincrone de puteri mici, miezul rotoric se execută sub forma unui cilindru de oțel masiv.

6.3.2. Principiul de funcționare a motorului asincron trifazat

Înfășurarea statorică, care reprezintă un receptor trifazat echilibrat, este alimentată cu un sistem de tensiuni trifazat și simetric, de succesiune directă, stabilindu-se un sistem de curenți, trifazat simetric de aceeași succesiune directă. În aceste condiții, statorul (inductorul) creează un cîmp magnetic învîrtitor, a cărui armonică fundamentală se rotește cu turația n_1 față de stator (denumită turație de sincronism — v. 4.4.2.).

Înfășurarea rotorică este o înfășurare închisă (atît la rotorul bobinat cît și la cel în colivie) și are același număr de perechi de poli p pe o fază, ca și statorul. Cînd rotorul stă pe loc, cîmpul magnetic învîrtitor statoric întîlnește pe rînd bobinele (fazele) rotorice, inducînd în acestea tensiuni electromotoare care determină în înfășurarea rotorică închisă un sistem de curenți trifazat simetric. Așa dar, conductoarele (barele) rotorice sînt parcurse de curenți electrici și situate în cîmp magnetic, asupra lor exercitîndu-se forțe de tip Laplace, $d\bar{F} = i \cdot (d\bar{l} \times \bar{B})$ — v. (4-12), care pun în mișcare rotorul, acesta rotindu-se cu turația n față de stator în sensul cîmpului magnetic învîrtitor.

Turația rotorului este mai mică decît cea de sincronism, adică $n < n_1$ (de unde și denumirea de motor asincron), căci numai așa există o mișcare relativă a rotorului față de cîmpul învîrtitor statoric și deci un fenomen de inducție electromagnetică pe baza căruia se induc t.e.m. și curenții în rotor.

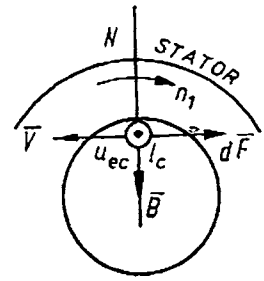


Fig. 6-53

În figura 6-53 este prezentat sensul tensiunii electromotoare indus într-un conductor rotoric, $u_{ec} = \int_0^l (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l}$, știind că viteza relativă $\bar{v}$ a conductorului rotoric față de stator este opusă turației de sincronism n_1. Același sens ca u_{ec} îl are și curentul i_c din conductorul respectiv, rezultînd forța $d\bar{F} = i\,(d\bar{l} \times \bar{B})$ de același sens cu n_1. Deci n_1 și n au același sens.

Frecvența tensiunilor electromotoare induse în rotor (deci și a curenților rotorici) este f_2, ea fiind determinată de turația relativă a cîmpului magnetic învîrtitor față de rotor $(n_1 - n)$, putîndu-se scrie: $n_1 - n = 60\, f_2/p$ rezultînd:

$$f_2 = (n_1 - n)\frac{p}{60} = \frac{n_1 - n}{n_1} \cdot \frac{pn_1}{60} = sf_1, \tag{6-75}$$

unde:

$$s = \frac{n_1 - n}{n} \tag{6-76}$$

se numește *alunecarea motorului asincron.*

Motoarele de putere mai mare au alunecarea s de valoare mai mică și invers. De remarcat că alunecarea s indică de cîte ori turația relativă $n_r = (n_1 - n)$ a rotorului față de stator, este mai mare decît turația cîmpului magnetic învîrtitor statoric n_1.

După valorile alunecării, se pot defini cele trei regimuri de funcționare ale mașinii asincrone:

— *regimul de motor*, cînd $0 < n < n_1$, rezultînd $1 > s > 0$;

— *regimul de generator*, cînd $n > n_1$ (mașina e antrenată din exterior de un motor primar), deci $s < 0$;

— *regimul de frînă*, cînd $n < 0$ (rotorul este obligat să se rotească invers față de sensul determinat de cuplul motorului), deci $s > 1$.

Curenții electrici, care se stabilesc în fazele rotorice, constituind un sistem de curenți trifazat simetric, produc și ei un cîmp magnetic învîrtitor numit cîmp magnetic de reacție a indusului (rotorului), a cărui turație față de rotor este:

$$n_r = \frac{60\, f_2}{p} = \frac{60\, s f_1}{p} = sn_1,$$

respectiv față de rotor:

$$n_2 = n + sn_1. \tag{6-77}$$

Din (6-76) și (6-77) rezultă: $n_1 = sn_1 + n = n_2$, adică, față de stator, cele două cîmpuri magnetice învîrtitoare au aceeași turație, putîndu-se însuma, obținîndu-se un cîmp magnetic învîrtitor rezultant, cu turația n_1.

Acest cîmp rezultant determină sub fiecare pol statoric un flux magnetic fascicular. O parte din acest flux înlănțuie atît conductoarele înfășurării statorice cît și cele din rotor, constituind fluxul util Φ (de amplitudine Φ_m), iar o altă parte, numai conductoarele propriei înfășurări — fluxul magnetic de scăpări (de dispersie) Φ_{d1} și Φ_{d2}. Corespunzător acestor fluxuri de dispersie statoric (Φ_{d1}) și rotoric (Φ_{d2}) se definește pentru fiecare fază, o inductivitate și o reactanță de dispersie notate cu X_1 (stator) și X_2 (rotor).

6.3.3. Ecuațiile tensiunilor motorului asincron trifazat

Fluxul comun Φ (de amplitudine Φ_m) induce în fiecare fază statorică și rotorică cîte o tensiune electromotoare de valoare efectivă:

$$U_{e1} = 4{,}44\ k_1 N_1 f_1 \Phi_m \text{ și } U_{e2} = 4{,}44\ k_2 N_2 f_2 \Phi_m, \tag{6-78}$$

unde: N_1, N_2 este numărul de spire al unei înfășurări de fază statorică, respectiv rotorică; k_1, k_2 — factor de înfășurare, subunitar, ce ține seama de faptul că înfășurarea unei faze se repartizează în mai multe crestături și că pasul înfășurării este diferit de pasul polar.

Dacă U_1 este tensiunea de alimentare a unei faze statorice de rezistență R_1, iar I_1 curentul ce o străbate, atunci se poate scrie:

$$\underline{U}_1 = (R_1 + jX_1)\ \underline{I}_1 - \underline{U}_{e1}, \tag{6-79}$$

adică, tensiunea de alimentare U_1 este echilibrată de căderile de tensiune (ohmică și reactivă) și de tensiunea electromotoare $(-\underline{U}_{e1})$, indusă de către fluxul comun (util).

Înfășurarea fazei rotorice de rezistență R_2, este o înfășurare închisă, deci $\underline{U}_{e2}$ acoperă căderile de tensiune interioare din faza respectivă, inclusiv cea de pe rezistența exterioară R (care e zero la rotorul în colivie). Ca urmare, se poate scrie:

$$\underline{U}_{e2} = [(R_2 + R) + jX_2\ \underline{I}_2.] \tag{6-80}$$

Ecuațiile (6-79) și (6-80) reprezintă ecuațiile tensiunilor motorului asincron trifazat, scrise în complex simplificat, cu mențiunea că prima se referă la un plan complex la care frecvența este f_1, iar a doua la unul cu frecvența f_2.

Dacă se neglijează căderile de tensiune de pe faza statorică, atunci din (6-79) și (6-80) rezultă că la $U_1 = const.$, independent de valorile curenților I_1 și I_2, se pot scrie ecuația solenațiilor sub forma:

$$m_1 k_1 N_1 \underline{I}_1 + m_2 k_2 N_2 \underline{I}_2 = m_1 k_1 N_1 \underline{I}_{10}, \tag{6-81}$$

unde: m_1 și m_2 reprezintă numărul de faze din stator respectiv rotor; I_{10} curentul din faza statorică, cînd $I_2 = 0$, adică la mers în gol ideal ($n_1 = n$, deci $s = 0$, și înfășurare rotorică deschisă).

6.3.4. Scheme echivalente ale motorului asincron

O schemă electrică, realizată numai din rezistoare și bobine (rezistențe și inductivități), care să aibă aceleași ecuații de funcționare ca și motorul asincron, poartă denumirea de schemă electrică echivalentă a motorului asincron. În cadrul schemei echivalente, cuplajul magnetic dintre înfășurările statorice și rotorice este înlocuit cu unul electric (conexiune electrică conductoare).

Schema electrică echivalentă se construiește pentru o singură fază și ea corespunde ecuațiilor (6-79), (6-80) și (6-81), scrise însă sub alte forme, în sensul că mărimile rotorice sînt reduse la stator (fiind notate cu prim — ca la transformator).

Reducerea la stator a mărimilor rotorice trebuie să țină seama de faptul că în stator și rotor, numărul de faze poate fi diferit ($m_1 \neq m_2$) și că trebuie satisfăcute condițiile:

a) solenația rotorică raportată la stator să fie egală cu cea reală, adică:

$$m_1 k_1 N_1 I_2' = m_2 k_2 N_2 I_2, \text{ de unde } I_2' = \frac{m_2 k_2 N_2}{m_1 k_1 N_1} I_2;$$

b) puterile aparente din cele două rotoare (redus și real) să fie aceleași, deci:

$$m_2 U_2 I_2 = m_1 U_2' I_2', \text{ adică } U_2' = \frac{m_2 I_2}{m_1 I_2'} U_2 = \frac{k_1 N_1}{k_2 N_2} U_2;$$

c) pierderile electrice (în cupru) din rotorul redus și cel real să fie egale, adică:

$$m_2 (R_2 + R) I_2^2 = m_1 (R_2' + R') I_2'^2,$$

$$\text{de unde } (R_2' + R') = \frac{m_1 k_1^2 N_1^2}{m_2 k_2^2 N_2^2} (R_2 + R);$$

d) defazajele să rămînă aceleași, adică:

$$\text{tg } \varphi_2 = \frac{X_2}{R_2 + R} = \text{tg } \varphi_2' = \frac{X_2'}{R_2' + R}, \text{ deci } X_2' = \frac{m_1 k_1^2 N_1^2}{m_2 k_2^2 N_2^2} X_2.$$

Pe de altă parte, tensiunea electromotoare U_{e2} și reactanța X_2 se mai pot scrie:

$$U_{e2} = 4{,}44\ (k_2 N_2) f_2 \Phi_m = 4{,}44 (k_2 N_2)\ s f_1 \Phi_m = s \cdot U_{e20}, \qquad (6\text{-}82$$

$$X_2 = 2\pi f_2 L_2 = 2\pi s f_1 L_2 = s X_{20},$$

unde U_{e20} și X_{20} corespund cazului cînd rotorul stă pe loc, adică $s = 1$ și $f_2 = f_1$.

Înlocuind (6-82) în (6-80) se obține:

$$\underline{U}_{e20} = \frac{R_2 + R}{s} \underline{I}_2 + \mathrm{j} X_{20} \underline{I}_2, \qquad (6\text{-}83)$$

de unde rezultă că rotorul real al motorului asincron, care se rotește cu turația n, în el inducîndu-se tensiunea electromotoare U_{e2} de frecvență f_2, se poate înlocui în studiu, cu un alt rotor imobil față de stator, în care se induce U_{e20} de frecvență f_1, dar care are același curent:

$$I_2 = \frac{U_{e20}}{\sqrt{\left(\frac{R_2 + R}{s}\right)^2 + X_{20}^2}} = \frac{\frac{U_{e2}}{s}}{\sqrt{\left(\frac{R_2 + R}{s}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{s}\right)^2}} =$$

$$= \frac{U_{e2}}{\sqrt{(R_2 + R)^2 + X_2^2}}, \qquad (6\text{-}84)$$

deci aceeași solenație rotorică: $m_2 k_2 N_2 I_2$ și același defazaj φ_2, dat de:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_2}{R_2 + R} = \frac{sX_{20}}{R_2 + R} = \frac{X_{20}}{\frac{R_2 + R}{s}}.$$

Acest rotor se numește *rotor echivalent*, la care mărimile au frecvența egală cu cea statorică.

Utilizînd mărimile rotorice reduse la stator, (6-83) se scrie:

$$\underline{U}'_{e20} = \frac{R'_2 + R'}{s} \underline{I}'_2 + \mathrm{j} X'_{20} \underline{I}'_2, \tag{6-85}$$

în care:

$$U'_{e20} = \frac{k_1 N_1}{k_2 N_2} U_{e20} = \frac{k_1 N_1}{k_2 N_2} \cdot 4{,}44\, k_2 N_2 f_1 \Phi_m = 4{,}44\, k_1 N_1 f_1 \Phi_m = U_{e1}. \tag{6-86}$$

Notînd $\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}X_1$ și $\underline{Z}'_2 = \frac{R'_2 + R}{s} + \mathrm{j}X'_{20}$, (6-79) și (6-85) se pot scrie sub forma:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{U}_{e1}; \quad \underline{U}'_{e20} = \underline{I}'_2 \underline{Z}'_2 = \underline{U}_{e1}. \tag{6-87}$$

Cele două tensiuni electromotoare U_{e1} și U'_{e20} sînt induse de același flux magnetic comun (util), căruia îi corespunde o inductivitate L_{10}, respectiv o reactanță inductivă $X_{10} = 2\pi f_1 L_{10}$. Ca urmare aceste tensiuni se pot scrie:

$$\underline{U}_{e1} = \underline{U}'_{e20} = -\mathrm{j} X_{10} \underline{I}_{10} = -\underline{Z}_{10} \underline{I}_{10}, \tag{6-88}$$

în care, $\underline{Z}_{10} = \mathrm{j}X_{10}$ reprezintă impedanța complexă a circuitului electric de magnetizare.

Din (6-81), după împărțirea ei cu $m_1 k_1 N_1$, rezultă:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}'_2 = \underline{I}_{10}. \tag{6-89}$$

Relațiile (6-87), (6-88) și (6-89) reprezintă ecuațiile motorului asincron cu rotorul redus la stator, referitoare la o singură fază. Din acest sistem de ecuații scrise sub forma:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{U}_{e1}; \; 0 = \underline{I}'_2 \underline{Z}'_2 - \underline{U}'_{e20}; \; \underline{U}_{e1} = \underline{U}'_{e20} = -\underline{Z}_{10} \underline{I}_{10} \text{ și}$$
$$\underline{I}_1 + \underline{I}'_2 = \underline{I}_{10}, \tag{6-90}$$

se poate calcula o impedanță echivalentă a fazei motorului asincron trifazat:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_{10} \underline{Z}'_2}{\underline{Z}_{10} + \underline{Z}'_2} \tag{6-91}$$

și care permite reprezentarea acestei faze prin schema echivalentă din figura 6-54.

Cum Z_1 reprezintă cîteva procente (3—8%) din Z_{10} rezultă că se poate neglija raportul Z_1/Z_{10} față de 1. Cu această aproximare din (6-91) se obține:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_e} = \frac{\underline{U}_1}{\frac{\underline{Z}_{10}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}'_2)}{\underline{Z}_{10} + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}'_2)}}, \tag{6-92}$$

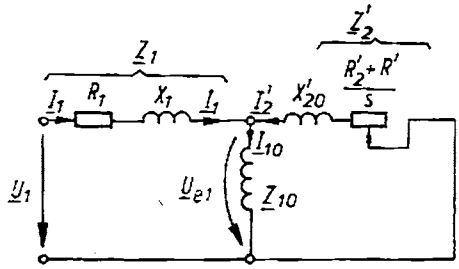


Fig. 6-54

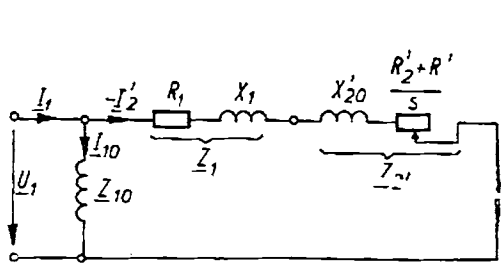


Fig. 6-55

ceea ce permite reprezentarea unei faze a motorului asincron trifazat prin schema echivalentă din figura 6-55, din care rezultă:

$$I'_2 = \frac{U_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'}{s}\right)^2 + (X_1 + X'_{20})^2}}. \qquad (6\text{-}93)$$

Parametrii schemei echivalente se pot determina experimental prin două încercări (probe) ale motorului asincron trifazat: în gol și în scurtcircuit.

6.3.5. Pierderile și randamentul motorului asincron trifazat

Motorul asincron trifazat este un receptor trifazat echilibrat, deci puterea activă P_1 absorbită de stator de la rețeaua trifazată are expresia cunoscută (v. cap. 2):

$$P_1 = 3U_f I_f \cos \varphi = \sqrt{3}\, UI \cos \varphi. \qquad (6\text{-}94)$$

În motorul asincron trifazat au loc pierderi de putere și anume:

a) pierderi în miezurile magnetice: p_{Fe1} (în stator) și p_{Fe2} (în rotor), datorate atît ciclului de histerezis cît și curenților turbionari (v. 4.2.3.). Ca urmare, la tensiunea de alimentare constantă (cînd $\Phi = const.$, deci și $B = const.$) și frecvență constantă, aceste pierderi sînt mărimi constante, fiind chiar denumite pierderi constante, independente de sarcina motorului. Se pot determina experimental prin încercarea în gol a motorului;

b) pierderi prin efect Joule-Lenz (pierderi în cupru) în înfășurarea statorică (p_{Cu1}) și în cea rotorică (p_{Cu2}). Aceste pierderi sînt variabile în funcție de sarcina motorului, prin curenții respectivi, căci:

$$p_{Cu1} = 3\, I_1^2\, R_1 \text{ și } p_{Cu2} = 3\, I_2^2\, (R_2 + R) = 3I'_2\, (R'_2 + R'). \qquad (6\text{-}95)$$

Se pot determina experimental prin încercarea în scurtcircuit a motorului;

c) pierderi mecanice p_m, datorate frecării cu aerul a părților motorului aflate în mișcare (rotor, ventilator) și a frecărilor din lagăre (paliere). Ele au loc deci în rotor (partea mobilă) și sînt independente de sarcină (la turație constantă);

d) pierderi suplimentare p_s, neglijabile în mod normal (fiind de cca 1% din P_1). Ele sînt cauzate de dispersiile magnetice, armonicile superioare ale fluxului magnetic, efectul pelicular etc.

Dacă se notează cu P, puterea mecanică utilă a motorului, adică puterea mecanică la arbore, cedată de motor prin cuplă, atunci se definește randamentul motorului asincron trifazat sub forma:

$$\eta = \frac{P}{P_1} = \frac{P_1 - (p_{Fe1} + p_{Fe2} + p_{Cu1} + p_{Cu2} + p_m + p_s)}{P_1}. \quad (6\text{-}96)$$

În general se neglijează p_{Fe2} față de p_{Fe1}, căci în rotor frecvența este foarte mică $f_2 = sf_1 = (0{,}5-3)$ Hz, precum și p_s care sînt foarte mici, putîndu-se scrie:

$$\eta = \frac{P_1 - (p_{Fe1} + p_{Cu1} + p_{Cu2} + p_m)}{P_1}. \quad (6\text{-}97)$$

Statorul, prin intermediul cîmpului magnetic învîrtitor din întrefier, transmite rotorului puterea electromagnetică P_e, care trebuie să acopere p_{Cu2}, p_m și puterea utilă P (fiind neglijate p_{Fe2} și p_s), putînd fi scrisă în forma:

$$P_e = P_1 - (p_{Fe1} + p_{Cu1}) = p_{Cu2} + p_m + P. \quad (6\text{-}98)$$

Randamentul este mare la puteri mari și mic la puteri mici; de exemplu: la motoarele cu rotorul în scurtcircuit și cu $n_1 = 1\,500$ rot/min, $\eta = 0{,}53$ (la motoarele cu $P = 0{,}06$ kW) și $\eta = 0{,}93$ (la cele cu puterea $P = 132$ kW). În general, randamentul este maxim pentru o sarcină cuprinsă între 50% și 75% din cea nominală.

6.3.6. Cuplul motorului asincron trifazat

Corespunzător celor două puteri P_e și P, la funcționarea motorului asincron trifazat se definesc cuplurile: electromagnetic M_e și la arborele motorului M. Se poate scrie:

$$P_e = M_e \Omega_1 \text{ și } P = M\Omega, \quad (6\text{-}99)$$

unde: $\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2\pi f_1}{p}$ este viteza unghiulară corespunzătoare turației $n_1 = \frac{60 f_1}{p}$ rot/min a cîmpului magnetic învîrtitor statoric și $\Omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi f_2}{p}$ — viteza unghiulară corespunzătoare turației n.

Dacă în (6-98) neglijăm p_m față de $p_{Cu2} + P$ atunci putem scrie:

$$P_e - P = p_{Cu2} = 3I_2'^2 (R_2' + R') = M_e \Omega_1 - M\Omega. \quad (6\text{-}100)$$

Cele două cupluri fiind practic egale ($M_e = M$), căci diferența dintre ele reprezintă cuplul corespunzător pierderilor mecanice p_m (care au fost neglijate), se poate scrie:

$$p_{Cu2} = 3I_2'^2 (R_2' + R') = M(\Omega_1 - \Omega) = Ms\Omega_1, \quad (6\text{-}101)$$

căci $s = \frac{n_1 - n}{n} = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1}$.

Din (6-101) și (6-92) rezultă expresia cuplului M, sub forma:

$$M = \frac{3 I_2'^2 (R_2' + R')}{s \Omega_1} = \frac{3p U_1^2 \cdot \frac{R_2' + R'}{s}}{2\pi f_1 \left[\left(R_1 + \frac{R_2' + R'}{s}\right)^2 + (X_1 + X_{20}')^2\right]}.$$

Cum R_1 și s sînt foarte mici, se poate neglija R_1 față de $\frac{R_2' + R'}{s}$, rezultînd:

$$M = \frac{3p U_1^2 \frac{R_2' + R'}{s}}{2\pi f_1 \left[\left(\frac{R_2' + R'}{s}\right)^2 + (X_1 + X_{20}')^2\right]}. \qquad (6\text{-}102)$$

Acest cuplu este maxim la $s = s_k$, valoare ce rezultă făcînd $\frac{dM}{ds} = 0$. Se obține:

$$s_k = \pm \frac{R_2' + R'}{X_1 + X_{20}'} \text{ (semnul plus pentru motor, minus — generator).} \qquad (6\text{-}103)$$

De remarcat că alunecarea s_k, la care are loc cuplul maxim M_k, nu depinde de tensiunea de alimentare U_1, ci numai de frecvența acesteia f_1, prin cele două reactanțe X_1 și X_{20}' iar la $f_1 = const.$, este proporțională cu rezistența din rotor $(R_2' + R')$. Ca valoare $s_k = (0{,}6 — 0{,}3)$. Pentru M_k se obține:

$$M_k = (M)_{s=s_k} = \frac{3pU_1^2}{2\pi f_1 \, 2(X_1 + X_{20}')}, \qquad (6\text{-}104)$$

care, după cum se vede, depinde de numărul perechilor de poli p, de pătratul tensiunii U_1 și al frecvenței f_1, dar nu depinde de rezistența din rotor $(R_2' + R')$.

Cu ajutorul lui s_k și M_k, se poate scrie expresia cuplului motorului asincron trifazat sub o formă mai simplă:

$$M = \frac{2M_k}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}}. \qquad (6\text{-}105)$$

În figura 6-56, *a* este reprezentată dependența $M = f(s)$, distingîndu-se cele trei regimuri de funcționare: generator $(s < 0)$, motor $(0 < s < 1)$ și frînă $(s > 1)$.

Referindu-ne la regimul de motor, prezintă importanță coeficienții:
— de multiplicare k_p a cuplului de pornire M_p (adică M la $s = 1$), definit ca raportul:

$$k_p = \frac{M_k}{M_p} = (1{,}6 - 2{,}2);$$

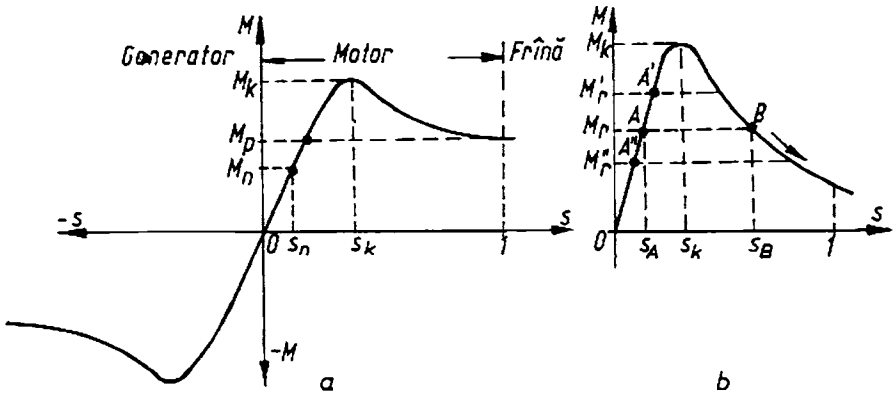


Fig. 6-56

— de supraîncărcare $\lambda = \frac{M_k}{M_n} = (1{,}5—3{,}5)$, M_n fiind cuplul nominal.

Din caracteristica $M = f(s)$, pentru funcționarea ca motor (fig. 6-56, *b*) rezultă că porțiunea $0 < s < s_k$ este o porțiune stabilă, cîtă vreme pentru $s_k < s < 1$ este nestabilă. Într-adevăr, dacă punctul de funcționare ar fi în B, atunci la o creștere a cuplului rezistent de la M_r la M'_r scade n, crește $s = \frac{n_1 - n}{n_1}$, scade M, scade mai mult n, crește s, scade M etc., pînă ce motorul se oprește. La o micșorare a lui M_r pînă la M''_r, crește n, scade s, crește M, crește mai mult n, scade s, crește M etc., pînă se ajunge ca $M = M_k$, după care M scade pînă devine egal cu M''_r, în punctul A'' (de pe porțiunea $0 < s < s_k$).

Dacă punctul de funcționare este în A, la creșterea lui M_r, scade n, crește s, crește M și egalează pe M'_r în punctul A' (un alt punct stabil). La scăderea lui M_r pînă la M''_r, noul punct stabil va fi A''.

Cum M_k nu depinde de rezistența R introdusă din exterior în serie cu faza rotorului de rezistență R_2 (la rotorul bobinat), iar s_k crește cu creșterea lui R, se pot trasa caracteristicile artificiale $M = f(s)$ pentru R ca parametru, iar $U_1 = U_{1n} = const.$ și $f_1 = f_{1n} = const.$ Aceste caracteristici cu forma celor din figura 6-57, în care pentru $R = R_{III}$ s-a obținut $M = M_k$ la $s_k = 1$ (la pornire). La $R = 0$ se obține caracteristica naturală $M = f(s)$.

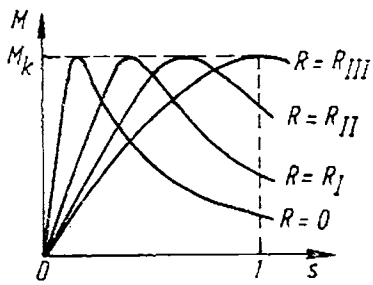


Fig. 6-57

6.3.7. Caracteristicile mecanice ale motorului asincron trifazat

Prin caracteristică mecanică statică (adică cuplul electromagnetic egal cu cel rezistent) a unui motor asincron trifazat, se înțelege dependența dintre turația n a motorului și cuplul electromagnetic M, cînd m_1, p, R_1 $(R'_2 + R')$, X_1, X'_{20}, f_1 și U_1 sînt menținute constante. Caracteristicile mecanice, $n = f(M)$, ca expresie analitică rezultă din

$M = f(s)$, înlocuind pe s cu valoarea sa în (6-101) și explicitînd apoi pe n în funcție de M. .

În figura 6-58 este prezentată calitativ caracteristica mecanică naturală la un motor dat (m_1, p, R_1, R_2', X_1 și X_{20}' — constante) pentru parametrii nominali: $U_1 = U_{1n}$, $f_1 = f_{1n}$ și $R' = 0$. Turația n_k corespunde lui s_k, valoarea sa rezultînd din $s_k = \frac{n_1 - n_k}{n_1}$, adică:

$$n_k = n_1(1 - s_k) = \frac{60 f_1}{p}\left(1 - \frac{R_2' + R}{X_1 + X_{20}'}\right).$$

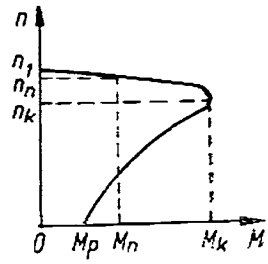


Fig. 6-58

Din figura 6-58 se vede că la motorul asincron, caracteristica mecanică naturală este rigidă, turația n scăzînd puțin cu sarcina (cuplul).

Dacă la un motor asincron trifazat dat (m_1, p, R_1, R_2', X_1 și X_{20}' — constante) cel puțin unul dintre parametrii U_1 și f_1 nu mai sînt cei nominali, sau $R' \neq 0$, atunci se obțin caracteristicile mecanice artificiale, reprezentate calitativ în figura 6-59. Din expresiile cunoscute ale lui M_k (6-104) și lui s_k (6-103) rezultă următoarele:

— dacă parametrul este R (respectiv R') atunci odată cu modificarea acestuia se modifică numai alunecarea s_k (respectiv n_k), rămînînd neschimbate M_k și n_1. Alunecarea s_k crește odată cu R, deci scade n_k caracteristica devenind mai moale (fig. 6-59, *a*);

— la modificarea lui U_1, ca parametru, se modifică numai M_k, acesta crescînd cu U_1^2, păstrîndu-se neschimbate s_k și n_1 (fig. 6-59, *b*);

— o schimbare a frecvenței tensiunii de alimentare (parametru f_1) duce la modificarea lui n_1, a lui M_k (care depinde de f_1 atît direct cît și prin reactanțele X_1 și X_{20}') cît și a lui s_k (prin X_1 și X_{20}'). Ca urmare, M_k este invers proporțional cu f_1^2, s_k cu f_1 iar n_1 este direct proporțional cu f_1. La creșterea lui f_1 scade M_k și s_k, însă crește n_k (fig. 6-59, *c*).

Calculul analitic al caracteristicilor mecanice artificiale prezintă mari dificultăți din cauza complexității relațiilor dintre diferiții parametri ai motorului asincron trifazat. El poate fi însă ușor efectuat cu asistența calculatoarelor automate.

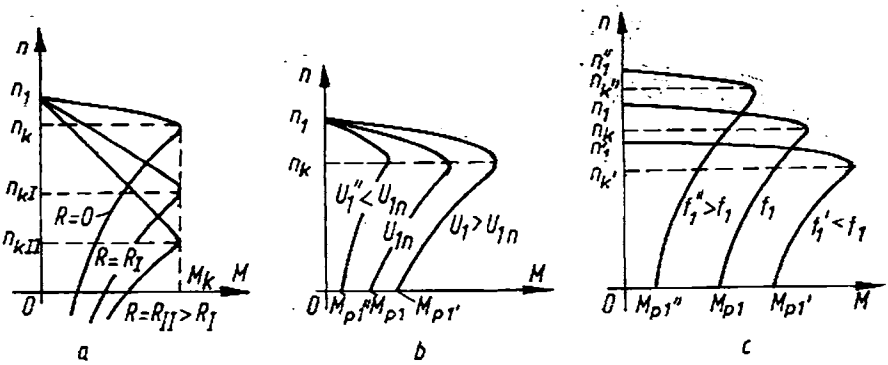


Fig. 6-59

6.3.8. Pornirea motoarelor asincrone trifazate

Prin pornire se înțelege procesul de conectare a motorului asincron trifazat la rețeaua trifazată de alimentare și de creștere a turației acestuia pînă la valoarea nominală, corespunzătoare sarcinii nominale de la arbore. Acest proces de pornire este automatizat în instalațiile de acționare moderne, folosindu-se în acest scop contactoare, relee de timp și de curent maximal.

La pornire, cuplul de pornire M_p trebuie să fie mai mare decît cel rezistent M_r (de la arbore), pentru a se asigura accelerarea mecanismului antrenat de motor, fără șocuri dinamice dăunătoare transmisiilor (o pornire lină). Curentul de pornire I_p, absorbit de o fază a motorului, trebuie să fie mai mic decît valoarea maximă admisă de încălzirea înfășurărilor și de rețeaua de alimentare.

Pentru a aprecia condițiile de pornire la un motor asincron trifazat, se folosesc coeficienții $\frac{I_p}{I_n}$, $\frac{M_p}{M_n}$ și t_p (durata pornirii, adică timpul scurs de la conectare pînă la atingerea turației nominale), a căror valoare este precizată în STAS 1764/1970.

La pornire $n = 0$ deci $s = 1$. Curentul de pornire (cu neglijarea lui I_{10} față de I_1 din figura 6-55, adică $I_1 = I'_2$) se calculează cu (6-93), iar cuplul de pornire cu (6-102), făcînd $s = 1$, obținîndu-se:

$$I_p = I_{1p} \simeq I'_{2p} = \frac{U_1}{(R'_2 + R')^2 + (X_1 + X'_{20})^2},$$

$$M_p = \frac{3p\, U_1^2 (R'_2 + R')}{2\pi f_1 [(R'_2 + R')^2 + (X_1 + X'_{20})^2]}. \qquad (6\text{-}106)$$

Cea mai simplă și sigură metodă de pornire este pornirea prin conectare directă la rețea, ea constînd din conectarea (manuală sau automată) directă a înfășurării statorice la rețeaua trifazată de alimentare. Pornirea are loc rapid (t_p este mic), însă cu șocuri mari de curent care determină șocuri dinamice în elementele de transmisie, precum și căderi mari de tensiune care perturbă funcționarea celorlalți consumatori; din aceste motive, această pornire se aplică în cazul motoarelor de putere nominală P_n relativ mică, fiind necesară condiția $P_n < (25-30)\,\%$ din puterea transformatorului ce alimentează secția, atelierul etc. Metoda se aplică motoarelor asincrone cu colivie ce acționează: ventilatoare, pompe, polizoare, mașini-unelte de prelucrare prin așchiere sau deformare etc., a căror puteri nu depășesc 10 kW.

În scopul îmbunătățirii condițiilor de pornire prin conectare directă la rețea se construiesc motoare asincrone cu rotorul în scurtcircuit fie cu bare înalte fie cu dublă colivie (una de pornire și alta de lucru).

O metodă folosită în mod obișnuit la motoarele alimentate cu tensiune joasă (220/380 V) și care au, la funcționarea normală, fazele statorice conectate în triunghi, este pornirea prin comutator stea-triunghi. Toate cele 6 capete ($A-X$, $B-Y$ și $C-Z$) ale fazelor statorice trebuie să fie scoase la cutia de borne. Un motor asincron trifazat, cu impedanța Z_f pe fiecare fază statorică, conectat la o rețea trifazată cu tensiunea între faza U (tensiune de linie), absoarbe la pornirea un curent de linie:

— la conexiunea stea: $I_{p\lambda} = I_{p\lambda f} = \frac{V}{\sqrt{3}\, Z_f}$,

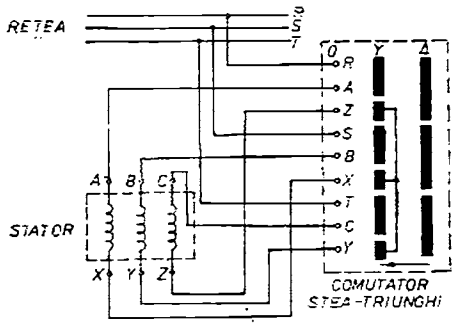


Fig. 6-60

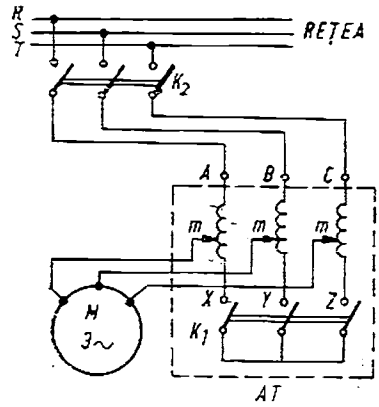


Fig. 6-61

— la conexiunea triunghi: $I_{p\Delta} = \sqrt{3}\, I_{p\Delta f} = \sqrt{3}\, \frac{U}{Z_f}$,

de unde rezultă că la pornirea în stea, curentul de pornire absorbit de la rețea I_{pY} (care e și curent pe fază I_{pYf}) este de 3 ori mai mic decît în cazul pornirii cu fazele statorice conectate în triunghi, $I_{p\Delta}$ (care e $\sqrt{3}$ ori curentul pe fază $I_{p\Delta f}$). Trebuie remarcat însă faptul că la conexiunea stea tensiunea pe fază este de $\sqrt{3}$ ori mai mică decît la conexiunea triunghi și conform (6-106) cuplul de pornire este de 3 ori mai mic. Din acest motiv metoda se folosește la motoarele asincrone ce pornesc în gol sau cu sarcini reduse.

În figura 6-60 este prezentată schema de principiu a unui comutator stea-triunghi, acționat manual. Deplasarea contactelor mobile pe contactele fixe, la care sînt legate începuturile A, B, C și sfîrșiturile X, Y, Z ale fazelor statorice, precum și conductoarele R, S, T de la rețeaua de alimentare, se face conform săgeții, realizîndu-se poziția: 0 (repaus); Y — cînd fazele statorice sînt conectate în stea și Δ — fazele în triunghi.

O altă metodă de pornire este cea prin autotransformator, conform schemei din figura 6-61. Pentru pornire se închide întreruptorul K_1, iar apoi K_2, reglîndu-se (în sens crescător) tensiunea de alimentare a statorului, prin deplasarea cursoarelor m spre capetele (începuturile) A, B, C ale înfășurărilor fazele autotransformatorului trifazat AT. Cînd aceste cursoare ajung „sus", motorului i se aplică direct tensiunea rețelei, putîndu-se deschide întreruptorul K_1, pentru ca înfășurările autotransformatorului să nu mai fie parcurse de curent. Acționarea cursoarelor m se poate face manual sau automat.

Prin micșorarea tensiunii aplicate statorului, la pornire, scade curentul I_p, dar scade și cuplul de pornire (care depinde de pătratul tensiunii). Se recomandă în cazul acționării instalațiilor cu cuplu rezistent scăzut la turație mică.

O limitare a curentului de pornire (dar și o micșorare a cuplului M_p), tot datorită micșorării tensiunii ce se aplică înfășurării statorice, se obține și la pornirea prin introducerea unor reactanțe X_s sau rezistențe R_s în serie cu fazele statorice. Tensiunea ce se aplică fazelor statorului este mai mică decît tensiunea rețelei, cu căderea de tensiune de pe X_B, respectiv R_B. Curentul și cuplul de pornire, pentru un motor în colivie (sau $R' = 0$) se scriu:

— la introducerea reactanțelor X_s:

$$I_{pX} = \frac{U_1}{\sqrt{R_2'^2 + [X_1 + X_s) + X_{20}']^2}}, \quad M_{pX} = \frac{3pR_2' U_1^2}{2\pi f_1 \{R_2'^2 + [(X_1 + X_s) + X_{20}']^2\}};$$

— la introducerea rezistențelor R_s:

$$I_{pR} = \frac{U_1}{\sqrt{(R_s + R_2')^2 + (X_1 + X_{20}')^2}}; \quad M_{pR} = \frac{3p(R_2' + R_s)\, U_1^2}{2\pi f_1 [(R_2' + R_s)^2 + (X_1 + X_{20}')^2]}.$$

Toate metodele de pornire prezentate mai sus se pot aplica atît motoarelor cu rotorul în scurtcircuit (colivie) cît și celor cu rotorul bobinat (inele). Cu toate acestea, motorul cu inele se pornește aproape în exclusivitate cu ajutorul rezistențelor R introduse pe fiecare fază a rotorului. În figura 6,62, *a* este prezentată schema de principiu a acestei metode de pornire, în care motorul cu inele a fost reprezentat simbolic conform STAS (K, L, M — bornele rotorice, U, V, W — bornele statorice). Caracteristicile $M = f(s)$ ridicate pentru patru valori ale rezistenței de pornire, R_{p1}, ..., R_{p4} valori raportate la stator) precum și caracteristica naturală ($R_p = 0$) sînt prezentate în figura 6-62, *b*.

La pornire (închiderea lui K), pe o fază a rotorului este introdusă rezistența maximă R_{p4} în serie cu R_2 (rezistența înfășurării fazei rotorice), punctul de funcționare fiind în *a* (la $s = 1$). Acestui punct îi corespunde cuplul maxim de pornire $M_{p\,max}$. Crescînd turația n, scade s deci *a* se deplasează pînă în *b*, unde $M = M_{p\,min}$. Acum se scoate prima treaptă R_{T1} prin scurtcircuitarea ei (adică închiderea contactelor C_1). Scoaterea lui R_{T1} se face instan-

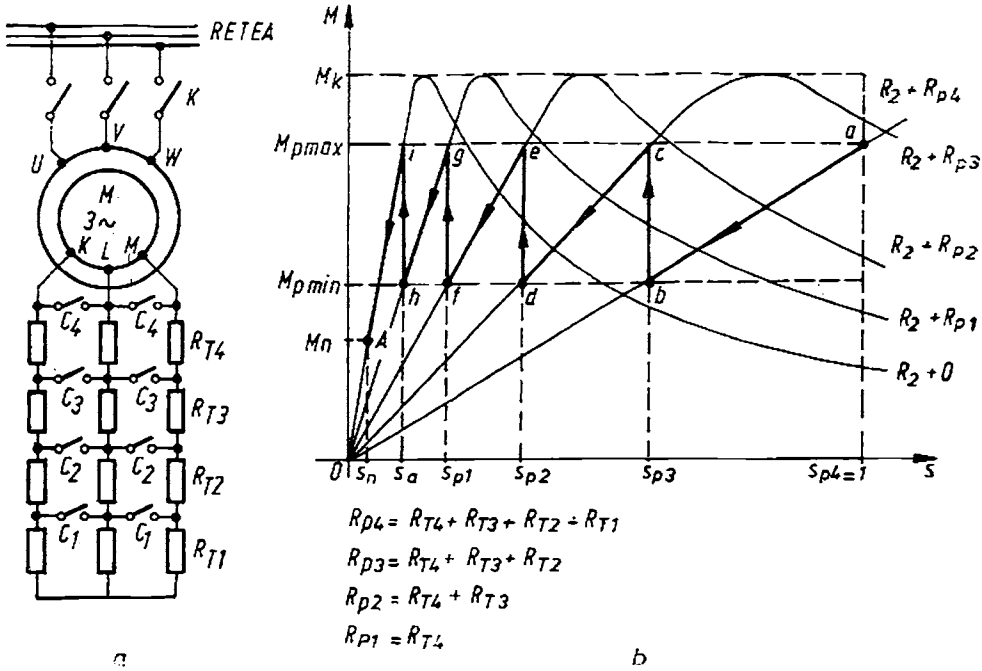


Fig. 6-62

taneu, astfel că n și s rămîn constante în acest timp, punctul de funcționare trecînd din b în c, pe caracteristica artificială corespunzătoare rezistenței $R_2 + R_{p3}$. Procesul se continuă pînă ce în final, punctul de funcționare se stabilește în A, corespunzător cuplului și turației (respectiv alunecării) nominale. Acest punct A se află pe caracteristica naturală corespunzătoare rezistenței R_2, adică este scoasă și ultima treaptă R_{T4}.

Scurtcircuitarea treptelor R_{T1},..., R_{T4} ale reostatului de pornire (închiderea contactelor C_1, ..., C_4) se poate face cu ajutorul contactelor comandate de relee de timp ori de curent, sau cu ajutorul unor așa-numite *controlere*.

Limitele între care variază cuplul de pornire M_p se aleg ambele mai mari decît cuplul nominal M_n, dar mai mici ca M_k. În general se ia $M_{p\,min} = (1{,}1-1{,}3)\ M_n$, respectiv $M_{p\,max} = (1{,}5\sim 2)\ M_n$.

6.3.9. Reglarea turației motoarelor asincrone trifazate

Motorul asincron trifazat are o caracteristică mecanică $n = f(M)$ dură (rigidă), adică turația variază puțin cu sarcina la arbore (cu M) așa cum rezultă din figura 6-58. Din acest motiv, motorul asincron trifazat este utilizat, în general, la acționări electromecanice care funcționează la turație relativ constantă ($n = const.$). Totuși, apare deseori necesitatea modificării (reglării) turației motorului asincron trifazat între anumite limite, la cuplu rezistent M_r constant. Unele posibilități de reglare a turației motorului asincron trifazat rezultă din expresia alunecării:

$$s = \frac{n_1 - n}{n}, \text{ adică } n = n_1(1-s) = \frac{60 f_1}{p}(1-s). \qquad (6\text{-}107)$$

Din expresia (6-107) a lui n, rezultă că reglarea turației este posibilă acționînd asupra unuia din cei trei parametri:

— frecvența f_1 a tensiunii cu care se alimentează statorul;

— numărul perechilor de poli p, același în stator și rotor;

— alunecarea s a motorului.

Modificarea turației prin intermediul lui f_1 rezultă și din caracteristicile mecanice artificiale (v. fig. 6-59, *c*) reprezentate în figura 6-63 pentru două frecvențe f_1' și f_1'' diferite de cea nominală f_{1n} (caracteristica naturală). Se vede că la același cuplu rezistent (la arbore) M_r, turațiile sînt diferite (n', n și n'' corespunzătoare punctelor A', A și A''), pentru frecvențe diferite ($f_1'' < f_{1n} < f_1'$).

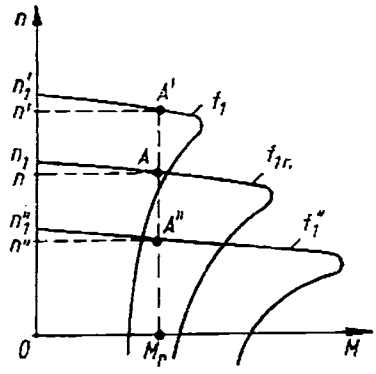


Fig. 6-63

Acest procedeu este economic din punctul de vedere al consumului suplimentar de energie de către motor, necesită însă investiții suplimentare pentru sursa trifazată de putere, cu frecvența f_1 variabilă. Asemenea surse sînt: generatoare sincrone antrenate de motoare cu turație reglabilă, convertizoare ionice, convertizoare cu tiristoare.

Modificarea turației prin schimbarea numărului perechilor de poli se poate aplica numai la motoarele construite special în acest scop, fiind denumite și motoare cu două sau mai multe turații. Asemenea motoare au în stator

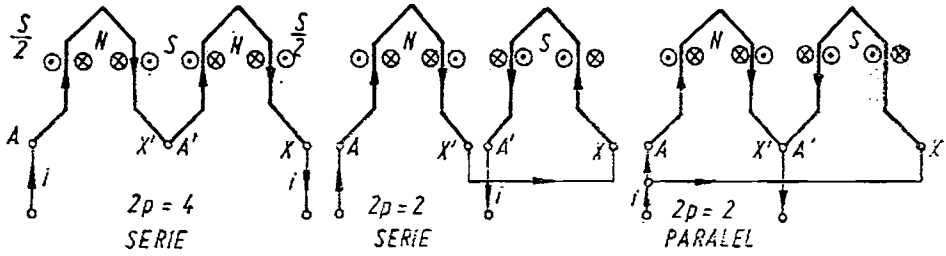


Fig. 6-64

una sau două înfășurări distincte. În cazul unei singure înfășurări aceasta este cu prize mediane, astfel că pe fiecare fază apar două semibobine (AX' și $A'X$) ce pot fi legate în diverse moduri între ele, realizîndu-se diferite numere de poli ($2p$) așa cum rezultă din figura 6-64. Toate cele 4 borne (A, X', A' și X) ale unei faze statorice trebuie să fie scoase la cutia de borne iar conexiunile corespunzătoare se realizează cu un comutator. Caracteristici mecanice artificiale, $n = f(M)$ pentru $p_1 = 4$ și $p_2 = 2$ sînt prezentate calitativ în figura 6-65, de unde rezultă că la același cuplu rezistent M_r, se obțin turații diferite la număr de perechi de poli diferit (punctele de funcționare A și B).

O altă metodă de reglare a turației constă în modificarea tensiunii de alimentare. Această posibilitate rezultă din caracteristicile mecanice artificiale $n = f(M)$ cînd parametrul este U_1 (v. fig. 6-59, *b*). Asemenea caracteristici, pentru trei tensiuni ($U_{1n} > U_1' > U_1''$) sînt prezentate calitativ în figura 6-66, de unde rezultă că la același cuplu rezistent M_r se obțin turații diferite ($n_n > n' > n''$) la tensiuni de alimentare diferite. De remarcat că tensiunea $U_1 < U_{1n}$, ceea ce face $n < n_n$ dar tot timpul mai mare ca n_k. Acest procedeu se aplică foarte rar, fiind neeconomic.

Un procedeu de reglare a turației ce se poate aplica numai motoarelor asincrone cu rotorul bobinat, constă în introducerea de rezistențe R în serie cu fazele rotorului. În figura 6-67 sînt prezentate calitativ caracteristica mecanică naturală ($R = 0$) și două caracteristici artificiale ($R_{II} > R_I$) parametru fiind R (v. fig. 6-59, *a*). Se vede că la cuplu rezistent M_r constant, se obțin turații diferite ($n_n > n_I > n_{II}$), la valori diferite ale lui R.

Mai există și alte metode de modificare a turației motorului asincron trifazat cu rotor bobinat, cum ar fi: prin alimentarea dublă a motorului asincron (atît în stator cît și în rotor) sau prin montajul în cascadă al motoarelor asincrone (v. „Acționări electrice").

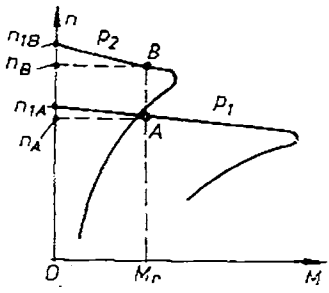


Fig. 6-65

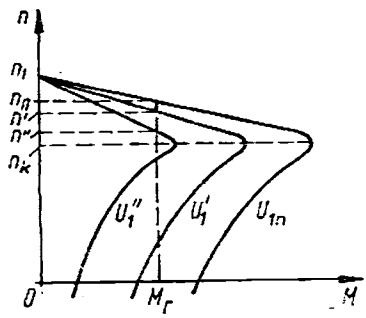


Fig. 6-66

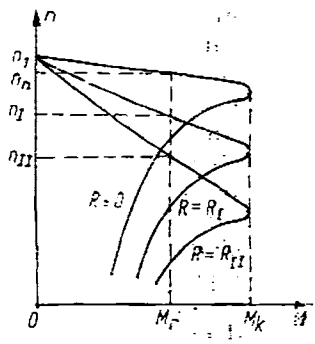


Fig. 6-67

6.3.10. Frînarea mașinii asincrone trifazate

În cazul *frînării propriu-zise* cu mașina asincronă, turația (n) este de sens contrar turației cîmpului magnetic învîrtitor (n_1), mașina absorbind putere de la rețea și dezvoltînd un cuplu M, de sens contrar sensului de rotire al rotorului.

Considerînd drept sens de referință (sens pozitiv) sensul lui n_1, se poate scrie alunecarea s, în cazul frînării propriu-zise, sub forma:

$$s = \frac{n_1 - (-n)}{n_1} = \frac{n_1 + n}{n_1} \Rightarrow s > 1.$$

Pe lîngă regimul de frînare propriu-zisă, există și posibilitatea (în anumite condiții) ca motorul asincron, trecînd în regim de generator, deci $s < 0$ (cu sau fără recuperare de energie), să dezvolte un cuplu electromagnetic care să ducă la frînarea mecanismului antrenat de motor.

În practică au fost concepute și studiate diferite posibilități de frînare cu mașina asincronă, fiecare prezentînd atît avantaje cît și dezavantaje.

Frînarea prin conectare inversă (denumită și *prin contracurent* sau *contraconectare*) este o metodă ce poate fi realizată în două moduri.

Prima modalitate constă în schimbarea între ele a două faze ale tensiunii de alimentare a statorului și prin aceasta se inversează sensul turației cîmpului magnetic învîrtitor (sensul lui n_1), păstrîndu-se sensul lui n (cel dinaintea schimbării celor două faze), datorită inerției maselor în mișcare. În figura 6-68,*a* este prezentat un motor asincron cu rotorul bobinat, conectat în mod normal la rețea (K_1 închis, K_2 deschis), care acționează un mecanism, cu turația n_A și cuplu $M_r = M_A$. Punctul de funcționare A se află pe caracteristica naturală (fig. 6-68, *b*). Deschizînd K_1 și închizînd K_2 se schimbă între ele două faze. Simultan, se introduce în rotor rezistența R care determină caracteristica artificială *1*, mult căzătoare. În primul moment, datorită inerției maselor în mișcare (mase antrenate de motor), n_A rămîne constantă, punctul de funcționare „sărind" din A în A' pe caracteristica *1'* (simetrica lui *1*, dar corespun-

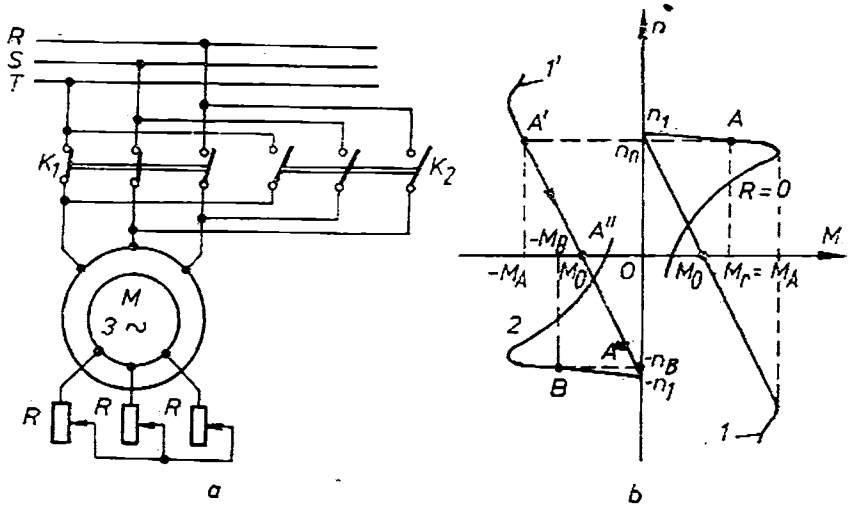


Fig. 6-68

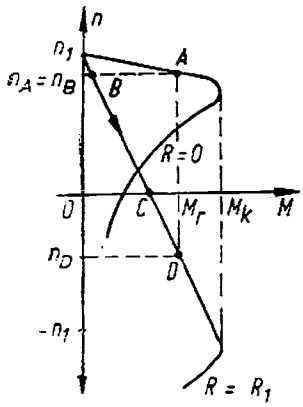


Fig. 6-69

zătoare sensului opus lui n_1). Cuplul $(-M'_A)$ este un cuplu de frînare, n scade pînă în A'', unde $n = 0$. Dacă în A'' motorul nu se deconectează de la rețea, acesta începe să se rotească în sens invers, punctul de funcționare (ca motor acum) deplasîndu-se din A'' și A''', unde se scade R, punctul de funcționare trecînd pe caracteristica mecanică naturală *2* (punctul B) corespunzătoare noului sens de rotire ca motor a mașinii asincrone. Prin această metodă se poate frîna și inversa sensul de rotație al mecanismului antrenat de motor.

A doua modalitate de a obține o frînare propriu-zisă (adică n opus lui n_1) constă în introducerea de rezistențe R în serie cu fazele rotorice, care să aibă asemenea valori încît să determine o caracteristică mecanică artificială la care pentru $n > 0$ să rezulte $M < M_r$ (fig. 6-69). În aceste condiții, punctul de funcționare trece din A în B ($n_A = n_B$ datorită inerției maselor în mișcare), turația n scade ($M < M_r$) pînă la $n = 0$ (în punctul C), cînd motorul poate fi deconectat, în caz contrar punctul de funcționare ajunge în D (unde $M_D = M_r$ și $n_D < 0$).

O altă metodă de *frînare* este cea *prin recuperare de energie* (suprasincronă). La funcționarea ca generator $s < 0$, deci $n > n_1$, punctul de funcționare pe caracteristica mecanică fiind în cadranul II unde cuplul electromagnetic este un cuplu rezistent, de frînare. Acest procedeu poate fi realizat numai dacă mecanismul antrenat are posibilitatea să dezvolte un cuplu la arbore de același sens cu cuplul motor (activ) care să ducă la o turație $n > n_1$. Remarcăm, deci, că prin această metodă motorul (mecanismul acționat) nu poate fi oprit ci numai frînat, frînarea avînd loc la $n > n_1$, deci la turații mari.

Frînarea dinamică este o altă metodă ce constă în următoarele: în timp ce motorul asincron trifazat funcționează normal (punctul A de pe caracteristica mecanică naturală) se deconectează fazele statorului de la rețeaua trifazată și se alimentează cu o tensiune continuă (în curent continuu I_c), după una din schemele din figura 6-70. Curentul continuu I_c din înfășurarea statorică, creează, de-a lungul întrefierului, un cîmp magnetic alternativ în spațiu dar constant în timp. Cum, datorită inerției maselor în mișcare, în primul moment rotorul se rotește cu turația n_A, rezultă că acest cîmp magnetic (determinat de I_c) constituie un cîmp magnetic învîrtitor cu turația n_A față de rotor, el inducînd în fazele rotorului tensiuni electromotoare, respectiv curenți alternativi. Mașina asincronă a devenit, în aceste condiții, generator și, ca urmare, cuplul său este un cuplu de frînare, se opune lui n_A și face ca n_A să devină zero, mașina oprindu-se. Este o metodă de frînare eficace, dar mai complexă și mai neeconomicoasă decît celelalte, fiind necesară o sursă suplimentară de tensiune continuă și putere corespunzătoare.

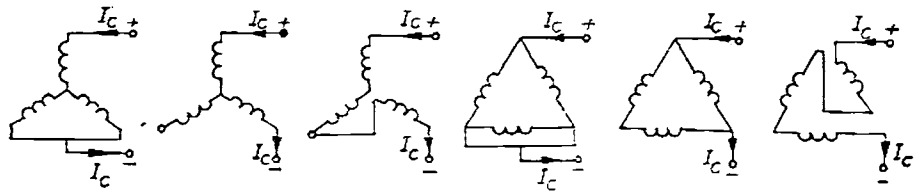


Fig. 6-70

Frînarea prin alimentarea statorului în monofazat *(frînarea subsincronă)* este o altă metodă de frînare, ce are loc la turații mai mici decît cea sincronă și care constă în următoarele: motorul asincron trifazat, alimentat de la rețeaua trifazată, funcționînd normal, este deconectat de la această rețea și apoi, înfășurarea statorică este alimentată cu o tensiune sinusoidală, legînd fazele după una din schemele prezentate în figura 6-70, ea devenind o înfășurare monofazată. După cum se știe (v. 4.4.2.), o înfășurare monofazată parcursă de un curent sinusoidal creează un cîmp magnetic oscilant care poate fi descompus în două cîmpuri magnetice învîrtitoare, de sensuri opuse. Acestor cîmpuri le corespund două cupluri electromagnetice: M_d — de sens direct și M_i — de sens invers, fiecare căutînd să imprime rotorului turația corespunzătoare (n_d respectiv n_i). Cum la momentul alimentării în monofazat, rotorul are turația n (de același sens ori cu n_d ori cu n_i), rezultă că unul din cupluri (M_d sau M_i) va fi cuplu motor căutînd să mențină turația n, cîtă vreme celălalt va fi un cuplu rezistent, frînînd rotorul (mecanismul antrenat de motor). Acest procedeu de frînare este aplicat la mecanismul de ridicare-coborîre al mașinilor de ridicat.

6.3.11. Motorul asincron monofazat

Se construiește pentru puteri mici și foarte mici (micromotoare sub 0,5 kW), în general cu rotorul în scurtcircuit, avînd marele avantaj că se alimentează de la o sursă monofazată. Părțile componente sînt aceleași ca la cel trifazat, cu deosebire că înfășurarea statorică este monofazată și ocupă circa 2/3 din ancosele (crestăturile) statorice, restul de 1/3 fiind goale, sau în ele se așază o înfășurare auxiliară, cu rol la pornire.

Alunecările corespunzătoare celor două cîmpuri magnetice învîrtitoare de sensuri opuse (în care se poate descompune cîmpul magnetic oscilant produs de înfășurarea monofazată — v. 4.4.2.) sînt:

$$s_d = \frac{n_1 - n}{n_1}, \tag{6-108}$$

$$s_i = \frac{-n_1 - n}{-n_1} = \frac{n_1 + n}{n_1} = \frac{n_1 + n + (n_1 - n_1)}{n_1} = \frac{2n_1}{n_1} - \frac{n_1 - n}{n_1} =$$

$$= 2 - s_d = 2 - s.$$

Se vede că: la $s = 0$ se obține $s_i = 2$; la $s = s_d = 1$, $s_i = 1$, iar la $s = s_d = 2$, $s_i = 0$.

Pe baza relațiilor (6-102), ținînd seama că motorul are acum o fază și nu trei, se poate scrie cuplul electromagnetic rezultant $M = M_d - M_i$ sub forma:

$$M = \frac{pU^2}{2\pi f_1}\left[\frac{\frac{R_2' + R'}{s}}{\left(\frac{R_2' + R'}{s}\right)^2 + (X_1 + X_{20}')^2} - \frac{\frac{R_2' + R'}{2 - s}}{\left(\frac{R_2' + R'}{2 - s}\right)^2 + (X_1 + X_{20}')^2}\right]. \tag{6-109}$$

Cele trei cupluri M_d, M_i și M, ca funcții de alunecare $s = s_d$, sînt reprezentate în figura 6-71. Se vede, din (6-109) și figura 6-71, că motorul asincron

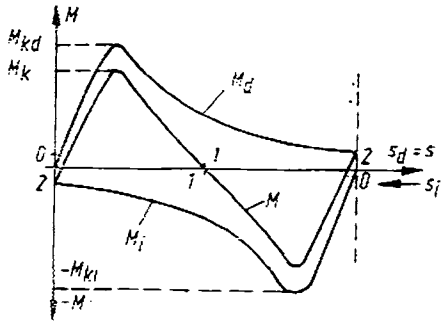


Fig. 6-71

nu are cuplu de pornire ($M_p = 0$) căci la $s = 1$ (pornire) $M = 0$. De asemenea, motorul asincron monofazat nu are un sens de rotație, determinat, putînd funcționa în ambele sensuri, ceea ce înseamnă că nu are regim de frînă.

Pentru pornirea motorului asincron monofazat se folosesc diferite procedee. La cele de puteri mici, manual se dă un impuls mecanic de rotire a rotorului, în sensul dorit, realizînd în acest fel $s \neq 1$, rotorul intrînd sub influența cuplului rezultant (diferit de zero pentru $s \neq 1$) corespunzător sensului de rotire imprimat manual. La motoarele cu puteri mai mari, în cele 1/3 crestături libere din stator se prevede o înfășurare auxiliară A (fază auxiliară) alimentată de la aceeași rețea monofazată de tensiune U, ca și înfășurarea principală care e parcursă de curentul I (fig. 6-72, *a*). În figura 6-72, *b* sînt prezentate caracteristicile $M = f(s)$ în cazul motorului cu fază auxiliară. Curba *a* reprezintă cuplul de sens direct, cînd în stator este conectată numai înfășurarea principală, cuplu ce este zero la $s = 1$. Cînd în stator este conectată faza auxiliară A (parcursă de curentul I_a), avînd în serie numai capacitatea C_a, se obține curba *b*, motorul avînd cuplul diferit de zero la $s = 1$ (pornire). Această curbă corespunde funcționării motorului cu faza auxiliară, în regim permanent.

Dacă se conectează și C_p (condensator de pornire), atunci la $s = 1$ motorul dezvoltă cuplul M_p (curba *c*). La o valoare corespunzătoare a lui C_p se obține $M_p > M_n$. Pe măsură ce crește n, scade s, deci P_0 se deplasează spre P_a cînd se deconectează C_p (se deschide K), punctul de funcționare „sărind" în P_b (pe caracteristica *b*) și de aici ajunge în P (punctul nominal de funcționare), unde $M = M_n$ și egal cu cel rezistent, iar alunecarea $s = s_n$.

Inversarea sensului de rotație al motorului asincron monofazat cu fază auxiliară se realizează prin inversarea legăturilor la rețea a uneia dintre cele două înfășurări (principală sau auxiliară).

La motoare asincrone monofazate de putere mică (sub 150 W), înfășurarea monofazată principală din stator se execută simplificat, sub formă de

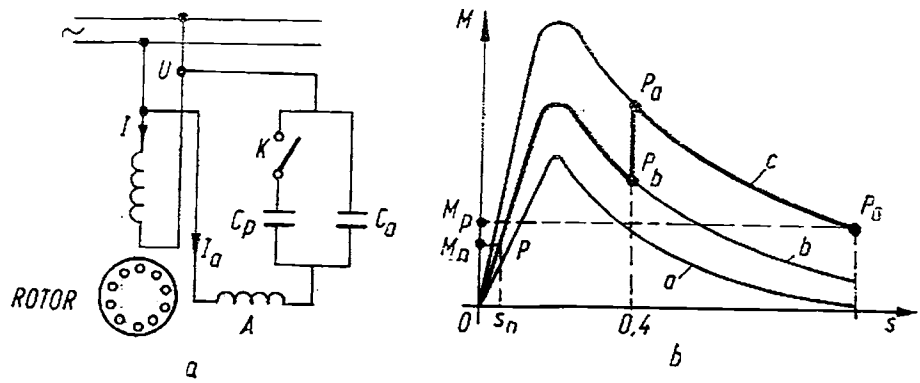


Fig. 6-72

bobine concentrate plasate pe poli proeminenți (fig. 6-73). Rolul înfășurării auxiliare îl are spira în scurtcircuit S_p, care ecranează magnetic o parte din suprafața polului. Acest tip de motor se numește cu poli ecranați. La un asemenea motor, inversarea sensului de rotație nu este posibilă decît prin modificări constructive.

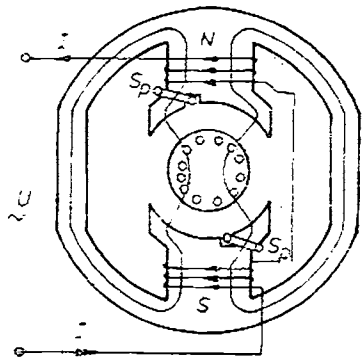


Fig. 6-73

Motorul asincron monofazat se folosește în acționări de mică putere, la care în general nu se necesită cuplu de pornire relativ mare. Este utilizat la: mașini de găurit manuale, pompe centrifuge mici, aparate muzicale și dentistice, ventilatoare, polizoare, ferăstraie, alte mașini-unelte și de calcul, mașini casnice (frigidere, aspiratoare de praf, „mixer"-e, mașini de spălat etc.).

6.4. MAȘINA SINCRONĂ

Mașina sincronă este o mașină electrică rotativă cu înfășurarea statorică conectată la o rețea de curent alternativ, iar cea rotorică (care face parte din inductor) la una de curent continuu. Turația mașinii sincrone este constantă, egală cu turația de sincronism n_1, indiferent de regimul de funcționare (regim stabilizat) și independent de valoarea sarcinii. De aici și denumirea de mașină sincronă.

Turația de sincronism n_1 are expresia cunoscută de la mașina asincronă, adică:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p}, \tag{6-110}$$

f_1 fiind frecvența rețelei la care este conectată înfășurarea statorică, iar p — numărul perechilor de poli ai mașinii, același în stator și rotor.

Există mașini sincrone, de puteri relativ mici, la care polii rotorici sînt constituiți din magneți permanenți.

Mașina sincronă este reversibilă, regimul de bază fiind însă cel de generator, mașina numindu-se în acest caz și *alternator*. Generatoarele sincrone mari, de tip industrial, se clasifică, după tipul mașinii primare (a agregatului care le antrenează), în: turbogeneratoare și hidrogeneratoare.

Turbogeneratoarele sînt antrenate de turbine cu abur, gaze sau motoare diesel și funcționează la viteze mari, $n_1 = (1\,500 \div 3\,000)$ rot/min. Au număr mic de poli, cei rotorici fiind poli înecați (rotorul este monobloc cilindric, prevăzut cu crestături rotorice), adică se asigură un întrefier δ constant, iar arborele este orizontal.

Hidrogeneratoarele au ca mașină primară o turbină hidraulică, turația în acest caz fiind de cîteva sute de rot/min, iar numărul polilor este mai mare. Au polii rotorici proeminenți (ca și polii statorici ai mașinii de curent continuu), întrefierul δ nemaifiind constant de-a lungul circumferinței interioare a statorului. Arborele este de obicei vertical.

Înfășurarea rotorică de curent continuu poate fi alimentată în mai multe moduri:

— de la un generator de curent continuu avînd axul comun cu al mașinii sincrone, denumit *excitatrice* proprie;

— de la un generator de curent continuu antrenat separat de o mașină primară, denumit excitatrice separată;

— de la un grup convertizor static de redresare;

— de la înseși bornele generatorului sincron (autoalimentare), prin intermediul unor transformatoare și instalații de redresare cu diode sau tiristoare.

Puterea sursei necesară excitației (alimentării înfășurării rotorice) reprezintă în general (1—5)% din puterea mașinii sincrone, iar tensiunea (50—300) volți.

Motoarele sincrone sînt folosite mai ales în acționările electromecanice unde sînt necesare puteri mari (peste 200 kW) și turații constante: pompe, compresoare și ventilatoare, acționări principale la laminoarele nereglabile continue etc., precum și la îmbunătățirea factorului de putere (compensator sincron).

6.4.1. Elemente constructive ale mașinii sincrone

Ca orice mașină electrică rotativă, și cea sincronă se compune din două părți principale: statorul și rotorul. Rotorul este în general inductor, iar statorul indus (mașină sincronă în construcție normală). La puteri mici sau în construcție specială, rotorul este indus iar statorul — inductor (mașină sincronă în construcție specială). În cele ce urmează va fi studiată mașina sincronă în construcție normală.

Statorul mașinii sincrone nu diferă practic de cel al mașinii asincrone, avînd aceeași înfășurare.

Rotorul mașinii sincrone diferă de cel al mașinii asincrone și de curent continuu. Înfășurarea rotorică *(înfășurare de excitație)* este alimentată în curent continuu, prin intermediul a două perii (ce aparțin statorului) ce calcă pe două inele colectoare la care sînt legate capetele înfășurării și care se rotesc odată cu rotorul și înfășurarea rotorică.

După forma constructivă a miezului rotoric se disting: rotorul *cu poli proeminenți (aparenți)* și cel cu *poli înecați* (plini sau netezi).

În figura 6-74, *a* este prezentată o secțiune prin mașina sincronă cu 6 poli aparenți, iar în figura 6-74, *b* prin cea cu 2 poli înecați. Pentru simplificare, înfășurarea statorică trifazată s-a reprezentat prin cîte o bobină, formată dintr-o singură spiră, pentru fiecare fază ($AX—BY—CZ$).

Miezul rotoric cu poli aparenți (fig. 6-74, *a*) este format din cei 6 poli N, S, cu piese polare (*a*), fixați de butucul (jugul) rotorului (*b*) prin buloane sau pene. Pe poli se află bobinele (*c*) legate în serie și parcurse de același curent continuu de excitație, I_e, într-un astfel de sens încît polaritatea polilor să alterneze (N, S, N, ...) la periferia rotorului. Alimentarea bobinelor de excitație se face prin intermediul inelelor colectoare (d_1) și (d_2), pe care calcă periile colectoare (e_1) și (e_2). Se vede că la acest tip de rotor întrefierul δ, de-a lungul pasului polar τ_p, nu este constant, el fiind mic și practic constant sub piesele polare și foarte mare în rest. Forma pieselor polare (*a*) este astfel realizată încît să se obțină o repartiție a cîmpului magnetic din întrefier cît mai sinusoidală în spațiu. Liniile cîmpului magnetice produs de înfășurarea de excitație rotorică (notate cu *f*) se închid prin: butucul rotorului, polii și piesele polare, întrefier și miezul statoric.

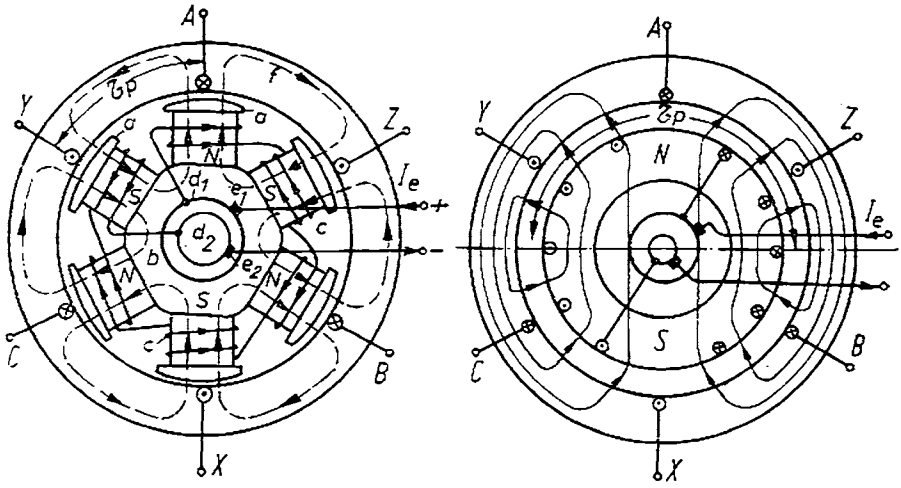


Fig. 6-74

Miezul rotorului cu poli înecați (fig. 6-74, *b*) este realizat dintr-un bloc cilindric de oțel special (Cr—Ni—Mo) de mare rezistență mecanică. La periferia acestui cilindru, după generatoarele acestuia, se frezează crestături (ancose) în care se așază conductoarele înfășurării de excitație (rotorice). Înfășurarea rotorică din figura 6-74, *b*, parcursă de I_e determină 2 poli, ea extinzîndu-se la periferia rotorului, de obicei, de-a lungul a 2/3 din pasul polar τ_p, restul de 1/3 rămînînd liberă (zona din mijlocul polilor). Această zonă este denumită și dinte mare, comparativ cu dinții mici care separă între ele două crestături. La acest tip de mașină (cu poli înecați) întrefierul poate fi considerat practic constant.

Să remarcăm că numărul perechilor de poli rotorici este mai mare în cazul polilor proeminenți, decît la rotorul cu poli înecați.

6.4.2. Principiul de funcționare a generatorului sincron trifazat

Pentru funcționarea mașinii sincrone ca generator, înfășurarea de excitație (rotorică) cu cele N_e spire este alimentată de la o sursă de tensiune continuă, deci străbătută de curentul continuu de excitație I_e, iar rotorul acționat de o mașină primară la turația n_1 (rot/min), deci cu viteza unghiulară $\Omega_1 = 2\pi n_1/60$. Solenația de excitație, pe fiecare pol rotoric, este $N_e I_e/2p$ și ea determină un cîmp magnetic cu o variație alternativă (periodică) de-a lungul circumferinței interioare a statorului. Luînd în considerare numai armonica fundamentală (din descompunerea în serie Fourier a funcției periodice), inducția magnetică din întrefier va avea o variație sinusoidală în spațiu. Acest cîmp magnetic însă este un cîmp magnetic învîrtitor, căci el se rotește odată cu rotorul. Ca urmare, el este sinusoidal în spațiu și, în fiecare punct din întrefier, sinusoidal în timp.

Cîmpul magnetic învîrtitor rotoric determină printr-o spiră a unei înfășurări statorice un flux magnetic Φ_0, cu o variație sinusoidală în timp, adică: $\Phi_0(t) = \Phi_{0m} \sin \omega t$, unde $\omega = p\Omega_1$.

În baza fenomenului inducției electromagnetice, într-o spiră statorică se induce o tensiune electromotoare u_{e0s}, care, conform legii inducției electromagnetice (4-4 *a*), se poate scrie:

$$u_{e0s} = -\frac{d\Phi_0}{dt} = -\omega\Phi_{0m}\cos\omega t = \omega\Phi_{0m}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Înfășurarea unei faze statorice având N spire, bobinate cu un factor de înfășurare k_s, tensiunea electromotoare indusă într-o fază statorică este:

$$u_{e0} = Nk_s u_{e0s} = Nk_s\omega\Phi_{0m}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_{e0m}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Se vede că această tensiune electromotoare indusă este defazată cu $\pi/2$ în urma fluxului magnetic inductor Φ_0 și are valoarea efectivă:

$$U_{e0} = \frac{U_{e0m}}{\sqrt{2}} = \frac{Nk_s\omega\Phi_{0m}}{\sqrt{2}} = \frac{Nk_s 2\pi f_1\Phi_{0m}}{\sqrt{2}} = 4{,}44 f_1 Nk_s\Phi_{0m}. \quad (6\text{-}111)$$

O perioadă T, a tensiunii sinusoidale induse în faza statorului, are loc în timpul rotirii rotorului cu $2\tau_p$. La o rotație completă se parcurg $2p\,\tau_p$ pași polari. Cum unei perioade T îi corespunde parcurgerea a $2\tau_p$ pași polari, frecvența f_1 va fi:

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{2p\,\tau_p\frac{n_1}{60}}{2\tau_p} = \frac{pn_1}{60} \quad (6\text{-}112)$$

și de aici concluzia că, la generatorul sincron, frecvența tensiunilor induse în stator (frecvența rețelei pe care debitează generatorul) se află într-un anumit raport cu turația n_1, cu care este acționat rotorul (turația de sincronism — turația cîmpului magnetic învîrtitor).

Statorul având o înfășurare trifazată (ca la mașina asincronă), adică trei înfășurări monofazate identice ca dimensiuni și număr de spire, dar decalate în spațiu cu $\frac{120}{p}$ grade, în fiecare fază statorică se va induce cîte o tensiune electromotoare. Aceste tensiuni, cu aceeași valoare efectivă U_{e0} dar defazate în timp cu o treime de perioadă $\left(\text{adică } \frac{2\pi}{3} \text{ radiani}\right)$ una față de cealaltă, constituie un sistem de tensiuni trifazat simetric. Acest sistem se poate scrie:

$$u_{e01} = \sqrt{2}\,U_{e0}\sin\omega t,$$

$$u_{e02} = \sqrt{2}\,U_{e0}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\,U_{e0}\sin\omega\left(t - \frac{T}{3}\right),$$

$$u_{e03} = \sqrt{2}\,U_{e0}\sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\,U_{e0}\sin\omega\left(t - 2\frac{T}{3}\right).$$

Cu un asemenea sistem de tensiuni trifazat simetric, mașina sincronă, funcționînd ca generator, poate alimenta un receptor trifazat sau generatorul poate debita energie electromagnetică unei rețele trifazate de la care se alimentează ulterior consumatorii.

6.4.3. Reacția indusului (statorului) la generatorul sincron

Dacă un generator sincron trifazat alimentează un receptor trifazat echilibrat, atunci curenții pe cele trei faze statorice vor constitui un sistem de curenți trifazat simetric ce va determina un cîmp magnetic învîrtitor care se rotește cu turația $n = \frac{60 f_1}{p} = n_1$ (egală cu cea a rotorului și de același sens).

Acesta este cîmpul magnetic al reacției de indus la generatorul sincron trifazat, cîmp care va determina în înfășurările statorice un flux magnetic Φ_r (variabil în timp). Fluxul Φ_r va induce tensiuni electromotoare u_{er} în înfășurările statorice, defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma acestuia. Considerînd mașina ca funcționînd într-un regim magnetic nesaturat, se poate scrie fluxul magnetic rezultant Φ sub forma: $\Phi = \Phi_0 + \Phi_r$, el inducînd tensiunea electromotoare: $\underline{U}_e = \underline{U}_{e0} + \underline{U}_{er}$, defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma sa.

Datorită simetriei, este suficient să fie studiată reacția de indus corespunzătoare unei faze statorice. Tensiunea U la bornele unei faze statorice, fază parcursă de curentul I, este mai mică decît U_e, cu căderile de tensiune ohmică (IR) și inductivă (IX_d), putîndu-se scrie:

$$\underline{U} = \underline{U}_e - (R + jX_d)I = \underline{U}_e - \underline{Z}\underline{I}. \tag{6-113}$$

S-a notat cu R — rezistența electrică a unei faze statorice, cu X_d — reactanța corespunzătoare fluxului de dispersie pentru aceeași fază, iar cu Z impedanța corespunzătoare.

Influența reacției indusului asupra funcționării generatorului sincron depinde de natura consumatorului (ohmic, inductiv, capacitiv), adică în ultima instanță de valoarea factorului de putere. În cele ce urmează, se neglijează căderile de tensiune (acestea fiind cîteva procente din U), precum și influența reacției de indus ($U_{er} \ll U_{e0}$), putîndu-se scrie:

$$\underline{U} = \underline{U}_e = \underline{U}_{e0}. \tag{6-114}$$

La consumator pur ohmic ($\cos\varphi = 1$), curentul $\underline{I}$ este în fază cu $\underline{U} \cong \underline{U}_{e0}$. Fluxul reacției de indus Φ_r fiind în fază cu $\underline{I}$, este un flux transversal, adică are axa perpendiculară (din punct de vedere electric), pe axa longitudinală după care este Φ_0 (Φ_0 este înaintea lui $\underline{U}_{e0}$ cu $\frac{\pi}{2}$, ca flux inductor), așa cum se vede în figura 6-75, *a*. Fluxul rezultant este $\Phi = \Phi_0 + \Phi_r$.

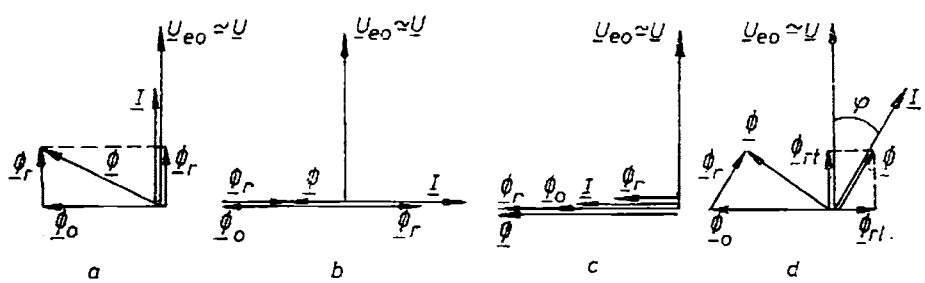


Fig. 6-75

În cazul consumatorului pur inductiv ($\cos \varphi = 0$), curentul $\underline{I}$ este cu $\frac{\pi}{2}$ în urma lui $\underline{U} \cong \underline{U}_{e0}$, rezultînd un flux al reacției de indus $\underline{\Phi}_r$ longitudinal, opus lui $\underline{\Phi}_0$ (fig. 6-75, *b*), care va demagnetiza generatorul. Pentru a menține constant fluxul rezultant $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_0 + \underline{\Phi}_r$, odată cu creșterea lui I, trebuie mărit $\underline{\Phi}_0$, deci curentul de excitație I_e.

Cînd consumatorul este pur capacitiv ($\cos \varphi = 0$), curentul $\underline{I}$ este decalat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii $\underline{U} \cong \underline{U}_{e0}$, rezultînd un flux al reacției de indus longitudinal magnetizant (fig. 6-75, *c*). Acesta înseamnă că același flux rezultant $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_0 + \underline{\Phi}_r$ se poate obține la funcționarea în sarcină (cînd I crește) cu un curent de excitație I_e mai mic.

În practică, asemenea cazuri particulare se întîlnesc mai rar, consumatorii avînd un anumit $\cos \varphi$ (diferit de unu și de zero). În figura 6-75, *d* reprezentăm diagrama pentru cazul unui consumator cu caracter inductiv, adică $\underline{I}$ este în urma lui $\underline{U} \cong \underline{U}_{e0}$ cu unghiul φ. Fluxul reacției de indus se poate descompune în două componente:

— o componentă longitudinală Φ_{r1} demagnetizantă, ea devenind magnetizantă la consumator cu caracter capacitiv, cînd $\underline{I}$ este înaintea lui $\underline{U} \cong \underline{U}_{e0}$ cu unghiul φ;

— o componentă transversală Φ_{rt}.

6.4.4. Diagrama fazorială a generatorului sincron la funcționarea în sarcină

Din punctul de vedere magnetic, există deosebire între mașina sincronă cu poli înecați și cea cu ei aparenți, în sensul că rotorul cu polii aparenți este anizotrop magnetic, avînd reluctanța magnetică după axa longitudinală (axa polilor rotorici care este axa fluxului Φ_0) diferită de cea după axa transversală (axa interpolară ce face $\frac{180}{2p}$ grade cu cea longitudinală). Această diferențiere este cauzată de faptul că de-a lungul circumferinței interioare a statorului, întrefierul δ nu este constant, el fiind mic și practic constant în dreptul polilor rotorici foarte mare pe porțiunea dintre aceștia (v. fig. 6-74, *a*). Din aceste motive, la mașina sincronă cu poli aparenți, se folosesc relații între componentele fazoriale ale curenților, fluxurilor și tensiunilor electromotoare induse, asociate celor două axe, longitudinală și transversală.

Generatorul cu poli înecați

Dacă se notează cu X_r reactanța corespunzătoare fluxului reacției de indus (pentru o fază statorică), denumită și reactanță ciclică a indusului, atunci se poate scrie $\underline{U}_{er} = -\mathrm{j} X_r \underline{I}$. Pentru tensiunea $\underline{U}$, de la bornele fazei statorice (6-113), se obține expresia:

$$\underline{U} = \underline{U}_e - (R + \mathrm{j}\, X_d)\, \underline{I} = \underline{U}_{e0} + \underline{U}_{er} - R\underline{I} - \mathrm{j} X_d \underline{I} = \underline{U}_{e0} - R\underline{I} -$$

$$- \mathrm{j}(X_r + X_d)\, \underline{I} = \underline{U}_{e0} - R\underline{I} - \mathrm{j} X_s \underline{I}, \qquad (6\text{-}115)$$

unde $X_s = X_r + X_d$ este denumită reactanța sincronă a fazei statorice.

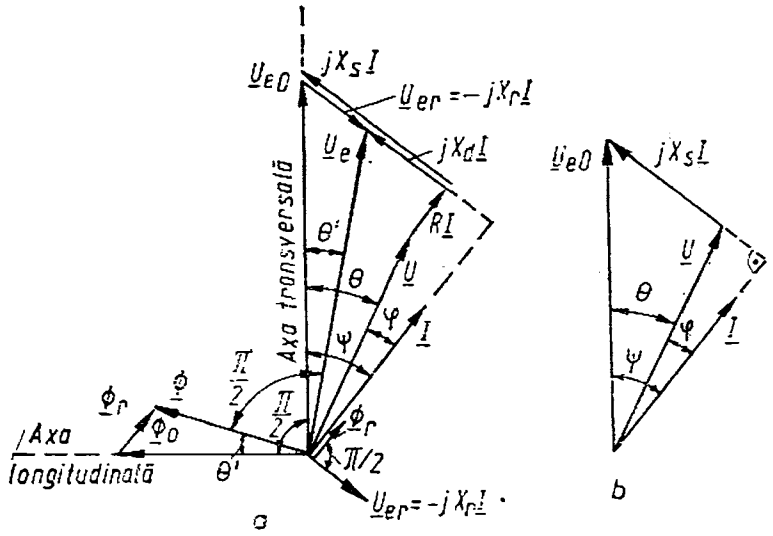


Fig. 6-76

În figura 6-76, *a* este prezentată diagrama fazorială a tensiunilor și fluxurilor corespunzătoare unei faze statorice a generatorului în sarcină, construită conform (6-115). Construcția acestei diagrame se face astfel:

— arbitrar, se fixează $\underline{U}$ și față de aceasta $\underline{I}$, cu φ în urmă (s-a considerat consumator inductiv);

— la $\underline{U}$ se adună $R\underline{I}$ (în fază cu $\underline{I}$) și $jX_d\underline{I}\left(\text{cu } \frac{\pi}{2} \text{ în urma lui } \underline{I}\right)$, obținîndu-se $\underline{U}_e$, conform (6-113);

— din $\underline{U}_e$ se scade $\underline{U}_{er} = -jX_r\underline{I}\left(\text{cu } \frac{\pi}{2} \text{ în urma lui } I\right)$, rezultînd $\underline{U}_{e0}$ conform (6-115), ce face unghiul θ cu $\underline{U}$. Unghiul θ' dintre $\underline{U}_{e0}$ și $\underline{U}_e$, care este și unghiul dintre $\underline{\Phi}_0$ și $\underline{\Phi}_r$, e denumit *unghi de sarcină* sau *unghi intern* al mașinii. Dacă se neglijează căderile de tensiune ohmică RI și inductivă X_dI față de U, atunci $\underline{U} \cong \underline{U}_{e0}$ și $\theta = \theta'$. În aceste condiții, unghiul ψ dintre $\underline{U}_{e0}$ și $\underline{I}$ are valoarea $\psi = \theta + \varphi$. La scrierea relațiilor ce urmează se va considera θ drept unghi intern (de sarcină) al mașinii sincrone;

— cunoscînd poziția lui $\underline{\Phi}_0\left(\text{cu } \frac{\pi}{2} \text{ înaintea lui } \underline{U}_{e0}\right)$ și a lui $\underline{\Phi}_r$ (în fază cu I) se obține fluxul rezultant $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_0 + \underline{\Phi}_r$.

În general căderea ohmică RI dintr-o fază statorică este relativ mică față de U (cca 1%) și se poate neglija față de U, fără a introduce erori sensibile. Cu această neglijare, din diagrama fazorială reprezentată în figura 6-76, *a* se obține una simplificată ca cea din figura 6-75, *b*.

Generatorul sincron cu poli aparenți

Întrefierul δ fiind mic, sub polii de excitație (deci după axa longitudinală) și foarte mare între acești poli (după axa transversală), rezultă o reluctanță magnetică după axa longitudinală mai mică decît cea după axa transversală. Din aceste motive, reactanța de reacție longitudinală X_{r1} va fi mai mare decît

reactanța de reacție transversală X_{rt}. Corespunzător celor două axe, fluxul reacției de indus $\underline{\Phi}_r$ se descompune (v. fig. 6-75, *d*) în două componente:

$$\underline{\Phi}_r = \underline{\Phi}_{rl} + \underline{\Phi}_{rt}, \tag{6-116}$$

fiecare inducînd cîte o tensiune electromotoare în fazele statorice, tensiuni ce se pot scrie:

$$\underline{U}_{erl} = -\,\mathrm{j}X_{rl}\underline{I}_l \text{ și } \underline{U}_{ert} = -\,\mathrm{j}X_{rt}\underline{I}_t, \tag{6-117}$$

unde, $I_t = I \sin \psi$ și $I_t = I \cos \varphi$ reprezintă componentele curentului I, după ce două axe ($\underline{I} = \underline{I}_l + \underline{I}_t$).

Cu acestea, relația (6-113) ia forma:

$$\underline{U}_e = \underline{U}_{e0} + \underline{U}_{er} = \underline{U}_{e0} + \underline{U}_{erl} + \underline{U}_{ert} = \underline{U}_{e0} - \mathrm{j}X_{rl}\underline{I}_l - \mathrm{j}X_{rt}\underline{I}_t, \tag{6-118}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_e - R\underline{I} - \mathrm{j}X_d\underline{I} = \underline{U}_e - R\underline{I} - \mathrm{j}X_d(\underline{I}_1 + \underline{I}_t) = \underline{U}_{e0} - R\underline{I} - \mathrm{j}X_l\underline{I}_l - \mathrm{j}X_t\underline{I}_t,$$

unde s-au folosit notațiile:

$X_l = X_{rl} + X_d$ — reactanța sincronă longitudinală;

$X_t = X_{rt} + X_d$ — reactanța sincronă transversală.

Figura 6-77, *a* reprezintă diagrama fazorială a tensiunilor, curenților și fluxurilor (după cele două axe), pentru generatorul sincron cu poli aparenți (proeminenți).

Se consideră cunoscute (din măsurători sau calcule) U, I, φ, R, X_l, X_t și θ construcția diagramei făcîndu-se astfel:

— arbitrar se fixează $\underline{U}$ și față de el $\underline{I}$, la unghiul φ (s-a considerat sarcină inductivă);

— la unghiul θ, înainte față de $\underline{U}$, se duce axa transversală, după care se va găsi și $\underline{U}_{e0}$, devenind cunoscut și unghiul $\psi = \theta + \varphi$. Se descompune $\underline{I}$ în componentele sale ($\underline{I} = \underline{I}_l + \underline{I}_t$), putîndu-se calcula căderile de tensiune

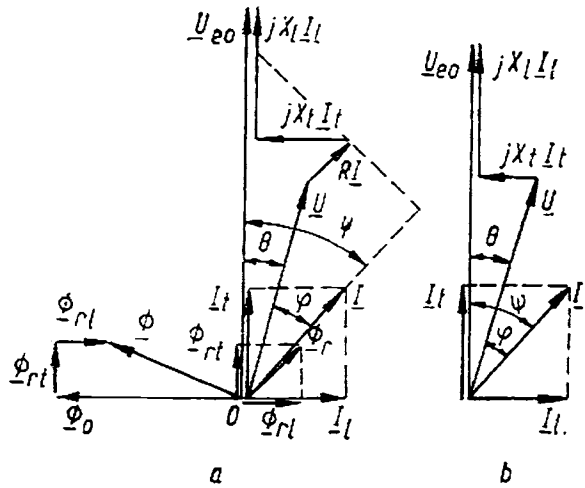


Fig. 6-77

$jX_l\underline{I}_l$, respectiv $jX_l\,\underline{I}_l$ care sînt decalate cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curenților $\underline{I}_l$ respectiv $\underline{I}_l$;

— adăugînd la $\underline{U}$ căderile de tensiune $R\underline{I}$, $jX_l\underline{I}_l$ și $jX_l\underline{I}_l$ se obține, conform (6-118) tensiunea electromotoare $\underline{U}_{e0}$, indusă de Φ_0 (acesta cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea lui $\underline{U}_{e0}$);

— se reprezintă fluxul rezultant:

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_0 + \underline{\Phi}_{rt} + \underline{\Phi}_{rl}.$$

Dacă se neglijează căderea de tensiune ohmică RI față de U, se obține diagrama fazorială simplificată reprezentată în figura 6-77, *b*.

În mod asemănător, se pot construi și diagramele fazoriale ale generatorului sincron cu poli înecați și aparenți pentru cazul cînd generatorul sincron alimentează un consumator cu caracter capacitiv ($\underline{I}$ defazat înaintea lui $\underline{U}$ cu unghiul φ).

6.4.5. Caracteristicile generatorului sincron trifazat

Cele mai importante caracteristici ale unui generator sincron autonom, adică generator ce alimentează singur un receptor, sînt: de funcționare în gol, în sarcină, de scurtcircuit trifazat, externă și de reglaj.

Caracteristica de mers în gol reprezintă dependența dintre U_{e0} și I_e, la $n = n_1 = constant$ și $I = 0$ (fig. 6-78, *a*). Tensiunea electromotoare remanentă U_{e0r}, corespunzătoare lui $I_e = 0$, datorată fluxului remanent de excitație reprezintă (5-10)% din cea nominală U_{e0n} (corespunzătoare lui $I_e = I_{en}$).

Caracteristica în sarcină reprezintă $U = f(I_e)$ la n, I și cos φ mărimi constante. Prezintă importanță caracteristica în sarcină $U = f(I_e)$ pentru $n = n_1$, $I = I_n$ și cos $\varphi = 1$ (sarcină pur inductivă), deoarece aceasta servește la determinarea reactanței de dispersie X_d a fazei statorice.

Caracteristica de scurtcircuit trifazat reprezintă dependența dintre curentul ce străbate o fază statorică ($I = I_{sc}$) și I_e, atunci cînd bornele statorice sînt scurtcircuitate (legate direct împreună, deci $U = 0$), turația fiind cea nominală. Prin I_{sc} se înțelege curentul de scurtcircuit stabilizat, adică cel din regimul permanent de scurtcircuit. Această caracteristică $I_{sc} = f(I_e)$ la $U = 0$ și $n = n_n$ este o dreaptă (fig. 6-78, *b*).

Caracteristica externă reprezintă dependența $U = f(I)$ la n, I_e și cos φ, mărimi constante. Această caracteristică se poate reprezenta în două ipoteze.

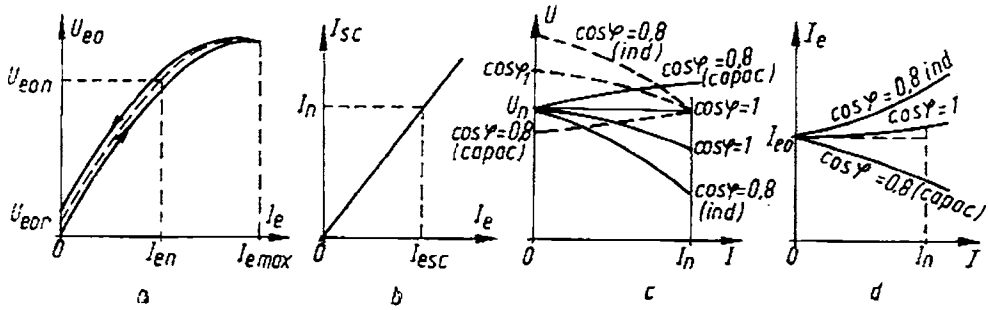


Fig. 6-78

— La funcționarea în gol ($I = 0$), la borne există tensiunea nominală $U_n = U_{e0}$, iar în sarcină, menținînd n și I_e constante, tensiunea la borne se modifică, în sensul că ea crește cu creșterea lui I la sarcini capacitive datorită efectului magnetizant al fluxului reacției de indus sau scade cu creșterea lui I la sarcini inductive (curbele cu linie plină din figura 6-78, *c*);

— La funcționarea în sarcină nominală, cînd $I = I_n$, tensiunea la borne este $U = U_n$, iar la sarcini mai mici ($I < I_n$), tensiunea la borne U va crește sau va scădea față de U_n, funcție de caracterul sarcinii (cos φ) așa ca în fig. 6-78, *c* — curbele punctate.

Caracteristica de reglaj reprezintă dependența $I_e = f(I)$ pentru ca la n și cos φ constante, tensiunea la bornele fazei statorice să se mențină constantă și egală cu cea nominală. Aceste caracteristici depind de natura consumatorului ele fiind reprezentate în figura 6-78, *d*. La sarcină inductivă, cînd U scade cu creșterea lui I, pentru a menține $U = U_n = const.$, trebuie ca odată cu creșterea lui I să crească și I_e, pentru a compensa efectul demagnetizant al reacției de indus. Situația este inversă la sarcină capacitivă.

6.4.6. Randamentul generatorului sincron

Generatorul sincron primește de la mașina sa primară (care acționează rotorul), prin intermediul arborelui, puterea mecanică P_1 și cedează rețelei puterea electromagnetică $P_2 = 3\,UI \cos \varphi$, rezultînd un randament $\eta = P_2/P_1$. Generatoarele sincrone se construiesc așa fel încît la parametri nominali, randamentul să fie maxim. Randamentul generatoarelor sincrone este cuprins între (0,72—0,95) pentru generatoare de puteri (0,3—3) MVA și (0,95—0,99) în cazul celor de (3,5—300) MVA.

Dacă din P_1 se scad pierderile mecanice p_m (prin frecare și ventilație), pierderile în fier p_{Fe} (prin histerezis și curenți Foucault) și pierderile $p_e = I_e^2 R_e$ din înfășurarea de excitație rotorică (considerînd excitatoarea pe același arbore cu rotorul generatorului sincron) se obține puterea electromagnetică interioară P a generatorului sincron, transmisă statorului de către rotor, prin intermediul cîmpului magnetic învîrtitor rezultant din întrefier. Această putere P acoperă pierderile în cupru din înfășurarea statorică $P_{Cu_s} = 3I^2R$ și puterea utilă $P_2 = 3UI \cos \varphi$ adică $P = p_{Cu_s} + P_2$. Cu acestea se poate scrie:
$P_1 = P + p_m + p_{Fe} + p_e = P_2 + p_{Cu_s} + p_m + p_{Fe} + p_e$ rezultînd pentru randament expresia:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - (p_{Cu_s} + p_m + p_{Fe} + p_e)}{P_1}.$$

De remarcat că în rotor nu există pierderi în fier, datorită faptului că rotorul are turația cîmpului învîrtitor, deci fluxul rezultant este fix relativ la rotor.

6.4.7. Cuplul electromagnetic la generatorul sincron

Acesta corespunde puterii electromagnetice $P = p_{Cu_s} + P_2$. Cum în general pierderile în cupru statoric $p_{Cu_s} = 3I^2R$ reprezintă cca 1% din puterea nominală a generatorului, ele se neglijează față de P_2, putîndu-se

scrie: $P = P_2 = 3UI \cos \varphi$. Folosind diagrama fazorială simplificată reprezentată în figura 6-77, *b*, se poate scrie:

$$P = 3UI \cos \varphi = 3\ UI \cos (\Psi - \theta) = 3UI \cos \Psi \cos \theta + 3UI \sin \Psi \sin \theta. \tag{6-119}$$

Din aceeași diagramă mai rezultă:

$$I \cos \Psi = I_t = \frac{U \sin \theta}{X_t} \text{ și } I \sin \Psi = I_l = \frac{U_{e0} - U \cos \theta.}{X_l} \cdot \tag{6-120}$$

Înlocuind (6-120) în (6-119) rezultă pentru puterea electromagnetică P expresia:

$$P = \frac{3U\,U_{e0}}{X_l} \sin \theta + \frac{3}{2} U^2 \frac{X_l - X_t}{X_l X_t} \sin 2\ \theta. \tag{6-121}$$

În cazul generatorului sincron cu poli înecați $X_l = X_t = X_s$ și obținem:

$$P = \frac{3\ U\ U_{e0}}{X_s} \sin \theta. \tag{6-122}$$

Unghiul de sarcină nominal θ_n are valori cuprinse între 20° și 30°.

Cuplul electromagnetic M se poate exprima în funcție de viteza unghiulară Ω și puterea electromagnetică P, sub forma, $M = \frac{P}{\Omega}$ rezultind:

$$M = \frac{P}{\Omega} = \frac{3U\ U_{e0}}{\Omega\ X_l} \sin \theta + \frac{3U^2 (X_l - X_t)}{2\Omega\ X_l\ X_t} \sin 2\ \theta \text{ (cazul polilor aparenți)},$$

$$M = \frac{P}{\Omega} = \frac{3\ U\ U_{e0}}{\Omega\ X_s} \sin \theta \text{ (cazul polilor înecați)}. \tag{6-123}$$

Acesta este cuplul electromagnetic cu care rotorul acționează asupra statorului, tinzînd să-l rotească în sensul turației $n = n_1$. Statorul fiind însă fix, conform principiului acțiunii și reacțiunii, se exercită asupra rotorului un cuplu egal ca mărime și de sens opus, deci M este un cuplu rezistent în cazul generatorului (se opune sensului de rotire).

Dependența dintre cuplul electromagnetic M și unghiul θ este denumită și *caracteristică unghiulară* sau *internă* a generatorului sincron.

6.4.8. Principiul de funcționare a motorului sincron trifazat

În cazul funcționării ca motor, mașina sincronă primește energie electromagnetică atît de la o rețea trifazată, la care sînt conectate fazele statorice, cît și de la o sursă de tensiune continuă, cu care se alimentează înfășurarea de excitație rotorică, cedînd energie mecanică prin intermediul arborelui său mașinii de lucru pe care o antrenează.

Înfășurările fazelor statorice fiind conectate la o rețea trifazată, deci alimentate cu un sistem de tensiuni trifazat simetric, vor fi parcurse de un sistem de curenți trifazat simetric (impedanțele fazelor fiind egale ca mărimi complexe — receptor echilibrat), creînd un cîmp magnetic învîrtitor

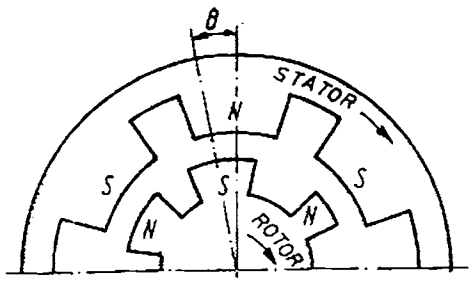


Fig. 6-79

cu turația n_1, în sensul coresppunzător sensului de succesiune a fazelor. Acest cîmp magnetic învîrtitor statoric, din punctul de vedere al efectului său asupra rotorului, este similar cu cîmpul magnetic al unui magnet permanent, ce are forma statorului (cu același număr de poli ca statorul) și care s-ar roti cu turația n_1, antrenînd la aceeași turație și cîmpul său magnetic.

Înfășurarea rotorică fiind alimentată de la o sursă de tensiune continuă este străbătută de curentul de excitație I_e, determinînd un număr de poli rotorici egal cu cel din stator. Și rotorul poate fi considerat ca un magnet permanent, cu același număr de poli ca statorul care alternează la periferia sa.

În figura 6-79, statorul este reprezentat printr-o coroană fictivă de poli aparenți, egali ca număr cu polii coroanei reale a rotorului. Axele polilor statorici și rotorici, care sînt axele lui Φ_0 și Φ, se intersectează între ele, formînd unghiul θ (unghiul de sarcină).

Principiul de funcționare al motorului sincron trifazat se bazează pe interacțiunea electromagnetică dintre stator și rotor, asemănătoare acțiunii dintre doi magneți permanenți (sau doi electromagneți), care au tendința de orientare relativă astfel încît polii magnetici de nume contrar să se situeze față în față, pînă la suprapunerea axelor lor de simetrie magnetică (cînd $\theta = 0$). Polii magnetici de semn contrar (N — stator și S — rotor, respectiv S — stator și N — rotor) își exercită un anumit cuplu mediu, numai dacă aceștia sînt practic față în față ($\theta < \theta_{limită}$), ceea ce presupune că cele două cîmpuri (statoric și rotoric) se rotesc sincron cu aceeași turație de sincronism n_1, deci și rotorul. De aici concluzia că motorul sincron nu are cuplu de pornire, căci la pornire condiția de sincronism nu poate fi îndeplinită, turația n a rotorului fiind mult diferită de cea sincronă. Motorul sincron trebuie adus la turația de sincronism prin mijloace speciale, cum sînt: folosirea unui motor auxiliar, pornirea în asincron. O metodă specială de pornire este cea prin variația frecvenței f_1 a tensiunii de alimentare, progresiv de la (5—10) Hz pînă la 50 Hz.

6.4.9. Diagrama fazorială a motorului sincron trifazat

Păstrînd notațiile folosite în paragrafele anterioare și ținînd seama că tensiunea de alimentare U (tensiunea la bornele unei faze statorice) acoperă căderile de tensiune pe faza respectivă și compensează tensiunea electromotoare indusă de fluxul Φ_0, se poate scrie:

$$\underline{U} = -\underline{U}_{e0} + R\underline{I} + jX_s\underline{I} \text{ (poli înecați)},$$

$$\underline{U} = -\underline{U}_{e0} + R\underline{I} + jX_1\underline{I}_1 + jX_t\underline{I}_t \text{ (poli aparenți)}. \qquad (6\text{-}124)$$

În figura 6-80, *a* este prezentată diagrama fazorială corespunzătoare rotorului cu poli înecați, iar în figura 6-80, *b* diagrama simplificată (cînd s-a neglijat căderea ohmică RI față de U). Pentru rotorul cu poli aparenți aceleași diagrame sînt reprezentate în figurile 6-80, *c* și 6-80, *d* (simplificată).

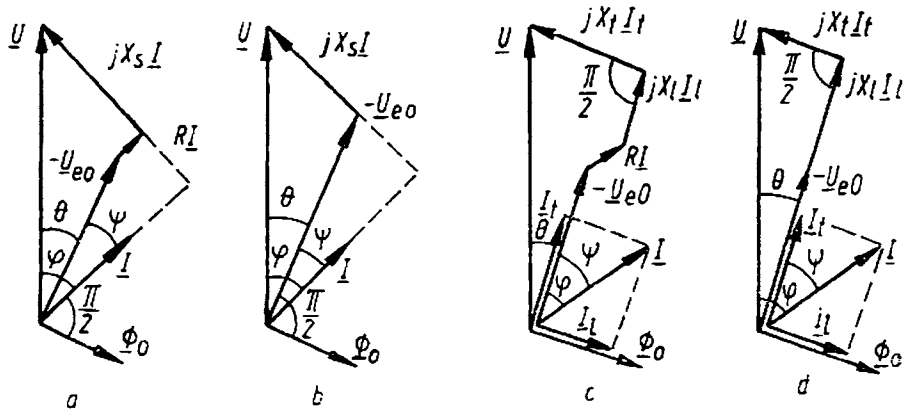


Fig. 6-80

Diagramele din figura 6-80 au fost construite în ipoteza unui defazaj inductiv între $\underline{U}$ și $\underline{I}$ (construcția făcîndu-se după procedeul folosit în cazul generatorului). De remarcat că la motorul sincron trifazat, în cazul defazajului inductiv, reacția de indus are caracter magnetizant, spre deosebire de generator unde era demagnetizantă. La motor reacția de indus este demagnetizantă la defazaj capacitiv.

6.4.10. Puterea și cuplul electromagnetic ale motorului sincron

Motorul sincron trifazat absoarbe de la rețeaua trifazată de alimentare puterea P_1, transmite rotorului prin intermediul cîmpului magnetic învîrtitor din întrefier puterea electromagnetică P și furnizează la arbore puterea mecanică P_2. Cu notațiile de la generator, se poate scrie:

$$P_1 = 3\ UI\ \cos\varphi = P + p_{Cu_s} + p_{Fe_s} = (P_2 + p_m) + (p_{Cu_s} + p_{Fe_s}). \quad (6\text{-}125)$$

Pierderile în cupru din rotor sînt acoperite de excitatoare a cărei putere este P_e.

Se poate defini un randament al motorului sincron trifazat sub forma:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 + P_e} = \frac{P_1 - (p_m + p_{Cu_s} + p_{Fe_s})}{P_1 + P_e}. \quad (6\text{-}126)$$

Dacă se neglijează pierderile din stator $(p_{Cu_s} + p_{Fe_s})$, față de P_1, atunci din (6-125) rezultă puterea electromagnetică: $P \cong P_1 = UI \cos\varphi$.

Folosind diagramele simplificate din figurile 6-80, *b* și 6-80, *d* și procedînd ca în cazul generatorului, se obține expresia puterii electromagnetice:

$$P = 3UI\ \cos\varphi = 3U\frac{U_{e0}}{X_s}\sin\theta \text{ (pentru poli înecați)},$$

$$P = 3UI\ \cos\varphi = 3UI\ \cos\ (\psi + \theta) = 3U\ (I\ \cos\ \psi \cos\theta -$$

$$- I\ \sin\ \psi\ \sin\theta) = 3\frac{U\ U_{e0}}{X_l}\sin\ \theta + \frac{3}{2}\ U^2\frac{X_l - X_t}{X_l X_t}\sin 2\theta \text{ (poli aparenți)} \quad (6\text{-}127)$$

și a cuplului electromagnetic:

$$M = \frac{P}{\Omega_1} = 3\frac{U U_{e0}}{\Omega_1 X_s} \sin\theta \text{ (poli înecați).}$$

$$M = \frac{P}{\Omega_1} = 3\frac{U U_{e0}}{\Omega_1 X_l} \sin\theta + \frac{3}{2} U^2 \frac{X_l - X_t}{\Omega_1 X_l X_t} \sin 2\theta \text{ (poli aparenți).} \quad (6\text{-}128)$$

De remarcat că pentru cuplul electromagnetic al motorului sincron trifazat (care e un cuplu activ) s-au obținut aceleași expresii ca și în cazul cuplului rezistent al generatorului sincron — v. (6-123).

Dacă se neglijează cuplul corespunzător pierderilor mecanice — v.(6-126) — atunci cuplul electromagnetic M poate fi considerat egal cu cuplul la arbore, dezvoltat de motorul sincron.

6.4.11. Caracteristicile motorului sincron trifazat

Expresiile cuplului electromagnetic (6-128) rămîn valabile atît timp cît motorul funcționează în regim stabil (regim staționar sincron), căci la ieșirea din sincronism cuplul devine nul. Ca urmare, *caracteristica mecanică* $n = n_1 = f(M)$, la U și f_1 mărimi constante, se reprezintă printr-o dreaptă (fig. 6-81, *a*) pînă la $M = M_{max}$ (cînd $\theta = \frac{\pi}{2}$ la poli înecați, respectiv $\theta < \frac{\pi}{2}$ la poli aparenți), fiind o caracteristică mecanică absolut rigidă. La depășirea M_{max}, motorul iese din sincronism.

Caracteristica unghiulară reprezintă dependența $M = f(\theta)$ la U, f_1 și I_e mărimi constante. Pentru motorul cu poli înecați se poate scrie:

$$M = 3\frac{U U_{e0}}{\Omega_1 X_s} \sin\theta = M_{max} \sin\theta, \quad (6\text{-}129)$$

iar pentru cel cu polii aparenți:

$$M = 3\frac{U U_{e0}}{\Omega_1 X_l} \sin\theta + \frac{3}{2} U^2 \frac{X_l - X_t}{\Omega_1 X_l X_t} \sin 2\theta = M_s + M_r, \quad (6\text{-}130)$$

unde M_s este numit cuplul sincron, iar M_r cuplul reactiv care nu depinde de U_{e0}, deci el există și în lipsa excitației rotorice.

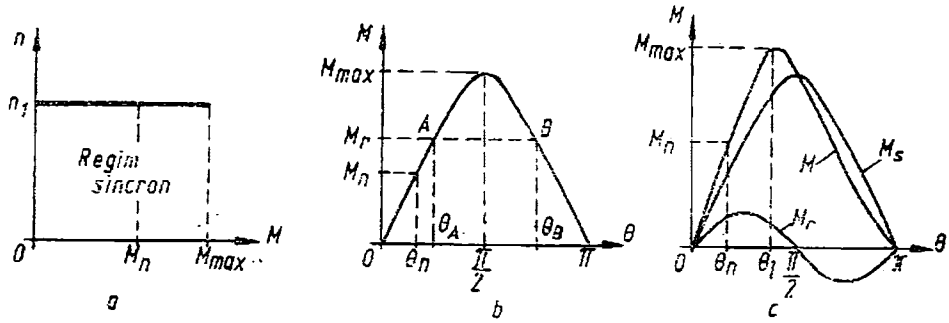


Fig. 6-81

Caracteristicile unghiulare date de (6-129) și (6-130) sînt reprezentate în figurile 6-81, *b* și 6-81, *c*. Punctul *A* de funcționare este un punct stabil, spre deosebire de *B* care este nestabil.

La motorul cu poli aparenți valoarea maximă a cuplului rezultant (curba M — fig. 6-81, *c*) este mai mare decît a celui sincron (curba M_s), în schimb unghiul intern limită, la care are loc M_{max} este $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$.

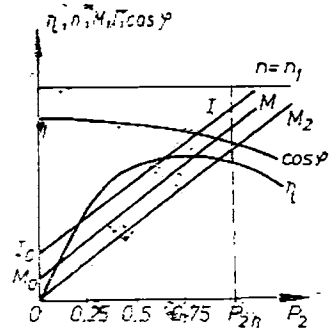


Fig. 6-82

O importanță deosebită o prezintă *caracteristicile de funcționare* ale motorului sincron trifazat, alimentat cu U, f_1 și I_e constante, la cuplu variabil. Aceste caracteristici, reprezentate în figura 6-82, sînt: cuplul util la arbore M_2, cuplul electromagnetic M, randamentul η, curentul I absorbit de o fază statorică de la rețea, turația $n = n_1$ și cos φ, toate în funcție de puterea utilă P_2 de la arborele motorului. Cuplul variabil înseamnă de fapt puterea la arbore variabilă.

După cum s-a văzut (fig. 6-81, *a*), motorul sincron are proprietatea că în limitele $0 < M < M_{max}$ se rotește cu o turație constantă (la frecvență f_1 dată) egală cu cea de sincronism, adică: $n = n_1 = 60\, f_1/p$, de unde rezultă că o modificare a turației motorului sincron se poate obține numai prin schimbarea numărului perechilor de poli (p) sau prin alimentarea motorului sincron cu o tensiune de frecvență f_1 reglabilă.

În primul caz, avînd în vedere că atît statorul cît și rotorul sînt bobinate, rezultă necesitatea modificării simultane a lui p în stator și rotor. Este o metodă complicată, permite numai o modificare în trepte a turației, motive pentru care se folosește foarte rar.

Reglarea turației prin modificarea lui f_1 (o reglare continuă) se aplică din ce în ce mai mult în ultimul timp datorită progreselor deosebite ce se realizează în construcția și buna funcționare a convertizoarelor statice de frecvență, ce folosesc tiristoarele sau tranzistoarele de putere.

6.4.12. Frînarea cu motorul sincron

Datorită funcționării mașinii sincrone cu turație riguros constantă ($n = n_1$) nu se poate obține o frînare prin recuperare de energie, ca în cazul mașinii asincrone.

O frînare în contracurent se poate realiza, dar ea prezintă unele dezavantaje: șocuri mari de curent în rețeaua de alimentare la inversarea a două faze statorice; cuplu de frînare destul de mic; necesitatea unei instalații suplimentare care să deconecteze motorul de la rețea cînd se ajunge la $n = 0$. Din aceste considerente metoda nu se utilizează.

Frînarea motorului sincron prin alimentarea statorului de la o sursă auxiliară de curent continuu este posibilă, dar nu se folosește deoarece cuplul de frînare este mic și necesită sursă auxiliară (care este costisitoare).

În cazul motorului sincron, se folosește cu precădere *frînarea reostatică* cînd motorul sincron trece într-un regim de generator, dar fără recuperare de energie. O asemenea frînare se obține prin deconectarea înfășurărilor fazelor statorice de la rețeaua de alimentare trifazată și conectarea lor la un reostat trifazat (receptor trifazat, echilibrat, pur ohmic), înfășurarea roto-

rică rămînînd conectată în continuare la sursa de tensiune continuă (la excitatoare). În aceste condiții rotorul continuă să se rotească datorită inerției maselor în mișcare, rotind totodată și cîmpul magnetic produs de înfășurarea rotorică (excitație). Acest cîmp magnetic învîrtitor rotoric induce tensiuni electromotoare în înfășurările statorice, care — la rîndul lor — determină în reostatul trifazat curenți electrici, motorul devenind generator. Interacțiunea dintre acești curenți (curenți induși) și cîmpul magnetic rotoric determină un cuplu care se opune sensului de rotire, deci un cuplu de frînare, care determină micșorarea turației n. Energia cinetică a maselor în mișcare se transformă în căldură, prin efectul Joule-Lenz din stator și rezistorul trifazat.

6.4.13. Compensatorul sincron

Un regim particular de funcționare al motorului sincron trifazat, fără sarcină la arbore (deci mers în gol) îl constituie compensatorul sincron. Acesta poate fi receptor sau generator de energie reactivă, după cum motorul (în regim de mers în gol) este subexcitat sau supraexcitat.

Din expresia cuplului electromagnetic (6-128), pentru motorul sincron cu polii înecați (se consideră acest caz, pentru simplicitate), rezultă că la U, f_1 și M mărimi constante și expresia $E = \frac{U_{e0} \sin \theta}{X_s}$ trebuie să fie o mărime constantă. Cum $P = 3\,UI\cos\varphi = \Omega_1 M$, adică $3\,UI\cos\varphi = \Omega_1 3\frac{U\,U_{e0}}{\Omega_1 X_s}\sin\theta = 3\frac{U\,U_{e0}}{X_s}\sin\theta$, rezultă:

$$I\cos\varphi = \frac{U_{e0}\sin\theta}{X_s} = const. \qquad (6\text{-}131)$$

Din această relație rezultă că vîrful lui I se deplasează pe dreapta (*1*) din figura 6-83, perpendiculară pe U, atunci cînd variază φ. Curentul I obține valoarea minimă atunci cînd $\varphi = 0$. Pentru un curent de excitație I_e, rezultă o tensiune electromotoare U_{e0} care satisface (6-115) relație ce se poate scrie, cu neglijarea lui RI, sub forma:

$$\underline{U} = -\underline{U}_{e0} + jX_s\underline{I}.$$

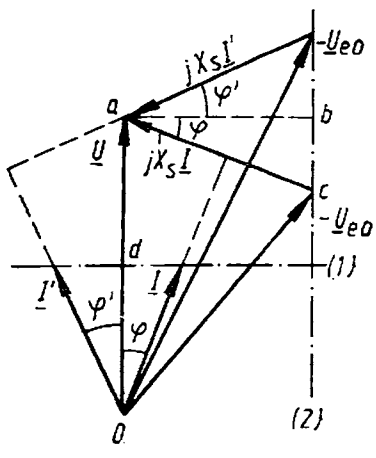


Fig. 6-83

Această relație este prezentată în figura 6-83. Ducînd din vîrful lui $\underline{U}$ o perpendiculară pe dreapta (*2*), care la rîndul ei este paralelă dusă la $\underline{U}$ prin vîrful lui $(-\underline{U}_{e0})$ se obține segmentul $\overline{ab} = X_s I\cos\varphi$. Acesta trebuie să fie constant conform (6-131) pentru orice valoare a lui U_{e0}, respectiv a curentului de excitație I_e. Așadar, extremitatea lui $(-\underline{U}_{e0})$ al cărui modul variază odată cu variația lui I_e, este obligat să descrie dreapta *(2)*.

Din cele de mai sus rezultă că atunci cînd se modifică I_e, în condițiile unui cuplu constant (cazul motorului la mers în gol), $(-U_{e0})$ dreapta (2), deci $\sphericalangle bac = \varphi$, variază. Asta înseamnă că factorul de putere $\cos\varphi$ depinde de valoarea curentului de excitație I_e. Pentru o anumită valoare $I_e = I'_e$ (care determină un U'_{e0}), motorul sincron devine un consumator capacitiv, curentul I' (corespunzător lui I'_e) fiind cu φ' înaintea lui U (fig. 6-83).

Valoarea $I = I_{e0}$, pentru care se obține $\varphi = 0$ (deci $\cos\varphi = 1$) este denumită de obicei curent de excitație optim. Pentru $I_e < I_{e0}$ (subexcitat) motorul sincron se comportă ca un receptor inductiv.

Dacă motorul sincron, funcționînd în gol (cuplu constant) și alimentat cu tensiunea $U = const.$ la $f_1 = const.$, este supraexcitat ($I_e > I_{e0}$) atunci curentul I este defazat înainte față de U ca și cum ar fi un consumator capacitiv. În aceste condiții motorul sincron absoarbe de la rețea energie reactivă capacitivă, prin aceasta compensînd energia reactivă inductivă absorbită de celelalte receptoare conectate la aceeași rețea trifazată de alimentare, contribuind în acest fel la îmbunătățirea factorului de putere. Motorul sincron supraexcitat, în regim de mers în gol, se comportă față de rețeaua de alimentare ca și un condensator, el numindu-se în acest caz compensator sincron.

Concluziile de mai sus sînt valabile și pentru motorul sincron cu poli aparenți.

Compensatoarele sincrone se execută de obicei cu poli aparenți, avînd $p = 2$ sau 3 perechi de poli și cu puteri cuprinse între 1 și 75 MVA, la tensiuni de pînă la 11 kV. Compensatoarele sincrone funcționează în general pe barele de 6 sau 10 kV ale stațiilor electrice ce alimentează receptoare cu putere reactivă mai mare, deci la $\cos\varphi$ scăzut.

Compensatorul sincron funcționînd fără sarcină mecanică la arbore are dimensiuni mai reduse decît motorul sincron (la aceeași putere) și condițiile de pornire mult mai ușoare.

Motorul sincron, cu sarcina mecanică la arbore (deci antrenînd o mașină de lucru), dar supraexcitat, contribuie la îmbunătățirea factorului de putere al rețelei de la care este alimentat.

6.4.14. Motorul sincron pas cu pas

Din numeroasele aplicații particulare ale mașinii sincrone, care necesită realizări de concepție și construcție specială (de unde și numele de mașini electrice speciale), am ales — ca exemplu — mașina sincronă pas cu pas, care are numeroase aplicații în domeniul construcției utilajului tehnologic (la mașinile-unelte automate cu program, la roboții industriali ș.a.).

Mașina sincronă pas cu pas este o mașină cu reluctanță magnetică variabilă, care are însă bobinajul statoric de tip concentrat (nu uniform repartizat ca la motorul sincron obișnuit), iar învîrtirea rotorului se face în salturi (pași). Acest motor se mai numește și cu impulsuri deoarece la primirea unui puls de tensiune de către înfășurarea statorică, rotorul motorului își schimbă poziția cu un unghi bine precizat, denumit *pas*.

Există foarte multe variante constructive pentru acest tip special de motor sincron. În principiu orice motor sincron sau asincron, la o alimentare corespunzătoare a înfășurării statorice, poate funcționa în regim de pas cu pas.

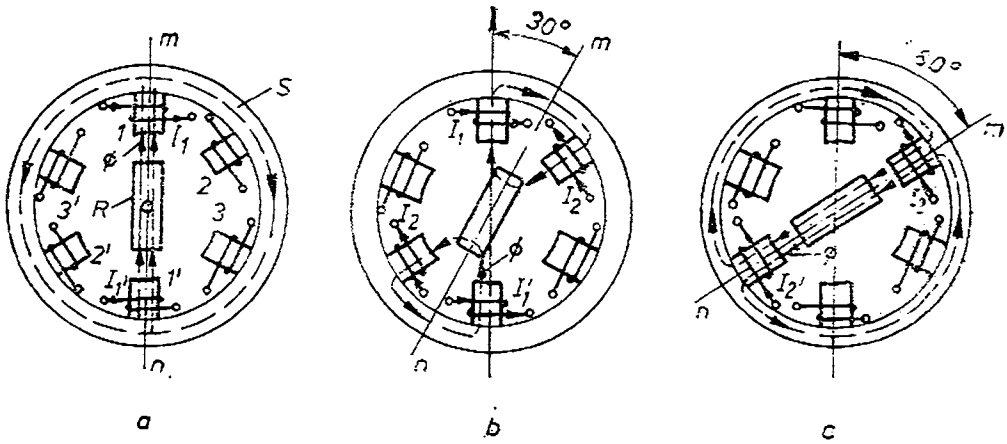


Fig. 6-84

Pentru explicarea principiului de funcționare a motorului sincron pas cu pas, se consideră cazul cînd statorul *S* (fig. 6-84) are șase poli proeminenți iar rotorul *R* numai doi dar tot proeminenți, lipsiți de înfășurarea de excitație. Pe fiecare pol statoric este dispusă cîte o înfășurare de comandă, concentrată (*1-2-3-1'—2'—3'*) alimentate pe rînd, de la o sursă de curent continuu, prin intermediul unui comutator mecanic sau electronic. Bobinele polilor statorici diametral situați sînt conectate în serie (*1-1'*, *2-2'* respectiv *3-3'*). Cînd se alimentează înfășurări statorice, apare un cîmp magnetic inductor (un flux magnetic Φ) a cărui orientare (axa *m—n*) depinde de care bobinaj statoric (*1-1'* sau *2-2'*, respectiv *3-3'*) este alimentat și de sensul curentului continuu prin acesta. Sub acțiunea forțelor electromagnetice rotorul tinde să ocupe o astfel de poziție încît reluctanța circuitului magnetic să fie minimă, respectiv fluxul maxim.

La alimentarea bobinajelor *1-1'* (fig. 6-84, *a*) rotorul se deplasează pînă cînd axa sa coincide cu axa longitudinală (*m—n*) a polilor *1-1'*. Alimentînd simultan și bobinele polilor *2-2'*, poli vecini cu *1-1'*, dar de polaritate opusă (fig. 6.84, *b*), atunci rotorul va ocupa poziția axei interpolare celor două perechi de poli (*1-1'* respectiv *2-2'*) alimentați. Rotorul a efectuat, în aceste condiții, un prim pas de 30°.

Întrerupînd alimentarea polilor *1-1'*, rotorul va efectua al doilea pas de 30°, orientîndu-se după direcția axei polilor *2-2'* (fig. 6-84, *c*).

Prin alimentarea în continuare, succesivă, în același mod a bobinajelor polilor următori, rotorul motorului execută 12 pași la o rotație completă. Numărul de pași pe o rotație se poate mări prin creșterea numărului de poli în stator și rotor. În același scop, se realizează motoare sincrone pas cu pas ce rezultă prin reunirea într-o singură mașină (cu un singur ax) a mai multor statoare și rotoare, decalate spațial unul față de celălalt.

Din cele de mai sus rezultă că motorul pas cu pas se comportă ca un convertor electromecanic numeric-analogic. El și-a găsit o largă aplicare în sistemele de comandă pe bază de program a acționărilor mașinilor-unelte, a unor mecanisme și dispozitive din comanda perifericelor calculatoarelor, înregistratoarelor *X — Y*, în tehnica rachetelor etc.

Capitolul 7

SISTEME ELECTROENERGETICE INDUSTRIALE ȘI ELEMENTE DE ENERGETICĂ TEHNOLOGICĂ

În aplicațiile practice ale fenomenelor electromagnetice, ajunse la un înalt grad de complexitate, diversitate și amploare, elementele fundamentale sînt cele legate de partea energetică, atît din punctul de vedere al producerii, transportului și distribuției energiei electrice (care trebuie să asigure punerea în valoare a resurselor de energie primară cu minimum de pierderi și cheltuieli materiale), cît și al consumului rațional de energie electromagnetică (determinat de tehnologiile folosite, dar și de modul de organizare a producției văzut din punctul de vedere al exploatării corecte a sistemului de producere-transport-distribuție).

De aceea, este necesar ca utilizatorul de energie electrică („consumatorul") să aibă — indiferent de profilul și specializarea sa — un minimum de cunoștințe referitoare la sistemul electroenergetic (din care se „alimentează"), la balanța energetică, la folosirea corectă (rațională) a energiei electrice etc., noțiuni care fac obiectul acestui ultim capitol.

7.1. SISTEMUL ELECTROENERGETIC

7.1.1. Definirea sistemului electroenergetic

Sistemul energetic reprezintă ansamblul instalațiilor de extracție, prelucrare, conversie, transport și distribuție extins pe întreg teritoriul țării și reprezentînd o parte a economiei naționale. Schema simplificată a unui sistem energetic este prezentată în figura 7-1.

Existența sistemului energetic permite folosirea economică a resurselor de combustibil și a energiei apelor, precum și alimentarea în condiții sigure și economice a consumatorilor.

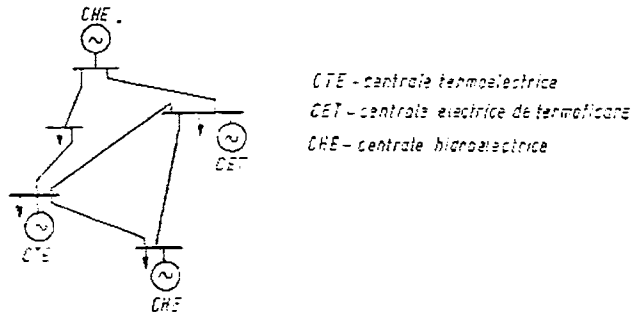


Fig. 7-1

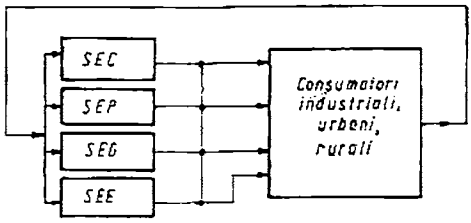


Fig. 7-2

Sistemul energetic, caracterizat printr-o mare complexitate și diversitate, se subdivide în subsisteme (fig. 7-2):

— sistemul de extracție, transport, stocare și distribuție a cărbunelui (*SEC*);

— sistemul de extracție, transport, stocare și distribuție a petrolului (*SEP*);

— sistemul de extracție, transport și distribuție a gazelor naturale (*SEG*);

— sistemul electroenergetic național de producere, transport și distribuție a energiei electrice (*SEN*).

În figura 7-2, s-au arătat și legăturile informaționale între aceste subsisteme.

Principalele instalații componente ale sistemului electroenergetic sînt:

1° *Instalațiile de producere a energiei electrice*, cu tipurile:

— centrale (uzine) hidroelectrice (*CHE*), care folosesc energia apelor pentru producerea energiei electrice;

— centrale termoelectrice (*CTE*) — transformă energia combustibililor solizi, lichizi sau gazoși în energie electrică;

— centrale electrice de termoficare (*CET*) — folosesc combustibili solizi, lichizi sau gazoși, producînd atît energie electrică cît și energie termică (apă supraîncălzită sau abur);

— centrale nuclearoelectrice (*CNE*) — folosesc energia nucleară a uraniului pentru producerea energiei electrice.

2° *Instalațiile de transformare*, care permit ridicarea sau coborîrea tensiunii (în conformitate cu condițiile de producere, transport sau utilizare), se numesc stații electrice și se compun din: transformatoare, aparate de comutație, aparate de protecție, măsurat și automatizare.

3° *Instalațiile de transport* care se pot realiza fie sub formă de linii aeriene, fie de cabluri în limitele orașelor sau a incintelor industriale.

4° *Instalațiile de distribuție* care se realizează sub formă de stații de transformare, linii de transport, posturi de transformare.

Sistemul electroenergetic național, ca subsistem al ansamblului energetic, datorită funcțiilor sale reprezintă o importantă componentă a economiei țării. Întrucît trebuie să asigure toate necesitățile de energie electrică dintr-o anumită etapă, el reflectă necesitățile economiei naționale din acea etapă.

Din cele de mai sus, reținem că *sistemul electroenergetic* reprezintă — prin definiție — totalitatea instalațiilor de producere, transport și distribuție a energiei electrice și căldurii realizată în termoficare și se prezintă ca o suprapunere de rețele electrice de diferite tensiuni cu legături radiale și buclate, unite între ele prin stații de transformare a energiei electrice, la care în noduri sînt conectate generatoare sau receptoare de energie electrică.

Schema de ansamblu a unui sistem electroenergetic este redată în figura 7-3.

La stabilirea structurii rețelelor electrice este necesar să se țină seama de următoarele elemente:

— transportul și distribuirea energiei electrice trebuie să se facă cu pierderi minime;

— amplasarea pe teren a consumatorilor și a surselor de alimentare cu energie electrică (stații electrice de transformare și centrale electrice);

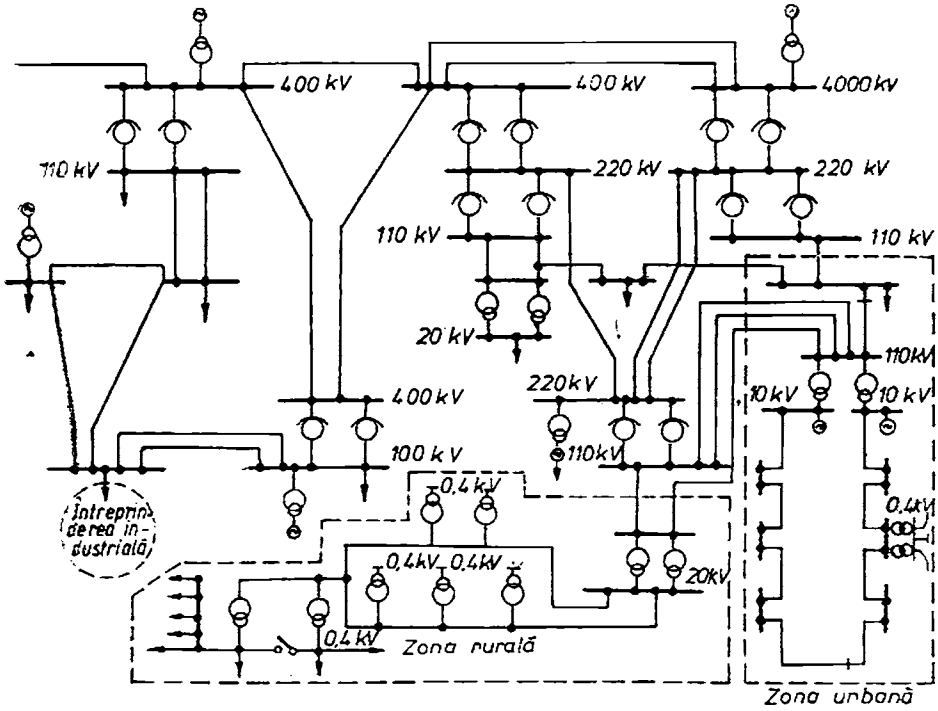


Fig. 7-3

— asigurarea transmiterii puterii cerute de consumatori și a variațiilor de putere în timp, după curba de sarcină;

— posibilitatea dezvoltării pentru racordarea de noi consumatori sau surse de energie, ori pentru extinderea consumatorilor existenți;

— eficiența economică sub aspectul investițiilor și al cheltuielilor anuale de exploatare;

— asigurarea condițiilor de fiabilitate, în funcție de importanța consumatorilor;

— simplitatea și elasticitatea schemei, pentru a micșora probabilitatea de defect, a reduce numărul treptelor de transformare și a pierderilor de energie în liniile electrice și în transformatoarele electrice.

În condițiile actuale producerea, transportul și distribuția energiei electrice se face în curent alternativ la frecvența de 50 Hz.

7.1.2. Graficele de sarcină ale sistemului electroenergetic și întreprinderilor industriale

Baza de plecare pentru studiul oricărui regim o reprezintă *curbele de sarcină*. De aceea, aprecierea exactă a configurației acestor curbe are un rol important în politica de electrificare de perspectivă atît din punctul de vedere al investițiilor ce trebuie făcute în diversele centrale, care vor funcționa fie ca centrale de vîrf fie ca centrale de bază sau semibază, cît și din punctul de vedere al economiilor de combustibil rezultate din repartiția optimă a sarcinilor electrice între centrale.

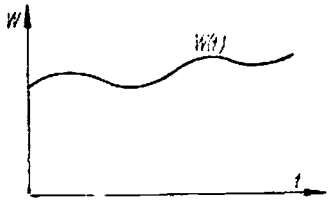


Fig. 7-4

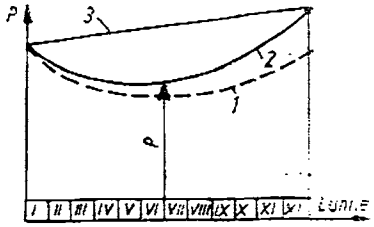


Fig. 7-5

În același timp, graficele de sarcină reprezintă bilanțul între energia produsă și consumată, redînd dinamica de funcționare atît a sistemului în general, și a fiecărei centrale în particular, cît și a consumatorilor racordați la sistem. Graficele de sarcină reprezintă variația consumului de energie electrică în funcție de timp (fig. 7-4). În funcție de perioada la care se referă, graficele se numesc grafice zilnice, lunare, anuale etc.

În calculele de perspectivă primul element care se ia în considerare este variația consumului de energie electrică anuală (E) pe un număr de ani (5—25 ani de obicei). Trecerea de la energia anuală la sarcina maximă (P_m) se face cu relația $P_m = E/T$, unde T este durata de utilizare a puterii maxime.

Valoarea puterii maxime se schimbă de la lună la lună ca urmare a condițiilor naturale și a creșterii permanente a consumului. De aceea maximul dintr-o lună diferă de maximul aceleiași luni din anul precedent, așa cum se vede în figura 7-5, unde sînt prezentate curbele de variație a sarcinilor maxime lunare în decursul unui an.

Curba *1*, denumită și statică, redă variația sarcinilor maxime numai în funcție de condițiile naturale și organizatorice; curba *2* corespunde mai mult realității, pentru că ține seama de toți factorii care intervin (condiții naturale, organizatorice, graficele de reparații a echipamentului energetic din sistem) și se numește curba dinamică; dreapta *3* reprezintă creșterea sarcinii.

Prin ordonarea mărimilor orare ale puterilor în decursul unui an, în ordine descrescătoare, obținem *curba clasată*. Curba clasată, pe lîngă faptul că indică durata de utilizare anuală a fiecărui maxim lunar, permite prin integrare să se determine energia anuală, dînd totodată posibilitatea evidențierii fiecărei centrale în acoperirea graficului de sarcină (figura 7-6, unde: *1* reprezintă partea referitoare la *CHE*, *2* — *CHE* și *CTE*, *3* — *CET*, *4* — *CTE*).

Fiind cunoscute variația și frecvența anuală a sarcinii maxime, apare necesară determinarea variației zilnice a sarcinii care în mod obișnuit va avea forma din figura 7-7. Mărimile de bază ale acestui grafic sînt puterea minimă P_{min}, care se obține din punctul curbei de sarcină cu ordonata cea mai mică, puterea maximă P_{max}, care se obține din punctul cu ordonata cea mai mare, și puterea medie, P_{med}, care rezultă din raportul $\frac{E}{24}$.

Între principalele mărimi ale curbei de sarcină există relațiile:

$$\beta = \frac{P_{min}}{P_{max}},$$

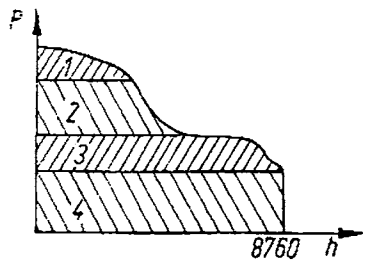


Fig. 7-6

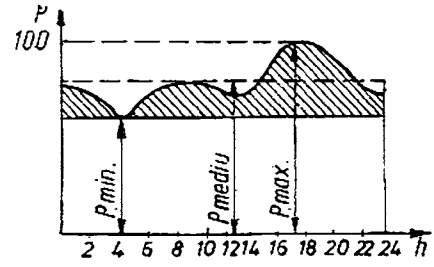


Fig. 7-7

unde β este numit coeficientul de minim (determinat de raportul între puterea minimă și puterea maximă);

$$\gamma = \frac{E_{24}}{24\ P_{max}} = \frac{P_{med}}{P_{max}},$$

unde γ este așa-numitul coeficient de umplere.

Indicii β și γ depind de natura consumului și pot varia în limite destul de largi: β poate lua valoarea zero atunci cînd nu există consumul de noapte și poate lua valoarea 1 pentru industriile cu procese continue.

Raportul între sarcina maximă și sarcina minimă dă coeficientul de maxim (α_M):

$$\alpha_M = \frac{P_{max}}{P_{min}}.$$

Pentru zona de vîrf, coeficientul de umplere γ_v este:

$$\gamma_v = \frac{E_v}{24(P - P_{min})}.$$

Din analiza graficelor anuale, sezoniere, lunare și săptămînale rezultă că aceste grafice comportă o neregularitate de care trebuie ținut seama și pe care o vom denumi *neuniformitate* (anuală, lunară sau săptămînală).

Stabilirea curbelor de sarcină pentru întreprinderile industriale, atît cele de putere activă, cît și cele de putere reactivă, dă posibilitatea alegerii unei scheme raționale și dimensionării corecte a rețelelor și transformatoarelor din posturi și stații.

Pentru a putea stabili curbele de sarcină ale puterii active și reactive este necesar să se cunoască în primul rînd valorile maxime ale puterii active și reactive, precum și alura curbelor de sarcină pentru un număr de întreprinderi cu același specific sau a unor curbe tip, ca formă, determinate prin prelucrarea statistică a unui mare număr de curbe de sarcină reale, pentru întreprinderi grupate pe diferite ramuri industriale.

Se consideră cele două curbe de sarcină din figura 7-8 reprezentînd variația puterilor active (*1*) și reactive (*2*) care intră din sistem la bara stației principale de alimentare a unei întreprinderi (curba *3* reprezintă variația factorului de putere necompensat). Datorită compensării la bara *1*, curba de putere reactivă în aval rămîne în continuare cea fără compensare (fig. 7-8), iar în amonte este modificată datorită efectului compensării (figura 7—9, care redă tocmai efectul compensării factorului de putere asupra curbelor de sarcină).

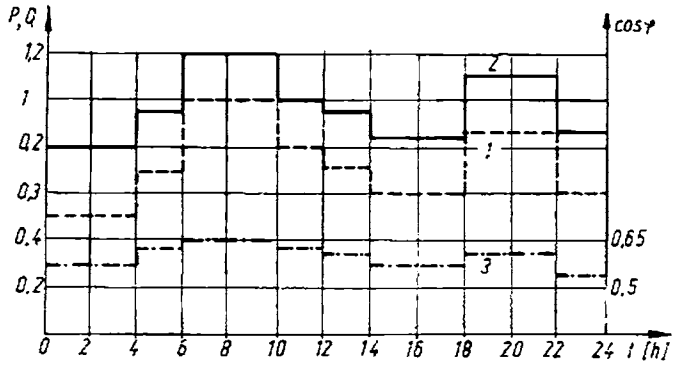


Fig. 7-8

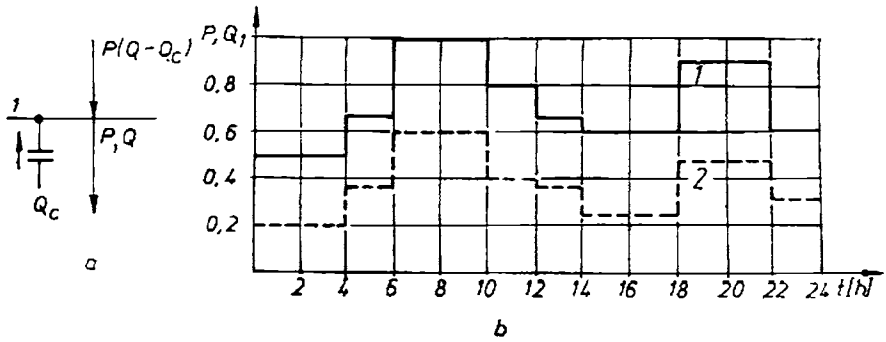


Fig. 7-9

Modificările care intervin depind de puterea instalațiilor de compensare, de modul de funcționare (o treaptă, două trepte), de punctul sau punctele din rețea în care sînt instalate, putîndu-se realiza în anumite perioade de funcționare valori zero ale puterii reactive primite din sistemul energetic.

Deci, în majoritatea cazurilor, curbele de sarcină pentru puterea activă ale întreprinderilor industriale prezintă forme stabile. Se pot stabili chiar forme tip de curbe de sarcină corespunzătoare întreprinderilor industriale cu un anumit specific de producție, în timp ce curbele de sarcină pentru puterea reactivă, care se stabilesc pentru situația necompensată, pot suferi multe modificări.

Prezentăm în figurile 7-10 curbele de sarcină activă *1* și reactivă necompensată *2* pentru întreprinderi ale diferitelor ramuri industriale: întreprindere de metalurgie neferoasă (fig. 7-10, *a*); întreprindere pentru construcția mașinilor de transport (fig. 7-10, *b*); întreprindere de extracție a cărbunelui (fig. 7-10, *c*); întreprindere de industrie chimică (fig. 7-10, *d*); fabrică de automobile (fig. 7-10, *e*).

Pentru aceste curbe s-a considerat puterea activă maximă egală procentual cu cea reactivă maximă.

Din grafice rezultă că pentru perioadele cînd $P < P_{max}$, factorul de putere este mai mic decît cel corespunzător sarcinii maxime.

Pentru întreprinderi cu același specific curbele de sarcină au forme apropiate și se pot stabili curbe de sarcină tip. După cum se vede din figura 7-10, este posibil ca pentru întreprinderi noi, care se vor realiza, să se calculeze

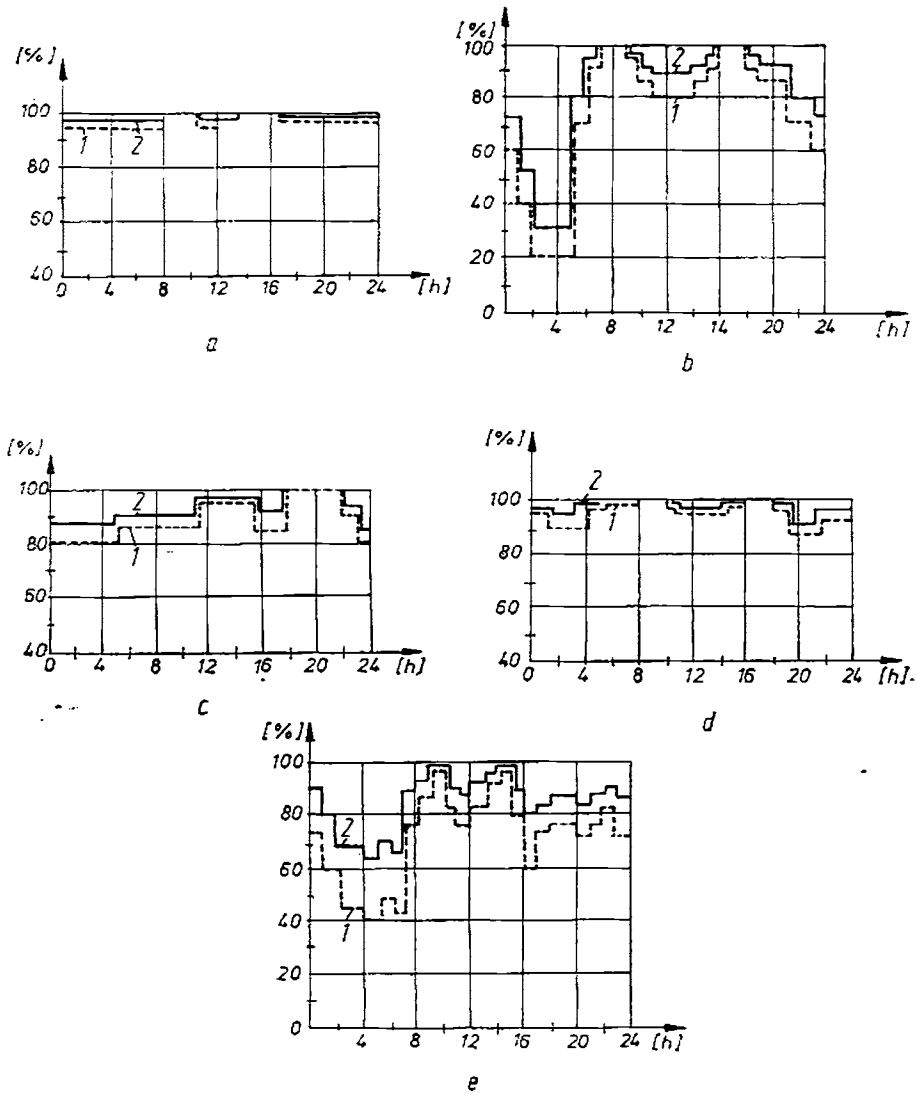


Fig. 7-10

puterea maximă simultană activă și reactivă și alte mărimi caracteristice (P_{med}, T_{max} etc.) și să se stabilească curbele de sarcină activă și reactivă, folosind curbe de sarcină realizate pentru întreprinderi similare în funcțiune, respectiv curbe tip, adaptate la valorile specifice noii întreprinderi.

7.1.3. Prognoza curbelor de sarcină

Pentru exploatarea operativă optimă a sistemului electroenergetic este util să se poată prevedea (prognoza) curbele de sarcină.

În vederea obținerii de prognoze privind curbele de sarcină, pentru perioade foarte scurte (de la o zi la o săptămînă), pot fi utilizate mai multe moduri de calcul.

Dezvoltări recente ale metodelor specifice prognozei au condus la utilizarea teoriei proceselor stohastice și în acest domeniu.

Un fenomen statistic care evoluează în timp după legi probabilistice se numește proces stohastic și valorile curbelor de sarcină, realizate în sistemul energetic, pot fi privite ca serii de timp generate de un astfel de proces.

Astfel procesul evoluției temporale a valorilor puterilor din sistemul energetic este asimilat unui proces stohastic, ce prezintă o periodicitate cu durata de 24 h.

Modelul matematic este de forma:

$$\bar{X}_{n+1,i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ji} + \sum_{j=1}^{n} b_j y_{ji} & \text{dacă } \bar{X}_{n,i} \text{ există} \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ji} & \text{dacă } \bar{X}_{n,i} \text{ nu există} \end{cases} \tag{7-1}$$

și variabilele utilizate au semnificația:

$\bar{x}_{n+1,i}$ — valoarea de prognoză pentru ziua $n+1$ la ora i;

x_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$ și $j = 1, 2, \ldots, 24$ — valori de putere realizate în cele n zile anterioare;

a_{ij}, b_{ij} — parametri necunoscuți care se vor determina astfel încît eroarea de prognoză să fie minimă;

y_{ij} — abaterile dintre realizări și prognozele corespunzătoare aceluiași moment de timp;

$y_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și $j = 1, 2, \ldots, 24$.

Modelul matematic arată că, dacă în momentul începerii prognozei, nu există prognoze anterioare, ci numai date realizate, atunci în model nu intervin decît cele din urmă.

Pentru că relația prezentată este aceeași pentru orice oră a zilei se poat renunța la indicele corespunzător orei și înlocuind elementele X_{ni} cu puterile P_n rezultă:

$$P_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i + \sum_{i=1}^{n} b_i (P_i - \bar{P}_i). \tag{7-2}$$

Coeficienții a_i și b_i pot fi determinați utilizînd metoda celor mai mici pătrate, care minimizînd suma pătratelor diferențelor, asigură obținerea unor estimații corecte:

$$P = \left[P_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i P_i - \sum_{i=1}^{n} b_i (P_i - \bar{P}_i) \right]^2 + \left[P_{n+2} - \sum_{i=1}^{n} a_i P_{i+1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} b_i (P_{i+1} - \bar{P}_{i+1}) \right]^2 + \ldots + \left[P_{n+m} - \sum_{i=1}^{n} a_i P_{i+m-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} b_i (P_{i+m-1} - \bar{P}_{i+m-1}) \right]^2 = minim. \tag{7-3}$$

Pentru estimarea coeficienților a_i și b_i sînt necesare $(n+m)$ realizări din trecut. Pentru ca (7-3) să fie adevărată, trebuie să aibă loc și condițiile:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \\ \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \dfrac{\partial F}{\partial b_i} = 0 \end{cases}$$

Sub formă matriceală relația devine: $\mathbf{DA} = \mathbf{E}$, unde $\mathbf{D}$ este o matrice de dimensiune $2n \times 2n$;

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{pmatrix}$$

și

$$\mathbf{F} = (f_{ij}) = (f_{ji}) = \sum_{k=1}^{m} P_{i+k-1} P_{j+k-1}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\mathbf{H} = (h_{ij}) = (h_{ji}) = \sum_{k=1}^{m} (P_{i+k-1} - \bar{P}_{i+k-1})(P_{j+k-1} - \bar{P}_{j+k-1}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\mathbf{G} = (g_{ij}) = \sum_{k=1}^{m} P_{k+i-1}(P_{k+j-1} - \bar{P}_{k+j-1}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Vectorul $\mathbf{A}$ conține elementele necunoscute a_i, b_i pentru care trebuie găsite estimațiile, iar vectorul $\mathbf{E}$ este vectorul termenilor liberi.

Sistemul de ecuații dat de ultima relație se numește sistemul ecuațiilor normale și prin rezolvarea lui se obțin estimațiile coeficienților a_i și b_i care, înlocuite în (7-2), dau prognoza de putere pentru ziua $(n+1)$ cunoscînd realizările din $(n+m)$ zile anterioare.

Pentru alegerea numărului optim de zile din trecut, care să participe la prognoză, astfel încît erorile de prognoză să fie minime, a fost necesar să se întocmească o tabelă de decizie, în care s-au trecut prognozele pentru diferite valori ale lui n și m.

Criteriul de alegere a fost criteriul dispersiei minime și pe baza acestuia s-au găsit valorile:

— pentru zi de lucru $n = 6$ și $m = 16$;

— pentru zi de repaus $n = 3$ și $m = 4$.

Alegerea numărului optim de zile din trecut, care să participe la obținerea prognozei se face o singură dată, la început și nu mai suferă modificări. În schimb determinarea estimațiilor pentru coeficienții a_i și b_i se face pentru fiecare moment al zilei, pentru care se cere prognoza.

Programul de calcul, bazat pe modelul prezentat, permite obținerea de prognoze pe termen scurt, atît din oră în oră, cît și din 15 min în 15 min, dacă se cunosc citirile de putere, corespunzătoare la aceleași intervale de timp pentru zilele anterioare. Pentru fiecare oră în parte coeficienții a_i și b_i au alte valori deci și estimațiile lor trebuie determinate de fiecare dată.

Prognozele obținute sînt cu atît mai corecte, cu cît orizontul de prognoză este mai mic și prognoza se bazează pe realizări din trecutul foarte apropiat.

7.1.4. Preliminarea curbelor de sarcină

Pentru preliminarea regimului curbelor de sarcină și respectiv a formei curbelor de sarcină, se folosesc în general două tipuri de metode:

— metode analitice, în care se analizează dinamica principalelor categorii de consumatori ținîndu-se seama de particularitățile acestora, curba totală obținîndu-se prin însumarea curbelor parțiale ale principalelor categorii de consumatori;

— metode sintetice, care se bazează pe date statistice globale asupra evoluției din trecut a regimului curbelor de sarcină.

Preliminarea curbelor de sarcină caracteristice pentru zi de lucru. Se folosește metoda sintetică de calcul, care se bazează pe două categorii de date:

— date referitoare la curbele de sarcină din trecut și la evoluția acestora;

— date referitoare la perspectivele evoluției consumului de energie electrică în viitor.

La baza preliminării curbelor pentru perioada de perspectivă stau curbele medii ale lunilor respective realizate, pe o perioadă de „n" ani consecutivi. Curbele se recalculează în valori relative prin raportarea valorilor medii orare ale puterilor la valoarea medie decadală a lunii respective din fiecare an și apoi mediate.

Mădierea este posibilă și poate fi luată ca bază de calcul pentru perspectivă întrucît se înregistrează abateri minime ($\simeq 1\%$) între valorile relative ale puterilor orare raportate la valoarea puterii medii decadale în cadrul aceleiași ore pentru cei „n" ani studiați. Prin calculul dispersiei șirului de valori pentru aceeași oră, împrăștierea valorilor în jurul mediei este acceptabilă.

Aceste curbe medii tipice relative se calculează atît pentru zi de lucru, cît și pentru zi de repaus.

Trecerea de la curbele medii tipice astfel obținute la curbele medii în valori absolute pentru anul de prognoză se face prin stabilirea puterii medii din zi caracteristică de lucru și ponderea curbelor tip cu această valoare, din zi de lucru, decada 2, consum intern.

Analiza pentru alegerea între cele trei decade din fiecare lună nu evidențiază argumente nete în favoarea uneia sau alteia din decade. Sub influența faptului că decada 2 coincide în general cu o perioadă de consum mediu din lună, a fost aleasă pentru scopurile metodei decada a 2-a din fiecare lună.

Din calculele care se efectuează, rezultă curbe medii probabile, care satisfac necesitățile calculării comportamentului optimal în exploatare a centralelor electrice. Cu prelucrări suplimentare aceste curbe pot fi utilizate și pentru probleme de dimensionare de perspectivă a sistemului privind stabilirea programului centralelor electrice. Perioadele statistice prea lungi nu sînt concludente deoarece acoperă intervale în care au apărut tendințe consecutive eterogene; de asemenea, perioadele de perspectivă care depășesc 5 ani riscă să vadă modificate în mod simțitor tendințele presupuse a fi constante.

Preliminarea curbelor de sarcină caracteristice pentru zi de repaus. Din calculele efectuate pe mai mulți ani, s-a constatat că alura curbelor medii din zilele de sărbătoare este asemănătoare în raport cu puterea medie decadală a zilelor de lucru din luna respectivă. Pentru preliminarea lor în perspectivă s-a adoptat metoda extrapolării unei curbe tip, calculată pe „n" ani consecutivi,

și ponderarea acestor curbe realtive cu puterea medie din zilele de lucru a lunii considerate. La curbele astfel obținute se adaugă curbele pentru irigații, obținîndu-se curbele medii consum intern.

7.1.5. Calculul sarcinilor electrice

Analiza curbei după care evoluează consumul de energie electrică ne arată că puterea orară absorbită este mai mică decît puterea instalată a consumatorilor.

Puterea instalată P_i reprezintă, pentru fiecare receptor de energie electrică, puterea nominală a acestuia prevăzută în documentația tehnică cu care este livrat.

La stabilirea puterii instalate a diferitelor ateliere, secții și la nivelul întreprinderii, nu se consideră puterile instalate ale diferitelor agregate sau linii tehnologice numai în cazurile cînd instalațiile normale, pentru care ele constituie rezerve, ies din funcțiune.

Puterea totală absorbită de un grup de consumatori rezultă din suprapunerea curbelor de consum a fiecărui receptor în parte; ea va fi mai mică decît suma puterilor instalate la fiecare consumator în parte:

$$P_c = k_c \cdot P_i \ <\text{kW}>,\ k_c < 1,$$

unde: P_c — este puterea de calcul și k_c — coeficientul de cerere.

Coeficientul de cerere este determinat de factorul de încărcare a fiecărui receptor (k_{inc}), de factorul de simultaneitate (k_s), randamentul receptoarelor (η_{rec}) și randamentul rețelei (η_r):

$$k_c = \frac{k_{inc} \cdot k_s}{\eta_{rec} \cdot \eta_r}.$$

De asemenea, factorul de încărcare influențează factorul de putere al motoarelor electrice (cos φ).

Coeficientul de simultaneitate k_s se poate stabili pentru două sau mai multe receptoare care funcționează simultan și exprimă raportul dintre puterea maximă a curbei de sarcină rezultantă, a tuturor receptoarelor, în funcțiune, și suma puterilor maxime corespunzătoare curbei de sarcină a fiecărui receptor sau grupe de receptoare. Acest coeficient pune în evidență poziția reciprocă în timp a puterilor maxime ale curbelor de sarcină componente și se stabilește cu expresia:

$$k_s = \frac{P_{max\ rez}}{\sum_{i=1}^{n} P_{max\ comp\ i}},$$

unde: $P_{max\ rez}$ este puterea maximă a curbei rezultante și $P_{max\ comp\ i}$ este puterea maximă a fiecărei curbe de sarcină componentă.

Determinarea sarcinii de calcul a unui grup de consumatori prezintă importanță economică deoarece condiționează dimensionarea liniilor de transport, a transformatoarelor etc.

Pentru a determina valoarea puterii de calcul s-a recurs la metodele probabilistice, deoarece această problemă reprezintă un domeniu caracteristic de folosire a calculului probabilităților.

Spre deosebire de metodele empirice învechite, calculele probabilistice ale sarcinilor au necesitat stabilirea pe cale statistică a evoluției în timp a consumurilor de putere, a indicilor de rezistență a izolației etc.

Metodele probabilistice oferă posibilități mari pentru determinarea coeficienților de simultaneitate cît mai economici.

7.2. SISTEMELE ELECTRICE DE ALIMENTARE DIN ÎNTREPRINDERILE INDUSTRIALE

În această categorie de instalații sînt cuprinse rețelele, stațiile și posturile de transformare care preiau energia electrică de la barele secundare ale posturilor sau stațiilor de injecție din sistemul energetic și o vehiculează pînă la fiecare din receptoarele întreprinderii.

Un principiu de bază în organizarea și structura instalațiilor de distribuție constă în folosirea unui număr minim de trepte de tensiune respectiv de transformări, pentru a ajunge de la stația principală de transformare la tensiunile de utilizare, în scopul reducerii investițiilor și a pierderilor de energie.

7.2.1. Trepte de tensiune

Acestea sînt, în general, reduse ca număr și anume, la noi în țară, practic în toate întreprinderile, cea mai mare parte a receptoarelor de joasă tensiune au 380/220 V, iar cele de medie tensiune 6 kV. Existența altor tensiuni nominale de utilizare sub și peste 1 kV la noi este foarte restrînsă și constituie cazuri de excepție.

Structura instalațiilor de distribuție a energiei electrice din incinta întreprinderilor industriale depinde de puterile care trebuie vehiculate, de dimensiunile întreprinderii, de repartizarea consumatorilor în subunitățile întreprinderii (hale, ateliere etc.), de comportarea consumatorilor în funcționarea de durată, de gradul de siguranță privind continuitatea în alimentare, de tensiunile nominale ale receptoarelor și de felul curentului, alternativ sau continuu.

Un aspect al acestei probleme îl constituie numărul treptelor de tensiune. Într-o întreprindere alimentată din sistemul energetic prin posturi de transformare se realizează rețeaua de joasă tensiune de 380/220 V la care se racordează toți consumatorii.

În caz că există unii consumatori, de obicei puțini la număr (eventuale compresoare), care au tensiunea nominală de 6 kV, aceștia sînt racordați direct la barele de 6 kV ale posturilor. Deci, rețeaua de 6 kV este foarte limitată, ponderea cea mai mare avînd-o rețeaua de joasă tensiune.

În cadrul întreprinderilor alimentate prin stații de 110/6 kV se dezvoltă în primul rînd rețeaua de 6 kV la care se racordează direct receptoarele de 6 kV și prin posturile de transformare de 6/0,4 kV se alimentează rețeaua de joasă tensiune și respectiv receptoarele racordate la această tensiune.

Pentru întreprinderile care necesită puteri mai mari de 70—80 MVA și care sînt alimentate din sistem la 220 kV, se dezvoltă o primă rețea de distribuție de 110 kV, la care sînt racordate stații coborîtoare amplasate în diferite puncte din întreprindere, fie la 6 kV, fie la alte tensiuni necesare racordării redresoarelor și altor utilaje cu caracteristici speciale.

De la barele de 6 kV ale fiecărei stații se prevede cîte o rețea de distribuție de 6 kV și apoi, după posturile de transformare, rețele de joasă tensiune.

Există deci întreprinderi industriale cu o singură rețea de distribuție (0,4 kV), cu două trepte de rețele de distribuție (6 kV și 0,4 kV) și cu trei trepte (110 kV, 6 kV și 0,4 kV).

7.2.2. Rețele de distribuție

Ținînd seama și de restricțiile de spațiu care există în întreprinderile industriale, atît datorită cerințelor proceselor și fluxurilor tehnologice cît și vehiculării materialelor și produselor, rețelele de distribuție, indiferent de tensiunea nominală, se realizează în general în cablu, liniile aeriene constituind excepții.

Configurația rețelelor de distribuție aparținînd treptelor menționate se poate încadra în două tipuri de bază și anume: radiale, în una sau două trepte și linii principale sau magistrale. Pot exista și combinații ale acestor două tipuri.

Rețeaua de tip radial într-o treaptă se adoptă, în principiu, pentru alimentarea consumatorilor individuali de puteri mari sau grupe mari de consumatori situate în direcții diferite (fig. 7-11), conținînd receptoare din toate cele patru categorii în ce privește continuitatea în alimentare și rezerva necesară.

Rețeaua de tip radial în două trepte se adoptă atunci cînd, datorită numărului mare de consumatori sau grupe de consumatori, dintre care o parte amplasați și la distanțe mai mari decît 5—7 km, ar fi necesar un număr prea mare de plecări de la barele unei stații *A*, care ar conduce atît la o stație prea dezvoltată, cu prea multe celule și plecări, precum și la o rețea de distribuție în mare parte neeficient folosită (fig. 7-12).

Rețelele de tip radial au anumite avantaje:

— siguranță în alimentare, deoarece la defectarea unui cablu rămîne nealimentat un singur consumator, ceilalți continuînd să funcționeze;

— elasticitate, deoarece pentru noi grupe de consumatori se fac rețelele independente;

— oferă posibilitatea de automatizare și comandă centralizate.

Aceste rețele au și unele dezavantaje:

— investițiile necesare sînt mai mari deoarece atît cablurile de alimentare cît și cele de rezervă folosesc un singur grup de consumatori;

— numărul de plecări necesare, în funcție de consumatorii de alimentat, este mare și conduce la creșterea volumului stațiilor de alimentare.

Rețeaua de distribuție de tip linie principală sau magistrală constă din realizarea unei plecări într-o anumită direcție ce trece prin apropierea mai multor receptoare sau grupe de receptoare, care sînt alimentați prin derivații sau

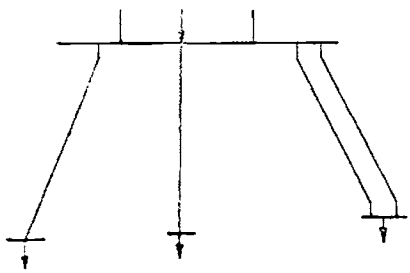


Fig. 7-11

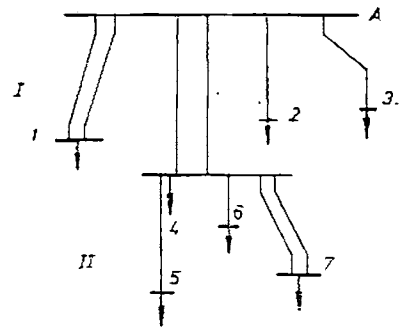


Fig. 7-12

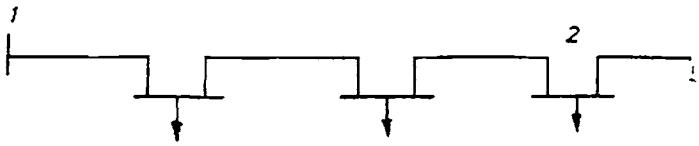


Fig. 7-13

intrare-ieşire de la plecarea respectivă (fig. 7-13). Alimentarea unei linii principale se poate face de la un capăt *1* sau de la două capete *1* şi *3*. Cele două capete pot fi alimentate din aceeaşi staţie şi în acest caz linia principală are forma unei bucle.

Avantajele liniilor principale sînt:

— investiţii mai mici datorită numărului mai mic de plecări;

— staţii de alimentare mai restrînse, avînd un număr de celule mai redus.

Dezavantajele sînt legate de siguranţa în alimentare, în general mai mică, deoarece defectarea unui cablu conduce la întreruperea alimentării mai multor receptoare sau grupe de receptoare.

Se pot realiza *reţele de distribuţie mixte* (fig. 7-14). Ele sînt formate din linii principale, iar de la nodurile cu intrare-ieşire consumatorii sînt alimentaţi radial.

Tipurile de reţele de distribuţie radială şi cu linii principale se pot întîlni la toate cele trei trepte de tensiune a acestor reţele, adică la înaltă tensiune (110 kV), la medie tensiune (6 kV) şi la joasă tensiune (0,4 kV), existînd desigur anumite diferenţe datorită specificului fiecăreia şi în special valorilor puterilor vehiculate şi importanţei consumatorilor.

Pentru fiecare treaptă de tensiune se pot concepe şi examina diferite variante de configuraţii ale reţelelor în funcţie de ipotezele care se fac cu privire la numărul staţiilor de injecţie din sistemul energetic şi de siguranţă în alimentare a consumatorilor.

Reţeaua de distribuţie de 110 kV se realizează în cadrul unei întreprinderi industriale atunci cînd aceasta este alimentată din sistemul energetic prin staţii coborîtoare de 220 kV şi 400 kV. Grupele de consumatori care urmează să fie alimentaţi prin linii de 110 kV sînt în mare parte de categoria I, printre aceştia fiind şi de categoria O, dar şi din categoriile II şi III, care necesită puteri mari, în general între 10—30 MW şi sînt situaţi la distanţe de ordinul a sute de metri. Ca exemplu, în figura 7-15 sînt indicate trei variante pentru reţeaua de 110 kV: *a* — radială într-o treaptă, *b* — linie principală dublă închisă cu staţii în derivaţie şi *c* — linie principală dublă alimentată de la două capete, cu staţii în derivaţie.

Reţeaua de 110 kV de distribuţie se realizează în cablu şi poate fi de tip radial sau linie principală (magistrală).

O reţea de distribuţie de medie tensiune mai dezvoltată se realizează, în general, în întreprinderile în care există staţii de 110 kV-6 kV, aşa cum s-a analizat mai sus, precum şi în întreprinderile alimentate de la sistem prin una

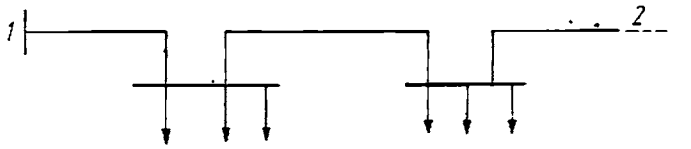
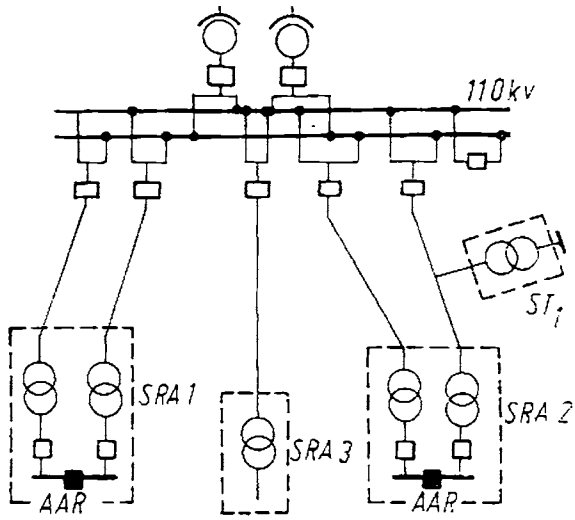
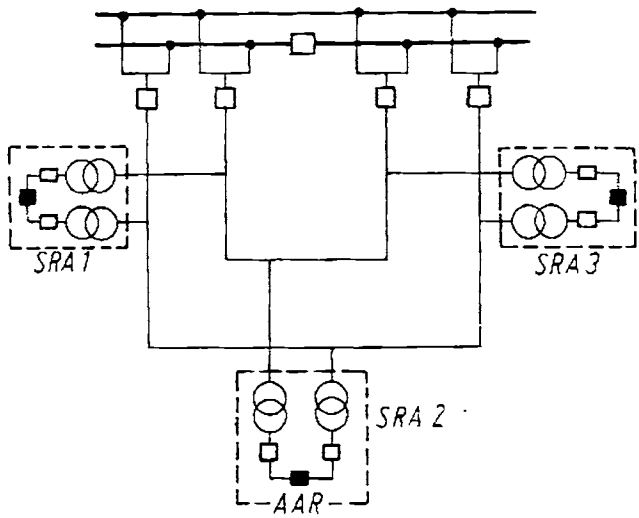


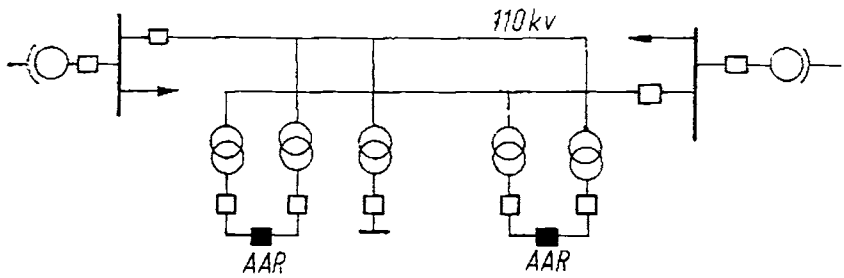
Fig. 7-14


110kv
ST1
SRA 1
SRA 3
SRA 2
AAR
AAR

a


SRA 1
SRA 3
SRA 2
AAR

b


110kv
AAR
AAR

c

Fig. 7-15

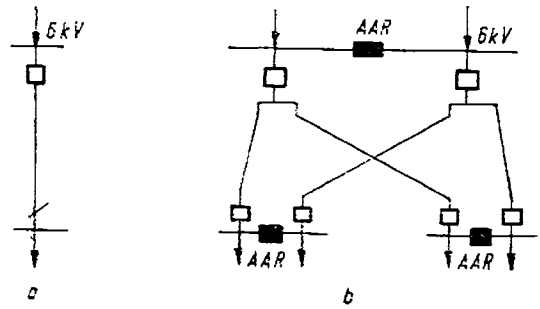


Fig. 7-16

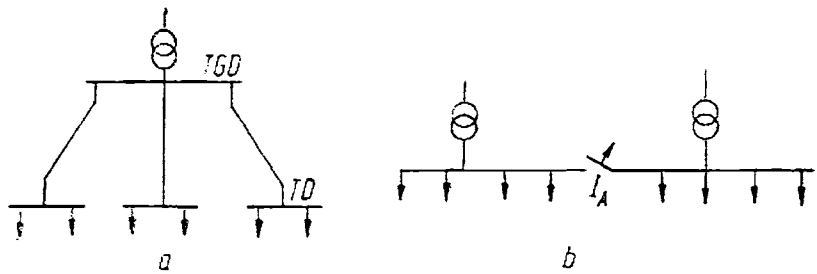


Fig. 7-17

sau două stații de 110/6 kV. În cazul alimentării din sistem la tensiunea de 6 kV, în principiu nu este necesară și o rețea de distribuție la această tensiune, ci cel mult una sau două linii, dacă sînt unele motoare de alimentat la 6 kV sau, atunci cînd există centrală electrică proprie, eventualele linii pentru interconectarea acesteia la barele de 6 kV, la care sosesc liniile de racord de la sistem (figura 7-16, unde este redată o rețea de medie tensiune de tip radial într-o treaptă: *a* — cu o singură cale de alimentare și *b* — cu două căi de alimentare).

Rețeaua de distribuție de 6 kV se racordează fie la barele stațiilor de 110/6 kV în cazul rețelelor de tip radial și linii principale, fie la barele stațiilor intermediare de distribuție de 6 kV — în cazul rețelelor radiale în două trepte (sau a doua treaptă a acestora).

Rețelele de distribuție de joasă tensiune reprezintă categoria de rețele electrice prezentă în toate întreprinderile industriale și realizează legătura de la tabloul general de distribuție din postul de transformare *TGD* pînă la tabloul de distribuție *TD* din atelier și de aici pînă la receptoarele de forță, lumină etc. (fig. 7-17, unde: *a* — rețea de tip radial și *b* — rețea de tip linie principală).

Tensiunea nominală este, în general, 380/220 V, alte tensiuni (500 V) în anumite industrii constituind situații din ce în ce mai rare.

7.2.3. Stații de transformare și distribuție

Stațiile și posturile de transformare din incinta întreprinderii industriale permit aducerea tensiunii de la valoarea cu care este primită energia din sistem, la valorile corespunzătoare tensiunilor nominale ale receptoarelor din cadrul întreprinderii. Pentru a evita investițiile suplimentare și creșterea pierderilor de energie, este necesar ca această trecere să se facă printr-un număr minim

de transformări. Astfel în cazul alimentării de la 6, 10 sau 20 kV se face o transformare suplimentară de la 10 sau 20/6 kV numai pentru puterea necesară acestor consumatori.

Dacă alimentarea întreprinderii din sistem se face la 110 kV, prima transformare (pentru motoarele care necesită 6 kV şi pentru distribuţia în întreprindere) este de 110/6 kV, fiind chiar *staţia de injecţie din sistem*, şi a doua transformare (pentru consumatorii de la joasă tensiune) este de 6/0,4 kV.

În cazul marilor combinate industriale, care necesitînd puteri foarte mari sînt alimentate din sistem la 220 kV, mai intervine, în afara staţiei de injecţie de 220/110 kV, o treaptă de transformare în interiorul întreprinderii de 110/6 kV, urmată de 6/0,4 kV, cum s-a menţionat mai sus. Rezultă deci, în principiu, o singură treaptă de transformare 6/0,4 kV sau două, adică 110/6 kV şi 6/0,4 kV, fără considerarea staţiei de injecţie din sistem.

Staţiile de 110/6 kV sînt staţii de tipul celor care se realizează în incinta marilor combinate industriale. Pentru amplasarea acestor staţii, se delimitează în primul rînd zonele de consum care urmează să fie alimentate şi apoi se determină poziţia centrului de greutate pentru fiecare, staţia urmînd să fie realizată în fiecare zonă cît mai aproape de acesta. Ca schemă, pe partea de 110 kV, din lipsă de spaţiu şi din cauza eventualei poluări, staţia de 110 kV fiind de tip exterior, este indicat să fie cît mai simplă de preferat de tip racord adînc *SRA*, adică fără aparate de comutaţie pentru staţiile cu unul sau două transformatoare sau o schemă redusă de tip *H*, pentru staţiile cu două transformatoare, cu întreruptoare montate pe linii şi nu pe transformatoare, pentru ca în cazul unei avarii pe linie să nu fie afectată şi staţia, prin deconectarea simultan cu linia şi a unui transformator.

Staţiile de 110 kV de tip interior sînt indicate în condiţiile marilor aglomerări urbane şi industriale sau în zonele poluate.

Numărul de transformatoare, stabilit în funcţie de importanţa consumatorilor şi de structura diferitelor variante de comparat, este de unul sau două pentru staţie cu puteri nominale între 10—40 MVA.

Staţia de medie tensiune, de 6 kV, reprezentînd partea secundară a staţiei de transformare de 110/6 kV, este punctul principal de injecţie a energiei electrice în reţeaua de distribuţie de 6 kV din zona de consum aferentă acestei staţii.

Staţia intermediară de distribuţie SID este următoarea instalaţie, după staţia principală de injecţie pentru transmiterea energiei electrice spre consumatori. *SID* nu reprezintă numai un nod avansat de conexiune cu intrări de la staţia principală şi plecări spre staţii de distribuţie *SD*, ci pentru consumatorii din zona apropiată îndeplineşte şi funcţia de *SD*.

Staţia de distribuţie SD este ultima staţie de medie tensiune spre consumatori, avînd în general un sistem de bare secţionat, sau nesecţionat în funcţie de numărul şi categoria consumatorilor, un post de transformare local *PTL*, motoarele mari racordate direct, linii radiale spre alte eventuale grupe de motoare şi posturi de transformare.

7.2.4. Posturi de transformare

Posturile de transformare constituie ultima treaptă de transformare în cadrul întreprinderii pentru alimentarea consumatorilor de joasă tensiune, respectiv 6/0,4 kV. Pentru a stabili numărul de posturi de transformare, numărul de transformatoare într-un post şi puterea nominală a transformatoarelor, este necesar să se delimiteze, pe un plan al întreprinderii, zonele în care

sînt distribuiți consumatorii care funcționează la joasă tensiune și puterile maxime simultane pe diferite grupe de consumatori stabilite fie pe ateliere fie pe secții, fie pe alte criterii, astfel încît să fie cuprinși toți consumatorii.

7.3. CALCULUL PIERDERILOR DE PUTERE ȘI ENERGIE

Alimentarea consumatorilor cu energie electrică este însoțită de pierderi, care se produc atît în liniile de transport cît și în transformatoarele stațiilor și posturilor de transformare. În rețelele electrice cu tensiuni nominale mai mici de 110 kV, aceste pierderi se datoresc aproape în exclusivitate încălzirii liniilor și transformatoarelor datorită efectului caloric al electrocineticii.

În cazul rețelelor cu tensiuni nominale de 110 kV și mai înalte au loc pierderi suplimentare de energie electrică, determinate de existența fenomenului corona. Acesta din urmă trebuie să aibă valori reduse, ca urmare a alegerii corespunzătoare a secțiunii conductoarelor și a nivelului de tensiune și izolație.

Valoarea pierderilor de energie, de la barele centralelor electrice pînă la locurile de consum, poate atinge uneori 10—15% din energia electrică produsă Acoperirea lor necesită instalarea unor grupuri suplimentare în centrale, fapt care determină creșterea investițiilor și a cheltuielilor de exploatare.

De aceea valoarea pierderilor de energie electrică trebuie să fie inclusă în comparațiile economice dintre diferitele variante de alimentare cu energie electrică. Însă, numai luarea în considerare a pierderilor de energie electrică nu poate conduce la scheme energetice economice. În afara pierderilor de putere activă, în elementele schemelor electrice au loc și pierderi de putere reactivă. Circulația puterilor active și reactive contribuie în mod diferit la mărimea pierderilor de putere activă.

7.3.1. Calculul pierderilor de putere și energie în rețelele electrice

Micșorarea pierderilor de putere activă în rețelele electrice poate fi efectuată prin mărirea tensiunilor, creșterea secțiunilor conductoarelor, instalarea mijloacelor de compensare la consumatori etc.

Pierderile de putere activă în liniile electrice trifazate de curent alternativ, neglijînd pierderile transversale (prin izolație), se determină cu relația cunoscută din 1.2.2.:

$$\Delta P = 3\ RI^2 \cdot 10^{-3} = R\,\frac{P^2 + Q^2}{U^2} \cdot 10^{-3}\ \text{<kW>}, \tag{7-4}$$

în care: R reprezintă rezistența unei faze la temperatura efectivă (în Ω), I — valoarea efectivă a curentului de calcul corespunzător puterii cerute (în A), P și Q puterile trifazate, activă și reactivă cerute (în kW respectiv în kvar) și U — tensiunea rețelei, care poate fi identificată cu tensiunea nominală (în kV).

Pierderile de putere reactivă în liniile electrice aeriene și subterane se calculează cu relațiile:

$$\Delta Q = 3\ XI^2 \cdot 10^{-3} = X\,\frac{P^2 + Q^2}{U^2} \cdot 10^{-3}\ \text{<kvar>}, \tag{7-5}$$

în care X reprezintă reactanța inductivă pe fază (în Ω).

Pierderile de putere aparentă se pot determina cu relația:

$$\Delta S = \Delta P + j\Delta Q = (R + jX)\frac{P^2 + Q^2}{U^2} \cdot 10^{-3} \text{ <kVA>}. \qquad (7\text{-}6)$$

În calculul pierderilor de energie, se va considera numai primul termen din ecuația (7-6), adică pierderile de energie activă. Pentru un interval de timp t, dacă pierderile de putere activă ΔP sînt constante, atunci pierderile corespunzătoare de energie au valoarea:

$$\Delta W = \Delta P \cdot t = 3RI^2t \cdot 10^{-3} = R\frac{P^2 + Q^2}{U^2}t \cdot 10^{-3} \text{ <kWh>}. \qquad (7\text{-}7)$$

În mod obișnuit însă, sarcina consumatorului variază permanent, astfel că pierderile de energie se scriu sub forma generală:

$$\Delta W = 3 \cdot 10^{-3} RI_{max}^2 \int_0^t \frac{I^2}{I_{max}^2} \, dt \text{ <kWh>}. \qquad (7\text{-}8)$$

Utilizarea acestei relații, pentru calculul pierderilor de energie pe o linie electrică, presupune efectuarea integralei (7-8), care nu se poate face decît grafic, deoarece funcției $\frac{I^2}{I_{max}^2} = f(t)$ nu i se poate asocia o expresie analitică suficient de exactă.

Pentru a evita această operație dificilă, se folosește timpul pierderilor (τ), observînd că expresia (7-8) se exprimă mai simplu sub forma:

$$\Delta W = \Delta P_{max} \cdot \tau, \qquad (7\text{-}9)$$

unde τ reiese din diagrama dată în figura 7-18 (în care se reprezintă variația numărului de ore al maximului de pierderi în funcție de numărul orelor de utilizare a sarcinii maxime).

În realitate, puterea electrică absorbită, nu rămîne constantă, ci variază în timp.

Pentru efectuarea calculelor apare oportună găsirea unui curent, respectiv puteri, echivalente, care în intervalul de timp dat să conducă la aceleași pierderi ca și curentul real.

Acest curent echivalent poate fi exprimat ca media pătratică a curentului în intervalul t. Determinarea valorii medii pătratice se poate face prin:

$$\int_0^t 3\,RI^2 \, dt = 3\,RI_{mp}^2 t, \qquad (7\text{-}10)$$

în care partea stîngă redă pierderile de energie în linii la sarcini variabile. Rezolvînd această ecuație obținem:

$$I_{mp} = \sqrt{\int_0^t I^2 \, dt/t}. \qquad (7\text{-}11)$$

Această relație permite calcularea valorii medii pătratice a curentului, atunci cînd se cunoaște legea de variație a curentului.

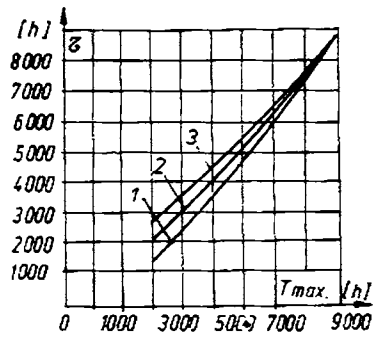


Fig. 7.18

7.3.2. Calculul pierderilor de putere și energie în transformatoare

Pierderile de putere activă independente de sarcina transformatorului și pierderea de putere activă care depinde de sarcina transformatorului sînt cele două categorii de pierderi care se întîlnesc la transformator.

Prima categorie se referă la pierderile la funcționarea în gol a transformatorului ΔP_0 egale aproximativ cu pierderile în fier ΔP_{Fe}, iar cea de-a doua categorie se referă la pierderile la funcționarea în scurtcircuit a transformatorului ΔP_k, egale aproximativ cu pierderile în cupru ΔP_{Cu}. Acestea din urmă sînt proporționale cu pătratul curentului.

Pierderile totale de putere activă într-un transformator sînt exprimate de suma pierderilor indicate mai sus:

$$\Delta P_T = \Delta P_0 + \alpha^2 (\Delta P_k)_n, \tag{7-12}$$

unde $\alpha = \frac{S}{S_n} = \frac{I}{I_n}$ reprezintă coeficientul de încărcare al transformatorului.

Cînd sarcina este distribuită pe mai multe transformatoare conectate în paralel, pierderile totale de putere sînt:

$$(\Delta P_T)_n = N \Delta P_0 + \alpha^2 \frac{(\Delta P_k)_n}{N}, \tag{7-13}$$

unde coeficientul de încărcare corespunde curentului total:

$$\alpha = \frac{I_{tot}}{I_n} = \frac{S_{tot}}{S_n}.$$

Pierderile de putere reactivă în transformatoarele electrice se calculează cu relația:

$$\Delta Q_T = \frac{I_0}{100} S_n + \frac{u_k}{100} \alpha^2 S_n, \tag{7-14}$$

în care: I_0 reprezintă curentul de mers în gol al transformatorului (în %) considerat aproximativ egal cu curentul de magnetizare, u_k este tensiunea de scurtcircuit a transformatorului (în %) și S_n puterea nominală a transformatorului (în kVA).

Primul termen din (7-14) reprezintă pierderile de putere reactivă în fierul transformatorului, iar cel de-al doilea termen — pierderile în scurtcircuit ale acestuia.

Pierderile de energie într-un transformator în intervalul de timp t, se determină cu relația:

$$\Delta W_T = \Delta P_0 t + \alpha_{max}^2 (\Delta P_k)_n \cdot \tau, \tag{7-15}$$

unde α_{max} este coeficientul de încărcare maxim (și corespunde încărcării maxime a transformatorului) în funcție de care a fost considerat timpul pierderilor maxime τ.

Dacă se ține seama de curentul mediu pătratic, pierderile de energie într-un transformator, corespunzător ecuației (7-15), se pot pune sub forma:

$$\Delta W_T = \Delta P_0 t + \alpha_{mp}^2 \frac{t}{\tau} (\Delta P_k)_n \tau = [\Delta P_0 + \alpha_{mp}^2 (\Delta P_k)_n] t, \qquad (7\text{-}16)$$

unde coeficientul mediu pătratic de încărcare are forma:

$$\alpha_{mp} = \alpha_{max} \sqrt{\frac{\tau}{t}}. \qquad (7\text{-}17)$$

7.3.3. Pierderile de putere și energie în motoarele electrice.

În timpul regimului stabilizat de lucru al motoarelor electrice, pierderile se determină ca sumă a pierderilor din înfășurări, miezul magnetic (pierderi în fier) și pierderi mecanice:

$$\Delta W_a = 3 I_{mp}^2 R t, \qquad (7\text{-}18)$$

unde R este rezistența indusului pentru motoare de curent continuu, rezistența înfășurării statorului la motoarele sincrone, sau rezistența înfășurării statorului adunată cu rezistența înfășurării rotorului raportată la stator pentru motoarele asincrone (v. § 6.2, § 6,3 și § 6.4.).

7.3.4. Alegerea tensiunii rețelelor electrice

Tensiunea nominală a receptoarelor este egală cu tensiunea la care sînt conectate. Stabilirea tensiunii optime pentru fiecare element component al unei scheme electrice trebuie să rezulte dintr-un calcul tehnico-economic.

La alegerea tensiunii trebuie urmărit ca abaterea tensiunii în timpul funcționării să nu depășească valorile prescrise.

Din figura 7-19 (unde este reprezentată variația tensiunii în lungul liniei electrice) se observă că tensiunea de serviciu a unei linii variază de-a lungul ei, tensiunea U_2 de la capătul liniei fiind mai mică decît tensiunea U_1 de la începutul liniei. Tensiunea nominală se consideră egală cu media celor două tensiuni, adică:

$$U_n = \frac{1}{2} (U_1 + U_2).$$

Pierderea de tensiune în linie $\Delta U = U_1 - U_2$ se mai poate exprima și în funcție de impedanța rețelei Z și curentul I, prin $\Delta U = ZI$.

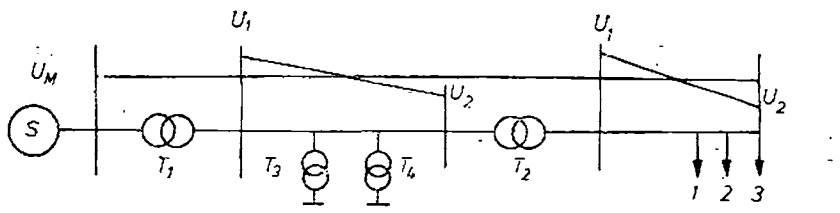


Fig. 7-19

Prin urmare pierderea de tensiune, care nu trebuie să depășească 10% din tensiunea nominală la aceeași impedanță a rețelei, va depinde de valoarea curentului I, care la rîndul ei poate fi mărită sau micșorată în funcție de tensiunea care se alege.

Pe de altă parte, consumul de metal neferos se micșorează cu creșterea tensiunii. Pierderile de putere activă și de tensiune în liniile trifazate la o sarcină activă cu cos $\varphi = 1$ (neglijînd reactanța liniei) sînt:

$$\Delta P = 3\,RI^2 \text{ și } \Delta U = \sqrt{3}\,RI,$$

unde: ΔP sînt pierderile de putere activă (în W), ΔU — pierderile de tensiune (în V), I — curentul în conductoarele liniei (în A) și R — rezistența activă a unei faze (în Ω).

Dacă înlocuim $I = \frac{P}{\sqrt{3}\,U}$, obținem pierderile de tensiune și putere exprimate ca funcții de tensiune:

$$\Delta P = \frac{P^2 R}{U^2} \tag{7-19}$$

și:

$$\Delta U = \frac{PR}{U}. \tag{7-20}$$

Aceste formule, ne arată că pierderile de putere și de tensiune pot fi micșorate prin trecerea la tensiuni superioare.

Considerentele expuse explică clar tendința de trecere a rețelelor, generatoarelor și a unor receptoare la tensiuni superioare în scopul micșorării pierderilor de putere și a reducerii consumului de metale neferoase.

Introducerea tensiunilor existente astăzi în diferite țări a urmat un proces istoric, în funcție de specificul țării respective. În țara noastră s-au standardidat tensiunile; conform STAS 930-75, tensiunile nominale între faze (în V) sînt: 380 (cu sau fără conductor neutru), 6 000, 10 000, 20 000 35 000 (cu recomandarea de a fi evitată dacă e posibil), 110 000, 220 000 și 400 000.

7.4. UTILIZAREA RAȚIONALĂ A ENERGIEI ELECTRICE

Obiectivul strategic de „a realiza independența energetică a României", trebuie apreciat ca avînd o mare semnificație politică și o importanță economică deosebită pentru țara noastră.

7.4.1. Măsuri de economisire a energiei electrice

Pentru perioadele de perspectivă se preconizează reducerea ritmurilor medii anuale de creștere a consumului de energie primară și de energie electrică rezultate atît din caracterul limitat al resurselor energetice cît și din costurile tot mai mari de producere a energiei în general și a energiei electrice în special.

Măsurile de economisire a energiei electrice în industrie pot fi aplicate atît la elementele separate ale sistemului de alimentare cu energie, cît și la locurile de consum.

Economisirea energiei electrice la elementele sistemului de alimentare se obține prin:

1° introducerea mai adîncă a liniilor de înaltă tensiune (35 kV și 110 kV) cît mai aproape de centrul de consum;

2° apropierea stațiilor de transformare de centrele sarcinilor și descongestionarea lor prin limitarea puterii fiecărui transformator (180 kVA și mai puțin);

3° mărirea tensiunii rețelelor de alimentare și distribuție de înaltă tensiune;

4° deconectarea parțială a transformatoarelor de forță în perioada sarcinilor reduse;

5° punerea în funcțiune a legăturilor de rezervă și a liniilor paralele pentru alimentarea unor stații industriale și a instalațiilor de distribuție;

6° mărirea factorului de putere al instalațiilor electrice (prin compensarea puterii reactive la consumatori);

7° realizarea regimului economic de funcționare a transformatoarelor, care poate să asigure pierderi minime de energie electrică în aceste transformatoare.

Economisirea energiei electrice la locul de producție se poate realiza prin următoarele măsuri:

a) instalarea de electromotoare de putere corespunzătoare, care asigură randamentul maxim;

b) mărirea factorului de putere al receptorului;

c) deconectarea la mersul în gol al electromotoarelor de acționare a diferitelor mecanisme;

d) reducerea consumului energiei electrice la instalațiile de pompe (prin reglarea presiunii și debitului fiecărei pompe și prin alegerea unui regim util din punctul de vedere economic la funcționarea în paralel a pompelor);

e) reducerea consumului specific al energiei electrice la unitățile de producție prin îmbunătățirea tehnologiei respective.

Un instrument foarte eficient pentru stimularea consumatorilor în vederea utilizării raționale a energiei electrice este sistemul de tarife și prețuri cu care se decontează energia consumată. În toate sistemele energetice se practică formele tarifare și prețuri care urmăresc să determine consumatorul de a utiliza rațional energia electrică.

7.4.2. Energia electrică — componenta cea mai dinamică a balanței energetice

Mutațiile care au loc în balanța energetică a țărilor ca urmare a reducerii ponderii hidrocarburilor în favoarea cărbunilor și a energiei de origine nucleară conduc la extinderea utilizării energiei primare sub formă de energie electrică. Inginerul tehnolog care avea, în trecut, posibilitatea să aleagă formele de energie pe care să le utilizeze și implicit sistemele de acționare sau procesele tehnologice, în prezent se confruntă cu restricțiile energetice care s-au amplificat, ceea ce-i diminuează considerabil gradele de libertate. Totuși, alternativa cea mai economică o reprezintă energia electrică.

Actuala structură a consumului de energie este rodul incidenței între necesitățile de energie, prețurile diferitelor forme de energie disponibile și particularitățile caracteristice ale acestora. Această incidență este dinamică. Astfel disponibilitatea unor resurse energetice ieftine (ca de exemplu hidrocarburile) și de calitate avantajoasă (confort, eficacitate ridicată pe unitatea de masă etc.) a dinamizat dezvoltarea economico-industrială, făcînd-o implicit depen-

dentă de aceste hidrocarburi. Totodată au fost descurajate relativ activitățile de cercetare pentru perfecționarea utilizării altor forme de energie.

O dată cu creșterea rapidă a prețurilor la hidrocarburi echilibrul dinamic descris mai sus a fost fundamental perturbat. Ne aflăm în prezent într-o perioadă de căutare a unui nou echilibru care să răspundă noilor condiții economice. Această căutare se desfășoară în cîteva direcții principale:

— atragerea în circuitul energetic a unor noi surse;

— înlocuirea hidrocarburilor cu alte resurse devenite competitive prin modificarea raportului de prețuri;

— accentuarea cercetărilor pentru ceea ce se numește în mod general „conservarea energiei", pentru perfecționarea tehnologiilor de utilizare a energiei, sporirea randamentelor energetice ale acestor procese.

Acțiunile întreprinse pe direcțiile menționate, ca și pe alte direcții de mai mică amploare, au arătat că unele măsuri de substituție precum și unele tehnologii perfecționate fac apel în mai mare măsură la energia electrică, aceasta fiind un factor de progres energetic.

Astfel, s-a constatat că datorită gradului ridicat de confort oferit de hidrocarburi precum și a unor posibilități mai bune de transport — divizare — măsurare — automatizare, substituția hidrocarburilor se poate face numai parțial prin cărbuni. O altă parte se face prin intermediul energiei electrice care oferă cel puțin aceleași avantaje ca hidrocarburile din punctul de vedere al consumului. În plus, progresul tehnic foarte rapid în ramura electronică — electrotehnică a promovat o serie de soluții prin care utilizarea energiei electrice oferă și un randament global superior în comparație cu alte tipuri de combustibil.

Aceasta a făcut ca, în plină criză energetică, să se constate o sporire a ponderii producerii energiei electrice în utilizarea resurselor de energie primară, atît pe ansamblul economiilor naționale ale mai multor țări europene, cît și pe principalele ramuri economice — industriale în parte.

Experiența arată că nu se poate concepe o creștere a productivității muncii fără o creștere corespunzătoare și a consumului de energie electrică.

Procesele chimice industriale consumă mari cantități de energie. Energia electrică este consumată în procese electrolitice la producerea diverselor metale, produse chimice și în procedee electrotermice destinate producției de feroaliaje și a mai multor substanțe chimice. Energia electrică este în parte utilizată ca materie primă în aceste procedee, ceea ce explică consumul specific ridicat de energie electrică pe greutatea de materie produsă (kWh/kg). Chiar și în acest caz progresul tehnic a impus reducerea acestui consum specific.

În consecință, în paralel cu problema substituției hidrocarburilor, o problemă importantă este diminuarea consumului specific de energie și, în particular, cel de energie electrică în procesele tradiționale.

Transformarea energiei electrice în căldură, se poate realiza într-o gamă de temperaturi. Prin curenți de inducție este posibil să se concentreze căldura exact în locul ales (pentru sudură, încălzit) cea mai mare parte din timp cu pierderi minime de căldură în mediul înconjurător. În acest mod, temperatura materiei poate fi controlată cu ajutorul energiei electrice cu precizie, ceea ce face din energia electrică cea mai eficientă formă de energie pentru procesele termice industriale, care cer temperaturi ridicate și strîns controlabile.

Pentru transportul rutier, motorul electric are un randament superior celui cu benzină. În condiții de funcționare identice, un vehicul electric consumă cu circa 70% mai puțin decît unul clasic. Motoarele fixe furnizoare de energie mecanică pot fi alimentate cu energie electrică, produse petroliere

gaze. Randamentul motoarelor mari pentru transformarea energiei în forță motoare este:

— motoare diesel: 25—30%;
— turbine cu gaze: 30—40%;
— motoare electrice:
  — numai randamentul conversiei din energie electrică în energie mecanică 90—95%,
  — randamentul întregului ciclu, de la energia primară necesară producerii energiei electrice, pînă la energia mecanică furnizată: 32—38%.

Randamentul relativ ridicat al motoarelor electrice, precum și alte avantaje (silențiozitate, lipsă de poluare, economie globală de energie în procesele industriale), conduc la concluzia avantajului înlocuirii hidrocarburilor cu energie electrică.

În mod similar, în industrie se semnalizează și alte domenii în care, datorită unor procedee tehnologice mai eficiente, utilizarea energiei electrice conduce la un consum total de combustibil mai mic decît situația utilizării acestuia direct la consumator, ca de exemplu:

— tratament termic și călire în ulei	0,88 *
— tratament termic oțel	0,56
— topire aluminiu	0,73
— menținerea aluminiului topit	0,07
— uscatul lemnului	0,68
— cuptor de emailare	0,68
— concentrație la lactoserum	0,44

Situații similare se întîlnesc în țara noastră, în funcție de datele de care se dispune, prezentîndu-se anumite aspecte. Astfel, în ramura construcțiilor de mașini, principalele consumuri energetice sînt orientate pentru:

a) încălzirea semifabricatelor matrițate spre forjare;
b) tratamentul termic al unor piese;
c) topirea metalelor: fontă, oțel, metale neferoase.

Încălzirea semifabricatelor în vederea forjării are loc în prezent, în proporție de peste 97% în cuptoare cu hidrocarburi (gaze, lichide), restul de 2—3% fiind încălzite în cuptoare cu curenți de inducție. Avantajele acestui ultim proces sînt: lipsa oxidării superficiale a pieselor, posibilitatea și obligativitatea sistematizării și automatizării procesului. Totuși, încălzirea prin inducție nu poate înlocui complet sistemul cu flacără; se apreciază la 25% cota posibilă în prezent de substituire.

Din punctul de vedere al eficacității, pentru o tonă de semifabricate în cuptoarele cu flacără sînt necesare aproximativ 290—300 kgcc **, în timp ce prin inducție sînt suficiente 450—500 kWh (echivalente cu 160—175 kgcc). Este evident că, chiar și pentru 25% din cele aproximativ 500 mii tone piese forjate (anual în prezent), trecerea la încălzirea prin inducție, care necesită modificări în instalații, ar reprezenta economii nete de energie de ordinul 15—16 mii tcc pe an, împreună cu sporirea necesităților de energie electrică cu circa 62,5 GWh/an.

Tratarea termică a pieselor are loc în principiu prin aceleași procedee ca și mai sus, la care se adaugă încălzirea în cuptoare electrice rezistive. Acestea

* Reprezintă raportul dintre consumul de combustibil la centrală pentru utilizarea electrică și consumul de combustibil direct la utilizator.
** Kilograme combustibil convențional.

din urmă au, față de cele cu flacără, avantajul că pierd căldura numai prin izolația cuptorului, în timp ce celelalte o pierd și prin gazele ce se evacuează, înregistrîndu-se în ansamblu un randament superior.

Față de situația actuală în care tratarea prin inducție (curenți de înaltă frecvență) asigură numai 5% din total și cea în cuptoare rezistive circa 15%, se prevede ajungerea la tratarea prin intermediul electricității pînă la 70—75% din necesitățile de tratament termic.

În procesele de topire energia electrică a avut și pînă în prezent o dezvoltare importantă. Astfel, topirea fontei cu inducție se aplică în aproximativ 40% din total, urmînd să atingă 90—95%, iar topirea oțelului în cuptoare cu arc urmează a elimina în totalitate alte procedee neelectrice. La fel stau lucrurile și la topirea metalelor neferoase, în cuptoarele electrice de inducție ori rezistive.

În acest context, apelul accentuat la resurse energetice de tip cărbune inferior, energie nucleară, ca și preocuparea pentru raționalizarea proceselor de consum au condus la sporirea ponderii energiei electrice în balanța consumului energetic. Această preferință spre energia electrică se datorește gradului ridicat de confort și de manevrabilitate, constituind adesea singura alternativă la înlocuirea hidrocarburilor precum și stabilirea unor noi procese tehnologice, mai eficiente decît prin utilizarea de alți combustibili, aceasta datorîndu-se în final valorificării acelorași avantaje ale energiei electrice față de alte forme de energie.

Aceasta este confirmată prin balanțe energetice ale diferitelor țări, energia electrică fiind chemată să înlocuiască treptat alte tipuri de energie cu utilizări în cele mai diferite domenii de activitate industriale sau de interes casnic edilitar etc.

Avînd în vedere actualele perspective ale evoluției disponibilității resurselor energetice ca și rapida evoluție tehnologică este de așteptat ca acest proces să se intensifice în următorii 10—12 ani.

De aceea considerăm că în țara noastră trebuie să se întreprindă studii de detaliu, pe diferite ramuri consumatoare, și în această direcție inginerul tehnolog trebuie să aibă un rol important în definirea direcțiilor de cercetare ale domeniului în care lucrează.

Bibliografie

1. Andronescu, Pl. *Bazele electrotehnicii*, vol. I și II. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1972.
2. Bălă, C. *Mașini electrice — teorie și încercări*. București, Editura Didactică și Pedagogică 1979.
3. Bichir, N., Răduți, C., Diculescu, A. S. *Mașini electrice*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1979.
4. Bogoevici, N. *Electrotehnică și măsurări electrice*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1979.
5. Dordea, R. *Mașini electrice*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1970.
6. Dumitrescu St., Dumitrescu, I., Paiu O. *Aplicații inginerești ale calculatoarelor*, București, Editura Didactică și Pedagogică, 1975.
7. Manea, Fl., Preda, M., Gavrilă, M. *Electrotehnică și mașini electrice*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1976.
8. Manolescu, P., Ionescu Carmen. *Măsurări electrice și electronice*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1969.
9. Mocanu, C. I. *Electrotehnică și utilaj electric în industria metalurgică*, vol. 2. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1966.
10. Mocanu, C. I. *Teoria circuitelor electrice*. București, Editura Ddidactică și Pedagogică, 1979.
11. Mocanu, C. I. *Teoria cîmpului electromagnetic*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1981.
12. Nitu, V. *Economia energeticii*, vol. 1 și 2. București, Editura Tehnică, 1981.
13. Racoveanu, N., Dumitrescu, I. *Electrotehnică și electronică*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1965.
14. Răduleț, R. *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I—III. București, Litografia învățămîntului, 1955.
15. Vladimirov, V. S. *Ecuațiile fizicii matematice*. București, Editura Științifică și Enciclopedică, 1980.